PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
PAMUKKALE UNIVERSITY ENGINEERING COLLEGE
MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ
JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCES
YIL : 1995
CİLT : 1
SAYI : 1
SAYFA : 45-51

GEÇİŞLİ HAL ISI İLETİMİ PROBLEMİNİN SONLU ELEMANLAR METODU İLE ÇÖZÜMÜ

Süleyman TAŞGETİREN, Muzaffer TOPCU
Pamukkale Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Makine Mühendisliği Bölümü, Denizli

ÖZET

Makina tasarımında sıcaklık dağılımının belirlenmesi, genellikle malzeme seçimi, çalışma esnasında normalin dışında sıcaklık etkisine maruz kalan parçaların tasarımı gibi konularda bir ilk adım oluşturur. Bu sırada da çevre şartlarının belirlenmesi, karmaşık geometrilerin modellenmesi ve en temel sabit özellikleri olan izotrop malzemeden her doğrultuda farklı özellikler gösteren kompozit malzemeye kadar çok çeşitli malzemelerin dikkate alınması gerekmektedir. Bu noktada elemanların hem ısıl hem de mekanik analizinde benzer yöntemlerin kullanılıyor olması nedeniyle sonlu elemanlar metodu büyük bir kullanım imkanı bulur. Bu çalışma lamel grafitli dökme demirden yapılmış dikdörtgen kesitli bir çubuğun 600 oC ile oda sıcaklığı arasında tekrarlı ısıtılması ve su ile soğutulması sırasında mevcut bir çatlakta meydana gelen değişmenin incelendiği bir projenin ilk basamağını oluşturmaktadır (Taşgetiren, 1992). Isıl döngü sırasında çubuk kesitinde meydana gelen sıcaklık dağılımının elde edilmesi ve düzgün olmayan bu sıcaklık dağılımının oluşturduğu gerilmelerin hesaplanması projenin en önemli iki basamağını teşkil etmektedir.

Bu çalışmada genel geçişli hal ısı iletimi probleminin iki boyutlu sonlu eleman formülasyonu verilmiş, geliştirilmiş olan bilgisayar programı kullanılarak konveksiyon sınır şartı etkisindeki dikdörtgen kesitli çubuk için örnek çözümler yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Geçişli Hal Isı İletimi, Sonlu Elemanlar Metodu, Termomekanik Analiz.

SOLUTION OF TRANSIENT HEAT CONDUCTION PROBLEM BY THE FINITE ELEMENT METHOD

ABSTRACT

Determination of temperature distribution is generally the first step in the design of machine elements subjected to ubnormal temperatures in their service life and for selection of materials. During this heat transfer analysis, the boundary and enviromental conditions must be modeled realistically and the geometry must be well represented. A variety of materials deviating from simple constant property isotropic material to composit materials having different properties according to direction of reinforcements are to be analysed. Then, the finite element method finds a large application area due to its use of same notation in heat transfer analysis and mechanical analysis of elements.

In this study, the general formulation of two dimensional transient heat conduction is developed and a sample solution is given for arectangular bar subjected to convection baundary condition.

Key Words: Transient Heat Conduction, Finite Element Method, Themomechanical Analysis

1. GİRİŞ

Sonlu elemanlar metodu, gerilme analizi, sıcaklık ve ısı transferi analizi, akışkanlar mekaniği, elektrik ve magnetik alanlar gibi mühendisliğin her alanında kullanılmaktadır. Ele alınan bu problemler genellikle skaler ve vektörel alan problemleri olarak iki şekilde sınıflandırılır (Huebner, 1982 ve Chandrupatla, 1991). Bu çalışmada bir skaler alan problemi olan geçişli hal ısı iletimi problemi ele alınacaktır.

Skaler alan problemlerinin en çarpıcı özelliği, mühendisliğin ve fiziğin hemen hemen her dalında bulunabilmesidir. Bunlar genellikle Helmholtz denklemi olarak adlandırılan

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)+\lambda\phi+Q=0 \tag{1}$$

formülüyle ifade edilir. Bu denklemde $\phi=\phi(x,y,z)$ aranan alan değişkenidir. Termal olarak izotropik ortamda, iki boyutlu ısı akışını ifade eden Fourier kanunu :

$$q_x=-k\frac{\partial T}{\partial x},\; q_y=-k\frac{\partial T}{\partial y} \tag{2}$$

dir. Burada T= T(x,y,t) olarak ortamdaki sıcaklık alanı, qx ve qy; x ve y doğrultularındaki ısı akışı, k; ısı iletim katsayısı, ve $\frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}$; de x ve y doğrultusundaki sıcaklık değişimleridir. Meydana gelen ısı akışı;qx ve qy'nin vektörel toplamıdır. Denklem (1) de ϕ=T alınır ve Fourier yasası da uygulanırsa,

