

Matematikten Sanata Yansımalar: M.C. Escher

Yrd. Doç. Dr. Yasemin Erkan Yazıcı

Özet

Matematik ve sanat ilk bakışta iki uzak çalışma alanı gibi görünseler de, ikisi de insanın doğayı anlama ve ifade etme çabalarının ürünleridir. Matematik doğayı semboller, sayılar ve denklemlerle zarifçe soyutlamakta ve yorumlamaktadır. Sanat ise aynı işi resimler, heykeller ve kompozisyonlar aracılığıyla yapmaktadır.

Maurits Cornelis Escher, matematikten ilham alan ve düzlemin simetri operasyonları ile bölünmesi ve mümkün görünmeyen mekanlara odaklanan sanat eserleri ile gerek matematikçiler ve gerekse sanatçılar için bir ikon olarak kabul edilmektedir. Bu makalede Escher'in eserlerinde düzlemsel simetri gruplarının kullanımı ele alınmaktadır.

Anahtar Kelimeler

matematik ve sanat
düzlemsel simetri
M.C. Escher

M.C. ESCHER: REFLECTIONS FROM MATHEMATICS TO ART

Abstract

Although, mathematics and art may seem like two distant fields of study at the first glance, they are both products of man's struggle to understand and express nature. Mathematics, elegantly abstracts and interprets nature through the use of symbols, numbers and equations, whereas art does the same through the use of paintings, sculptures and compositions. Maurits Cornelis Escher has been considered as an icon for mathematicians and print artists alike for his mathematically inspired artworks which focused on divisions of planes with symmetry operations and impossible spaces. This paper reviews the use of plane symmetry groups in Escher's works.

Keywords

mathematics and art
plane symmetry groups
M.C. Escher

1. Giriş

Matematik, matematik terimleri sözlüğünde; "biçim, sayı ve çoklukların yapılarını, özelliklerini ve aralarındaki ilişkileri us bilim yoluyla inceleyen ve sayı bilgisi, cebir, uzay bilim gibi dallara ayrılan bilim" olarak tanımlanmaktadır (Hacısalıhoğlu ve diğ., 2009).

Sanat ise; Türk dil kurumu sözlüğünde, "bir duygu, tasarı, güzellik vb.nin anlatımında kullanılan yöntemlerin tamamı veya bu anlatım sonucunda ortaya çıkan üstün yaratıcılık" olarak tanımlanmaktadır (tdk.gov.tr). Sanatın tanımında geçen "kullanılan yöntemlerin tamamı" ifadesi, "bir olay veya nesneye olabildiğince çok açıdan bakabilme" matematiksel düşünce yapısı ile örtüşmektedir. Resim sanatı oran-orantıyı ve geometriyi doğal bir biçimde içinde barındırmaktadır. Matematiksel sanat (Math Art) veya üretmeye dayalı sanat (Generative Art) ile uğraşan sanatçılar eserlerini üretirken, matematikteki simetri, seriler, fraktallar ve istatistik gibi kuramlardan yararlanmaktadır.

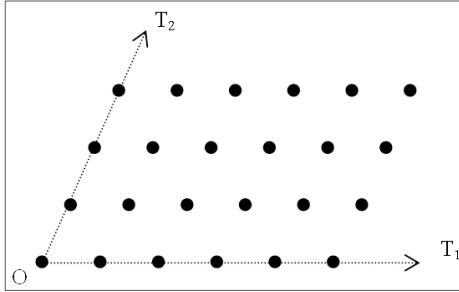
Boyutlar ve boyutlar arası geçişte sanatsal bir yön arandığında M.C.Escher ismi ile karşılaşılır. Resim ve matematiği birleştiren eserleriyle tanınan Maurits Cornelis Escher, matematiksel sanat alanında çalışan öncü sanatçılardandır. Bu çalışmada, M.C. Escher'in kullandığı düzlemsel simetri sistemi eserlerine atıfta bulunarak ele alınmaktadır.

Simetri: Düzlemsel Simetri Grupları

Simetri; sanatta, bir muntazamlık veya estetik olarak hoş giden bir orantılılık ve denge olarak; matematikte ise, kesin ve iyi tanımlanmış biçimsel sistemin kurallarına uygun bir denge ve orantılılık olarak tanımlanabilir. Matematikte bir nesnenin simetrik olarak kabul edilebilmesi için, matematiksel bir işleme tabi tutulduğunda bu işlemin nesneyi ve görünüşünü değiştirmemesi gerekir. Verilen bir dizi matematik işlem sonucunda (öteleme, dönme, yansıma) bir nesneden diğeri elde edilebiliyorsa (veya tersi) iki nesnenin birbirine göre simetrik olduğu söylenebilir (Mainzer, 2005).