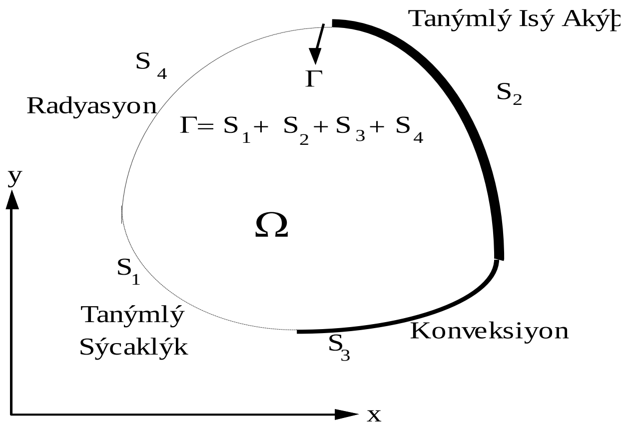
$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}+\frac{\partial q_z}{\partial z}\right)+Q=\rho c\frac{\partial T}{\partial t} \tag{3}$$

elde edilir. Burada ρ ve c malzemeye ait özellikler olup sırasıyla yoğunluk ve özgül ısıyı t ise zamanı göstermektedir. Bu ısı iletim denklemi olup bir başlangıç ve çeşitli sınır şartlarına göre çözülür. Başlangıç şartı, iki boyutlu hal için $T(x,y,0)=T_0(x,y)$ şeklinde olup, başlangıç halindeki sıcaklık dağılımı olarak ele alınır.

Şekil 1 de gösterilen cisim için sınır şartları ise, sırasıyla sabit yada zamana ve koordinata göre tanımlanmış sıcaklık, sabit yada zamanla ve konumla değişen ısı akışı, taşınımla ısı akışı ve ışınımla ısı akışı şeklindedir. Bu şartlar aşağıdaki şekilde formüle edilir.

$$\begin{array}{ll}
S_1 \text{ üzerinde} & T_s=T_1(x,y,t)\\
S_2 \text{ üzerinde} & -q_s=q_x n_x+q_y n_y\\
S_3 \text{ üzerinde} & h(T_s-T_e)=q_x n_x+q_y n_y\\
S_4 \text{ üzerinde} & \sigma\varepsilon T_s^4-\alpha q_r=q_x n_x+q_y n_y
\end{array} \tag{4}$$

Burada T1 yüzey sıcaklığı, nx, ny yüzeyin doğrultu kosinüsleri, qs birim alandan tanımlı ısı akışı, h konveksiyonla ısı transferi katsayısı, Te çevre sıcaklığı, Ts bilinmeyen yüzey sıcaklığı, σ Stephan-Boltzman sabiti, ε ve α yüzey özellikleri ve qr de birim alandan yapılan radyasyonla ısı taransferini göstermektedir.



Şekil 1. İki boyutlu genel ısı iletimi için çözüm bölgesi.

2. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Şekil 1'de verilen Ω çözüm bölgesi herbirinde r adet düğüm bulunan M adet elemana bölünür. Bir eleman içindeki sıcaklık ve sıcaklık gradyenti aşağıdaki gibi gösterilir (Huebner, 1982 ve Chandrupatla, 1991).

$$T(x,y,t)=\sum_{i=1}^{r} N_i(x,y)T_i(t) \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T}{\partial x}(x,y,t)&=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial N_i}{\partial x}(x,y)T_i(t)\\
\frac{\partial T}{\partial y}(x,y,t)&=\sum_{i=1}^{r}\frac{\partial N_i}{\partial y}(x,y)T_i(t)
\end{aligned} \tag{6}$$