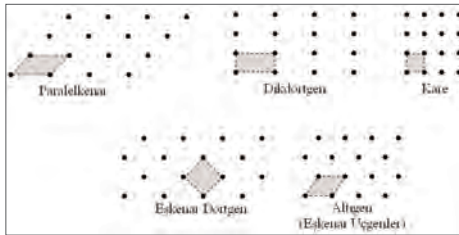
Simetri örüntüleri, birden fazla yönde düzenli aralıklarla tekrar eden motiflerden oluşmaktadır. Simetri örüntülerinin üzerine kurulduğu yapıya "ağ" adı verilmektedir. Ağ, bir başlangıç noktası ve farklı yönlere sahip T1 ve T2 öteleme vektörleri ile tanımlanabilir (Şekil 1). T1 ve T2

vektörleri ile oluşan paralelkenarlar ağın birim hücreleri olarak adlandırılmaktadır. Birçok düzlemsel simetri grubunda örüntüyü üretmekte kullanılan bölge, birim alandan küçük olmaktadır (Lockwook ve Macmillan, 1978).



Şekil 1: Düzlemsel simetri grubu ağı ve öteleme vektörleri

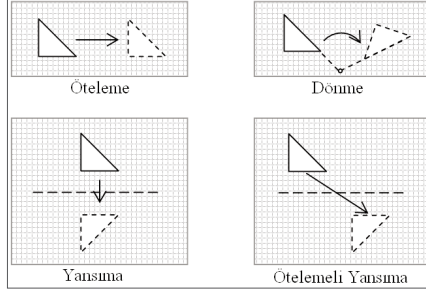
Ağ ile belirtilen şekilde tekrar eden herhangi bir motif oluşturulmasında kullanılabilir. Düzlemsel simetri gruplarının oluşturulmasında paralelkenar, eşkenar dörtgen, kare, dikdörtgen ve altıgen olmak üzere 5 farklı ağ tipi kullanılabilir (Schattschneider, 1978: 441) (Şekil 2).



Şekil 2: Düzlemsel simetri gruplarında kullanılan ağ tipleri ve birim hücreleri

Bir motif, "öteleme", "yansıma", "dönme" ve ötelemeli yansıma" işlemleri ile örüntü içerisinde başka bir konuma getirilebilir. Öteleme işleminde motif, düzlem üzerinde bir doğrultu boyunca kaydırılmaktadır. Dönme işleminde motif, düzlem üzerinde bir nokta etrafında dairesel bir hareketle döndürülmektedir. Yansıma işleminde motif, düzlem üzerinde tanımlanan bir doğrultuya göre yansıtılmaktadır. Ötelemeli yansıma

işleminde motife aynı anda öteleme ve yansıma işlemleri uygulanmaktadır (Coxeter, 1969) (Şekil 3).



Şekil 3: Düzlem izometri türleri

Simetri örüntülerinde 17 farklı düzlemsel simetri grubu kullanılabilir. Simetri grupları, bu gruplarda kullanılan ağ tipleri ve türetimde kullanılan bölgeler aşağıdaki tabloda özetlenmiştir (Schattschneider, 1978: 447) (Tablo 1 ve Tablo 2).

$p1$ simetri grubu sadece ötelemelerden oluşmaktadır. Bu simetri grubunda yansımalar, dönmeler veya ötelemeli yansımalar bulunmamaktadır.

$p2$, $p1$ grubundan farklı olarak 180 derecelik dönmeler içermektedir. Bu simetri grubunda da yansımalar ve ötelemeli yansımalar bulunmamaktadır. Öteleme eksenleri birbirlerine göre farklı açılarda olabilir.

pm simetri grubu sadece yansımalar içermektedir. Yansıma eksenleri, öteleme eksenlerinden birine paralel, diğer öteleme eksenine diktir. Bu simetri grubunda dönmeler veya ötelemeli yansımalar bulunmamaktadır.

pg simetri grubu ötelemeli yansımalar içermektedir. Ötelemeli yansımanın yönü, öteleme eksenlerinden birine paralel diğerine diktir. Bu grupta dönmeler veya yansımalar bulunmamaktadır.

	Simetri Grubu	Ağ Tipleri	Simetriler	Türetimde kullanılan bölge
1	p1	Paralelkenar, Kare, Dikdörtgen, Altgen, Eşkenar dörtgen		1 Birim
2	p2	Paralelkenar, Kare, Dikdörtgen, Altgen, Eşkenar dörtgen		1/2 Birim
3	pm	Dikdörtgen, Kare		1/2 Birim
4	pg	Dikdörtgen, Kare		1/2 Birim
5	cm	Eşkenar dörtgen, Kare, Altgen		1/4 Birim
6	pmm	Dikdörtgen, Kare		1/4 Birim
7	pmg	Dikdörtgen, Kare		1/4 Birim
8	pgg	Dikdörtgen, Kare		1/4 Birim
9	cmm	Eşkenar dörtgen, Kare, Altgen		1/4 Birim
10	p4	Kare		1/4 Birim
11	p4m	Kare		1/8 Birim
12	p4g	Kare		1/8 Birim
13	p3	Altgen		1/3 Birim
14	p3m1	Altgen		1/6 Birim
15	p31m	Altgen		1/6 Birim
16	p6	Altgen		1/6 Birim
17	p6m	Altgen		1/12 Birim

Tablo 1: Düzlemsel simetri grupları

2 katlı dönme merkezi (180°)	
3 katlı dönme merkezi (120°)	
4 katlı dönme merkezi (90°)	
6 katlı dönme merkezi (60°)	
Yansıma eksenini	
Ötelemeli yansıma eksenini	

Tablo 2: Tablo 1'in lejanti

cm grubu paralel eksenlerde yansımalar ve ötelemeli yansımalar içermektedir. Bu grupta dönmeler bulunmamaktadır. Ötelemeler birbirine göre farklı açılar yapabilmektedir ancak yansıma eksenleri öteleme eksenlerinin açıortayından geçmektedir.

pmm simetri grubu birbirine dik yansıma eksenleri içermektedir. Eksenlerin kesiştiği noktada 180 derecelik dönmeler bulunmaktadır.

Pmg grubu yansımalar ve yansıma eksenlerine dik ötelemeli yansımalar içermektedir. Yansıma eksenlerinin aralarında ve ötelemeli yansıma eksenleri üzerinde 180 derecelik dönmeler bulunmaktadır.

pgg grubu 180 derecelik dönmeler ve ötelemeli yansımalar içermektedir. Bu simetri grubunda yansımalar bulunmamaktadır. Birbirine dik ötelemeli yansıma eksenleri bulunmaktadır ve dönme merkezleri bu eksenler üzerinde bulunmamaktadır.

cmm simetri grubunda pmm grubunda olduğu gibi birbirine dik yansıma eksenleri bulunmaktadır.

p4 simetri grubunda 90 derecelik ve 180 derecelik dönmeler bulunmaktadır. 180 derecelik dönme merkezleri 90 derecelik dönme merkezlerinin merkezlerinde bulunmaktadır. Bu simetri grubunda yansımalar bulunmamaktadır.

p4m grubunda 90 derecelik ve 180 derecelik dönmeler bulunmaktadır. Bu simetri grubunda 4 yansıma eksenleri bulunmaktadır. Yansıma eksenleri birbirleriyle 45 derecelik açılar yapmaktadır ve 90 derecelik dönme merkezlerinde kesişmektedir. Tüm dönme merkezleri yansıma eksenleri üzerinde bulunmaktadır. Buna ek olarak p4m simetri grubu, 180 derecelik dönme merkezlerinden geçen ve yansıma eksenleriyle 45 derecelik açı yapan iki ötelemeli yansıma eksenleri içermektedir.

p4g simetri grubu, p4 grubunda olduğu gibi 90 derecelik ve 180 derecelik dönmeler içermektedir. 180 derecelik dönme merkezlerinden geçen birbirine dik yansıma eksenleri bulunmaktadır. 90 derecelik dönme merkezleri yansıma eksenleri üzerinde bulunmamaktadır. Buna ek olarak 4 yönde ötelemeli yansımalar bulunmaktadır.

$p3$ simetri grubunda 120 derecelik dönmeler bulunmaktadır. Yansımalar ve ötelemeli yansımalar bulunmamaktadır.

$p3m1$ grubu yansımalar, ötelemeli yansımalar ve 120 derecelik dönmeler içermektedir. Yansıma eksenleri $P31m$ grubunda olduğu gibi birbirleriyle 60 derecelik açılar yapmaktadır. Ancak bu grupta bütün dönme merkezleri yansıma eksenleri üzerinde yer almaktadır.