Matris notasyonu kullanıldığında ise,

$$\begin{aligned}
&T(x,y,t)=[N(x,y)]\{T(t)\}\\
&\begin{bmatrix}\frac{\partial T}{\partial x}(x,y,t)\\ \frac{\partial T}{\partial y}(x,y,t)\end{bmatrix}=[B(x,y)]\{T(t)\}
\end{aligned} \tag{7}$$

olur. Burada [N] sıcaklık interpolasyon matrisi, [B] ise sıcaklık değişimi interpolasyon matrisi olarak adlandırılır. Ti her düğümün sıcaklığı {T(t)} de eleman düğüm sıcaklıkları vektörüdür. Burada enerji denklemi olan (3) numaralı denkleme minumum potansiyel enerji ilkesi uygulanır,

$$\int\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}-Q+\rho c\frac{\partial T}{\partial t}\right)N_i d\Omega=0 \tag{8}$$

ve

$$\int\left(\frac{\partial q_x}{\partial x}+\frac{\partial q_y}{\partial y}\right)N_i d\Omega \tag{9}$$

kısmı integre edilir ve ifade yeniden yazılırsa,

$$\int_\Omega \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i \, d\Omega - \int_\Omega \left[\frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial N}{\partial y} \right] \begin{bmatrix} q_x \\ q_y \end{bmatrix} d\Omega$$
$$= \int_\Omega Q \,.N_i \, .d\Omega - \int_\Gamma (q \; n).N.dr$$
$$i = 1,2,3,\ldots..r \qquad 10)$$

olur. Yüzey bölgesi her bölgede etkili olan sınır şartlarının toplamı olarak ifade edilebileceği için, son terim her bir sınır şartı için ayrı integre edilirse,

$$-\int_{S_1} (q \; n).N_i.d\Gamma + \int_{S_2} q_s.N_i.d\Gamma$$
$$-\int_{S_3} h(T - T_e).N_i.d\Gamma - \int_{S_4} (\sigma\varepsilon T^4 - \alpha q_r) N_i.d\Gamma$$
$$i = 1,2,3,\ldots..r \qquad (11)$$

elde edilir. Sonuçta genel denklem ve eleman denklemleri aşağıdaki gibi bulunur.

$$[C] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} + \big[[K_c] + [K_h] + [Kr] \big] \{T\}$$
$$= \{R_t\} + \{R_Q\} + \{R_q\} + \{R_h\} + \{R_r\} \qquad (12)$$

Burada

$$[C] = \int_\Omega \rho.c.\{N\}.[N].d\Omega$$

$$[K_c] = \int_\Omega k[B]^T.[B].d\Omega$$

$$[K_h] = \int_{S_3} h.\{N\}.[N].d\Gamma$$

$$[K_r].\{T\} = \int_{S_4} \sigma \; \varepsilon. \; T^4 \; .\{N\}. \, d\Gamma$$

$$\{R_T\} = -\int_{S_1} (q \; n)\{.N\}.d\Gamma$$

$$\{R_Q\} = \int_\Omega Q \; \{N\} \; .d\Omega$$

$$\{R_q\} = \int_{S_2} q.\{N\}.d\Gamma$$

$$\{R_h\} = \int_{S_3} h \; T.\{N\}.d\Gamma$$

$$\{R_r\} = \int_{S_4} \alpha. \; q.\{N\}.d\Gamma$$

şeklindedir. Verilen her bir ifade sırasıyla şu şekilde tanımlanır. [C] eleman kapasitans matrisi, [Kc], [Kh] ve [Kr] matrisleri eleman iletim matrisleri olup sırasıyla iletim, taşınınm ve ışınım şartlarını ifade etmektedir. Taşınım ve ışınım matrisleri yalnızca yüzeyi ilgili sınır şartına maruz elemanlar için hesaplanır. {RT}, {RQ}, {Rq}, {Rh} ve {Rr} tanımlı düğüm sıcaklığı, iç ısı kaynağı, tanımlı yüzey ısıt akışı, yüzey taşınımı ve ışınımdan kaynaklanan ısıl yük vektörleridir.

Elde edilen bu genel ifade ele alınan problemin durumuna göre çeşitli şekillerde düzenlenebilir. Bunlardan en çok karşılaşılan dört örnek aşağıda verilmiştir.

1- Lineer kararlı hal ısı iletimi

$$\big[[K_c] + [K_h]\big].\{T\} = \{R_Q\} + \{Rq\} + \{R_h\} \qquad (13)$$

2- Lineer geçişli hal ısı iletimi

$$[C]\left\{\frac{dT}{dt}\right\} + \big[[K_c] + [K_h(t)]\big].\{T(t)\}$$
$$= \{R_Q\} + \{Rq\} + \{R_h\} \qquad (14)$$

3- Nonlineer kararlı hal

$$\big[[K_c(T)] + [K_h(T)] + [K_r(T)]\big].\{T\}$$
$$= \{R_Q(T)\} + \{Rq(T)\} + \{R_h(T)\} + \{R_r(T)\} \qquad (15)$$

4- Nonlineer geçişli hal

$$[C\,(T)]\left\{\frac{dT}{dt}\right\}\big[[K_c(T)] + [K_h(T,t)] + [K_r(T)]\big].\{T(t)\}$$
$$= \{R_Q(T,t)\} + \{Rq(T,t)\} + \{R_h(T,t)\} + \{R_r(T,t)\} \qquad (16)$$

Elde edilen bu genel denklemler çözülecek probleme göre yeniden düzenlenerek çözüme geçilir.