$p31m$ simetri grubunda birbirleriyle 60 derecelik açılar yapan yansıma eksenleri ve 120 derecelik dönmeler bulunmaktadır. Dönme merkezlerinin bir kısmı yansıma eksenlerinin üzerinde bulunmaktadır. Bu simetri grubunda ötelemeli yansımalar da bulunmaktadır.

$P6$ grubu, 60, 120 ve 180 derecelik dönmeler içermektedir. Bu simetri grubunda yansıma veya ötelemeli yansımalar bulunmamaktadır.

$p6m$ simetri grubunda 60, 120 ve 180 derecelik dönmeler ve yansımalar bulunmaktadır. Yansıma eksenleri dönme merkezlerinde kesişmektedir. 60 derecelik dönme merkezlerinde altı yansıma eksenini kesişmekte ve aralarında 30 derecelik açı yapmaktadır. Bu simetri grubunda ötelemeli yansımalar da bulunmaktadır (Lockwook ve Macmillan, 1978).

Düzlemsel Simetri Gruplarının Analizi: M.C. Escher

Hollandalı sanatçı Maurits Cornelis Escher (1898-1972); teknik ressam, kitap ressamı, duvar kilimi tasarımcısı, duvar ressamı ve baskı ressamıdır. Escher'in 1920'de eğitime başladığı Haarlem'deki Mimari ve Dekoratif Sanatlar Yüksek Okulu'ndaki grafik sanatları öğretmeni Samuel Jesserum de Mesquita, yeteneklerinin farkına varması ve geliştirmesi için destek olmuştur. Gençliğinde, çoğu alışılmadık bir perspektif kullanılarak çizilmiş manzara çalışmaları ve hayvan, bitki ve böcekleri konu alan çok sayıda taslak üzerinde çalışmıştır.

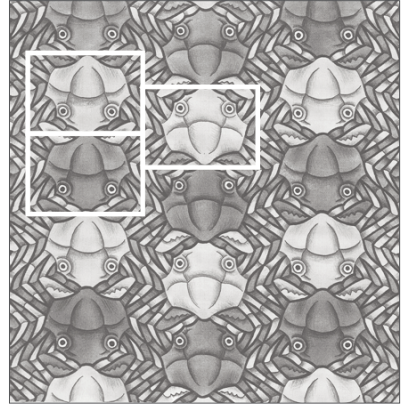
Escher'in matematikle tanışması, 1937'de çalışmalarını Leiden Üniversitesi'nde jeoloji profesörü olan kardeşi Berend'in inceleyip, ahşap baskıları ile kristalografi arasında bir bağ olduğunu görmesi ve bu konuda makale önermesiyle olmuştur. Escher, Pólya'nın 1924'de yazmış olduğu düzlemsel simetri grupları ile ilgili makalesindeki 17 düzlemsel simetri grubunu incelemiştir. George Pólya, karmaşık döngü analizi fizik

matematiği, olasılık teorisi, geometri ve kombinasyon teorisi ile ilgilenmiş ünlü bir matematikçidir. Escher'in ilgilendiği makalesinde; permütasyon gruplarının, organik kimyada izomerlerin türetilmesi için uygulanmasını anlatmakta ve çeşitli fonksiyonların ispatlarını yapmaktadır. Escher, kendisinin oluşturduğu tekniği kullanarak matematiksel yaklaşımı simetri çalışmalarına adapte etmiştir (İlter, 2003: 3).

Aşağıda Escher'in simetriyi kullanarak oluşturduğu çalışmalardan örnekler verilmiştir (Schattschneider, 2004: 106-115).



Resim 1: M.C. Escher, Fish/Boat, 1948

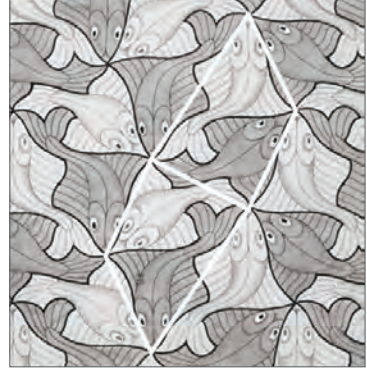


Resim 2: M.C. Escher, Flying Fish, 194

Resim 1 ve Resim 2, $p1$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara öteleme işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 3: M.C. Escher, Bird, 1937



Resim 4: M.C. Escher, Sea Horse, 1937

Resim 3 ve Resim 4, $p2$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 180 derecelik dönme işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 5: M.C. Escher, Winged Lion, 1945



Resim 6: M.C. Escher, Bird/Fish, 1961

Resim 5 ve Resim 6, pg simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.