2.1. Genel Denklemin Çözümü

Ele aldığımız taşınım sınır şartına maruz iki boyutlu geçişli hal problemi için genel denklem

$$[C] \cdot \left\{\frac{dT}{dt}\right\} + \big[[K_c] + [K_h(t)]\big] \cdot \{T(t)\} = \{R_h(t)\} \qquad (17)$$

şeklinde elde edilir. Yüzey film katsayısı yüzey sıcaklığına büyük bir bağlılık gösterdiğinden ilgili matris ve vektörün yüzey sıcaklığına bağlı olarak hesaplanması gerekmektedir (Şekil 2.). Bu arada sıcaklığa bağlı olarak değişen yoğunluk, özgül ısı ve ısı iletim katsayısı gibi malzeme özelliklerinin de dikkate alınması ve ilgili matrislerin bu değişen özelliklere göre değişken olarak ele alınması gereklidir.

Türev sonlu farklar yaklaşımı ile,

$$[C]\cdot\left\{\frac{T_{n+1}-T_n}{\Delta t}\right\}+\left[[K_c]+[K_h]\right]\cdot\{T(t)\}=\{R_h\} \qquad (18)$$

şeklinde ifade edildikten sonra bazı ayarlamalar yapılarak,

$$[C]\{T_{n+1}\}=\Delta t\cdot\left[\{R_h\}-\left[[K_c]+[K_h]\right]\{T_n\}\right]+[C]\{T_n\} \qquad (19)$$

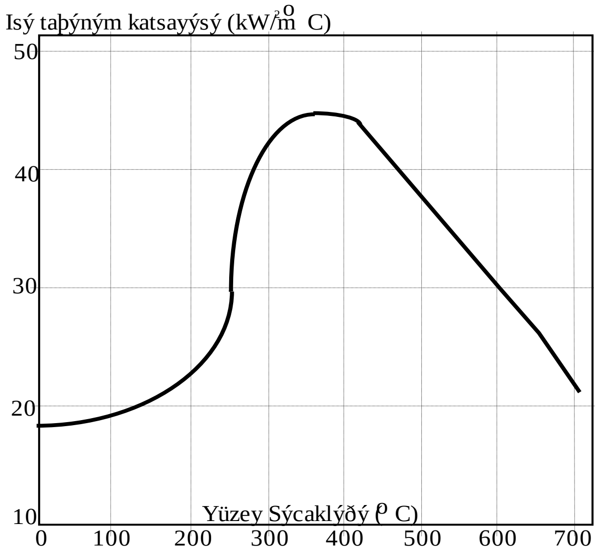
elde edilir. Bu denklemin çözümünde dikkat edilmesi gereken en önemli husus zaman aralığı Δt' nin belirlenmesidir. Belli bir değerin üzerindeki aralıklarda büyük genlikli salınımlı değerler elde edilirken çok küçük alınması durumunda da çözüm zamanı çok uzamaktadır. Yapılan çalışmalarda λ_m sistemin en büyük özdeğeri olmak üzere $\Delta t_{kr}=\frac{2}{\lambda_m}$ değerinin alınabilecek en büyük değer olduğu elde edilmiştir (Huebner, 1982) .

2.2. Bilgisayar Programı

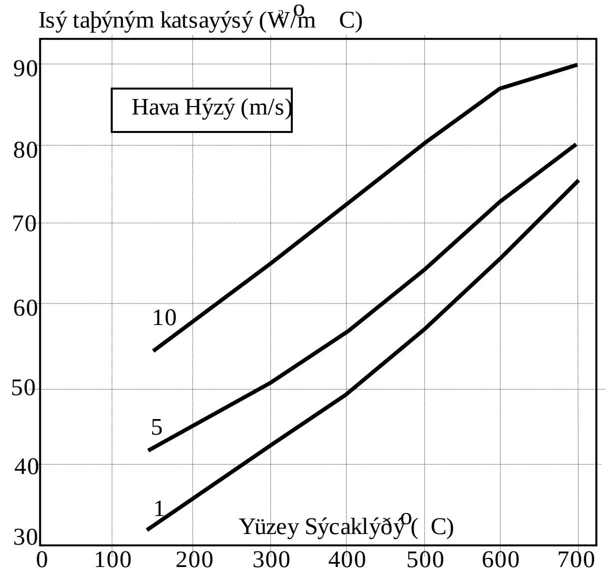
FORTRAN dilinde hazırlanan bilgisayar programının akış şeması Ek-1'de verilmiştir. Çözüm bölgesinin elemanlara ayrılması otomatik olarak hazırlanan programla yapılmaktadır. Problemin geometrik olarak iyi bir şekilde tanımlanması hem bilgisayar zamanının kısaltılması hem de sıcaklık dağılımının düzgün bir şekilde hesaplanabilmesi açısından önemlidir. Bu nedenle sıcaklık değişiminin hızlı olduğu yüzey bölgelerinin daha küçük elemanlara ayrılması faydalı olur.

Sıcaklıkla değişen malzeme özellikleri belli sıcaklıklar için girilmekte ara değerler lineer interpolasyonla program tarafından hesaplanmaktadır. Elemanlar için hesaplanan matrisler tüm sistemi temsil edecek şekilde birleştirilmekte ve daha sonra çözüm denklemi oluşturulmaktadır.

Malzeme özellikleri ve sınır şartlarında zaman ve sıcaklığa bağlı olarak büyük bir değişiklik olmaması durumunda, işlemi baştan sona yaklaşık olarak temsil edecek ortalama değerler alınarak yaklaşık bir çözümleme yoluna gidilebilir. Bu durumda eleman ve sistem matrislerinin değişen her değer için hesaplanmasına gerek kalmadığından işlem süresi büyük oranda kısalmaktadır. Ele alınabilecek orta bir yol olarak ta matrislerin ortalama sıcaklığın belli değişimlerinde yeniden hesaplanması yoluna gidilmesi olabilir.



(a)

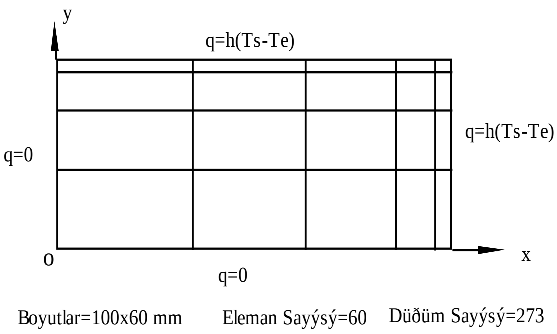


(b)

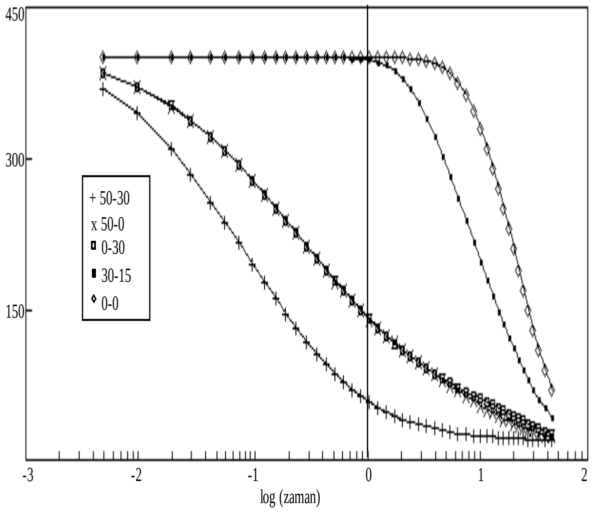
Şekil. 2. Yüzey film katsayısının yüzey sıcaklığıyla değişimi a) üzerine 50 m3/saat debili ve 0.5 MPa basınçlı su püskürtülen çubuk için, b) hadde merdanesinden çıkan çubukların soğutma alanına giderken üzerlerine üflenen hava için [*].

3. ÖRNEK ÇÖZÜM

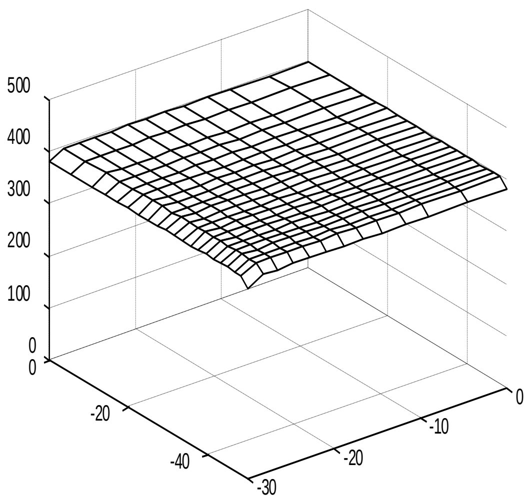
Hazırlanan bilgisayar programı ile başlangıçta 400 oC düzgün sıcaklık dağılımına sahip dikdörtgen kesitli bir çubuğun yüzeyden su püskürtülerek soğutulması sırasında zamana bağlı olarak değişen sıcaklık dağılımının hesabı yapılmıştır. Kesit simetrik bir yapıda olduğundan yüzeyden taşınım sınır şartı eksenler üzerinde ise tanımlı ısı iletimi sınır şartı örneklenmiş olmaktadır. Problemin sonlu eleman modeli Şekil 3'te verilmiştir. Elde edilen çözümler grafikler halinde gösterilmiştir.



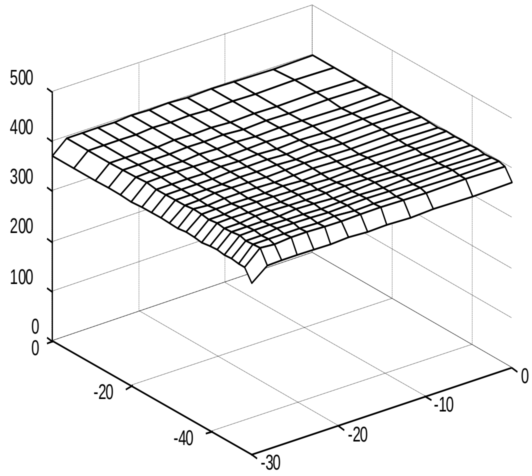
Şekil 3. Problemin sonlu eleman modeli



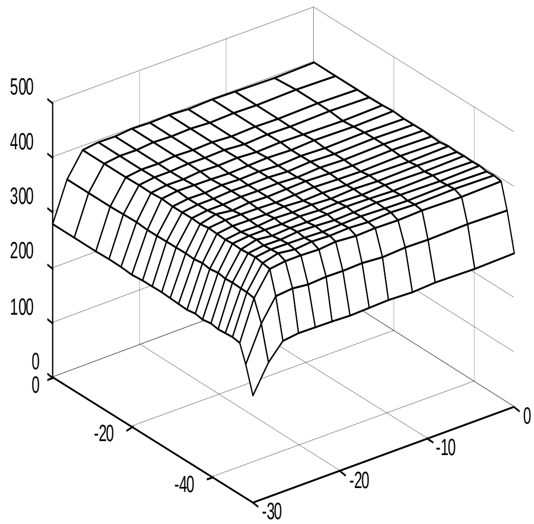
Şekil 4. Kesit üzerindeki çeşitli noktalarda zamanla sıcaklık değişimi



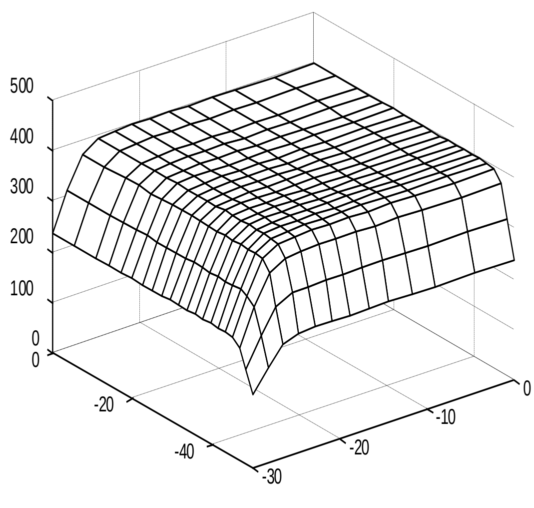
t=0.005 sn



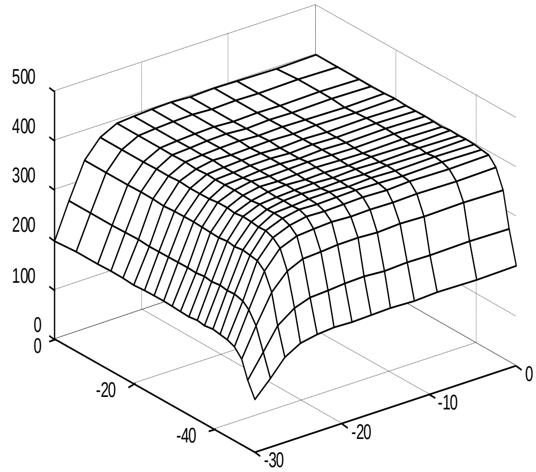
t= 0.01 sn



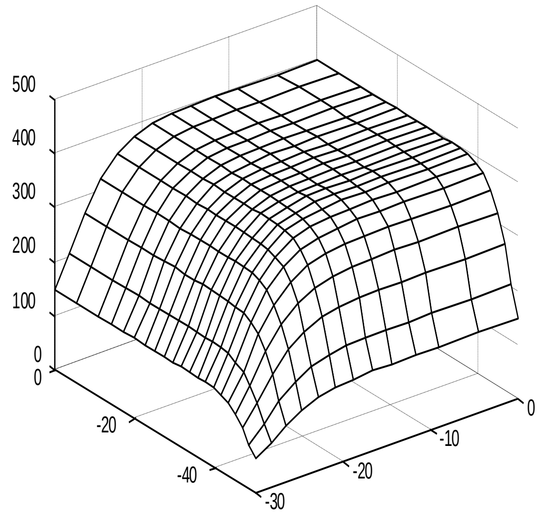
t= 0.1 sn



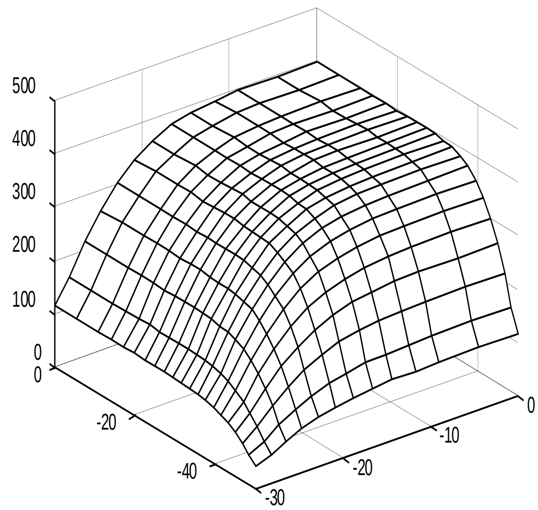
t=0,2 sn



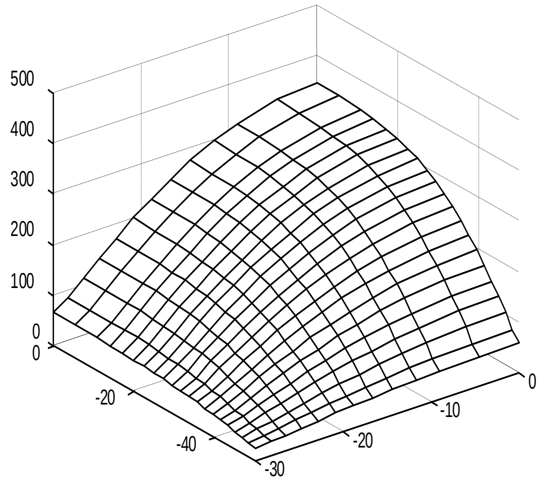
t=0.5 sn



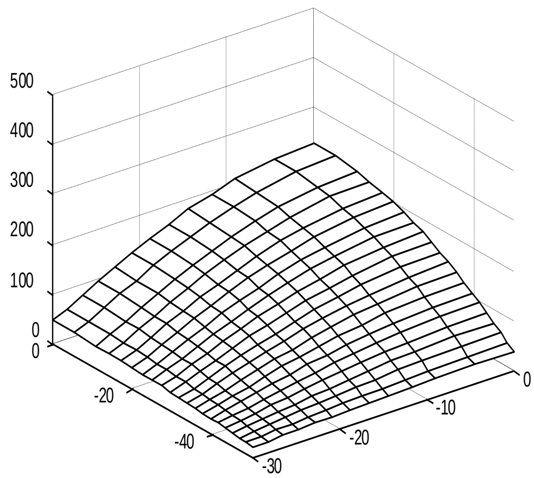
t= 1 sn



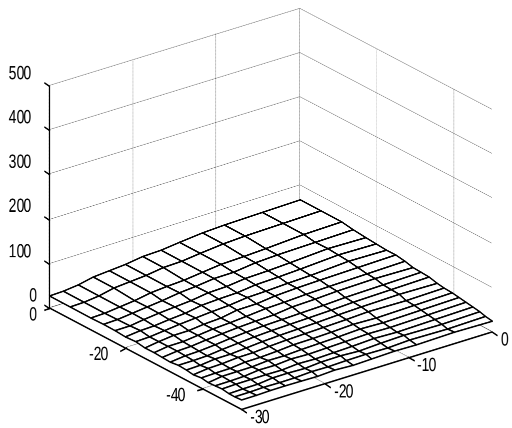
t=2 sn



t= 10 sn



t= 20 sn



t= 50 sn

Şekil 5. Dikdörtgen prizması çubuğun 1/4 lük kısmında sıcaklık dağılımının zamanla değişimi.

4. KAYNAKLAR

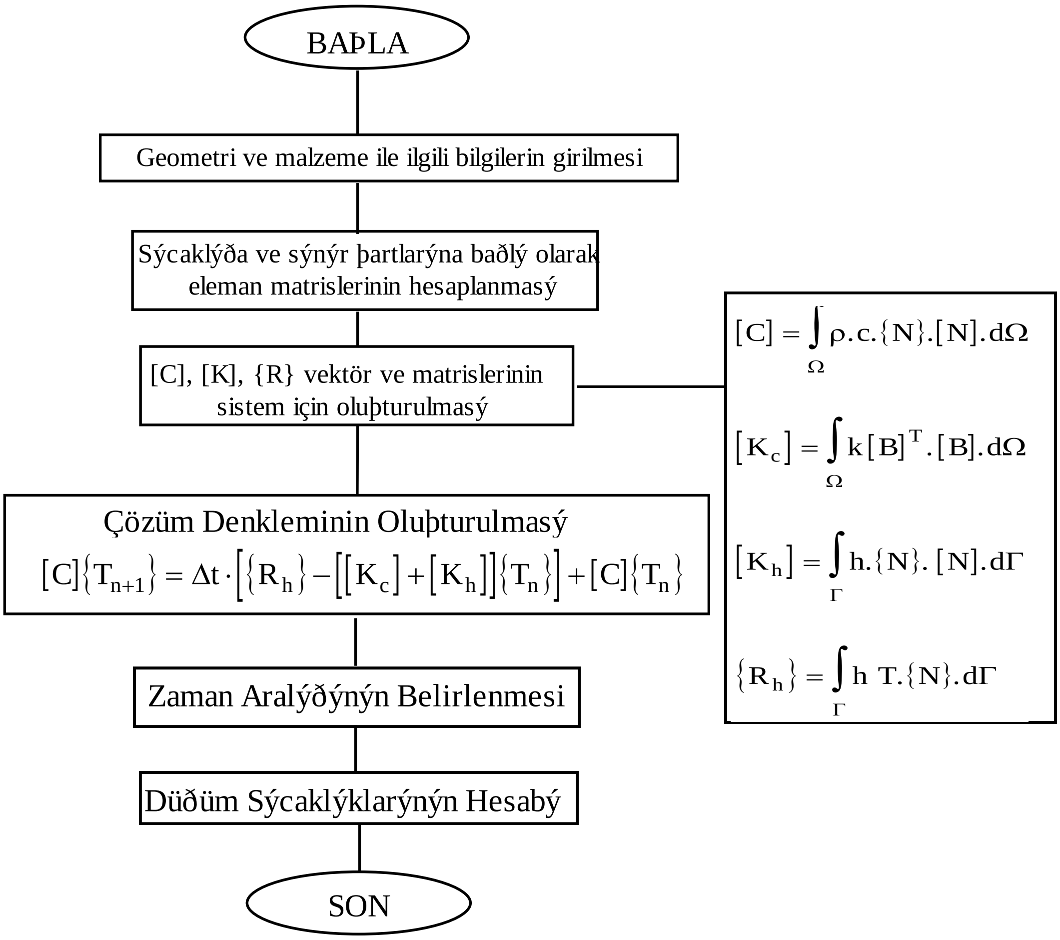
Chandrupatla, T. R., Belegundu, A. D. 1991. Introduction to Finite Elements in Engineering, Prentice Hall, USA

Holman, J.P. 1976. Heat Transfer, Mcgraw-Hill Kogakusha Ltd., Singapore

Huebner, K. H., Thornton, E. A. 1982. The Finite Element Method for Engineers, John Wiley and Sons, USA

Taşgetiren, S. 1992. A Study on the Variation of Stress Intensity Factor due to Thermal Stresses in Lamellar Graphite Cast Iron, M. Sc. Thesis, DEÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, İzmir.

* The Tempcore Process, Process Technology and Operating Insructions.



EK-1. Bilgisayar Programı Akış Şeması