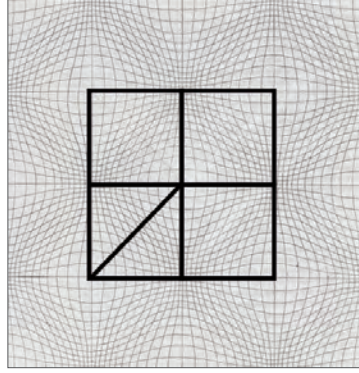


Resim 7: M.C. Escher, Bat, 1926



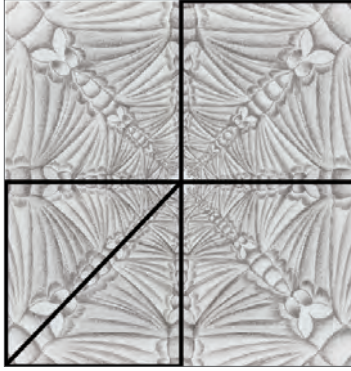
Resim 8: M.C. Escher, Beetle, 1953

Resim 7 ve Resim 8, cm simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara yansıma ve ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.

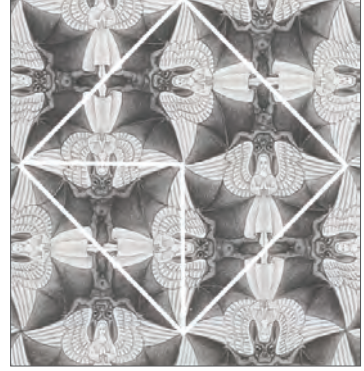


Resim 9: M.C. Escher, Bat/Bird/Bee, 1950

Resim 9, pmm simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara yansıma ve 180 derecelik dönme işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 10: M.C. Escher, Crab, 1963



Resim 11: M.C. Escher, Beetle, 1941

Resim 10 ve Resim 11, pmg simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara yansıma, ötelemeli yansıma ve 180 derecelik dönme işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 12: M.C. Escher, Two Fish, 1941



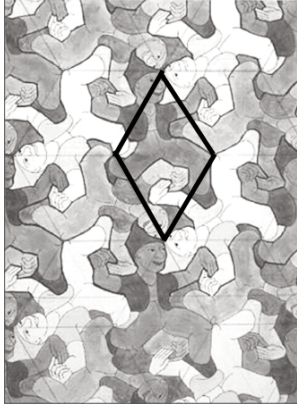
Resim 13: M.C. Escher, Lizard, 1965

Resim 12 ve Resim 13, pgg simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 180 derecelik dönme ve ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.

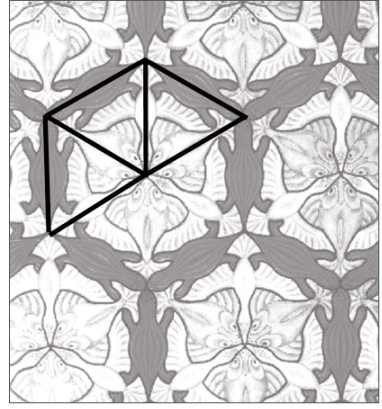


Resim 14: M.C. Escher, Overlapping Parallelograms, 1940

Resim 14, cmm simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 180 derecelik dönme, yansıma ve ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 15: M.C. Escher, Fish, 1964

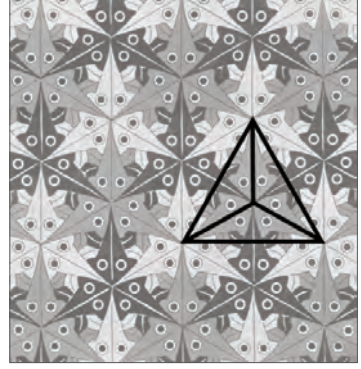


Resim 16: M.C. Escher, Fish, 1938

Resim 15 ve Resim 16, $p4$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 90 ve 180 derecelik dönme işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 17: M.C. Escher, Overlapping Curves, 1953

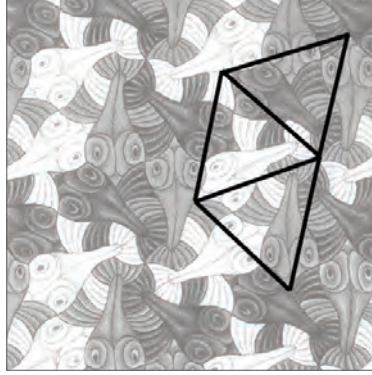


Resim 18: M.C. Escher, Moth, 1944

Resim 17 ve Resim 18, $p4m$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 90 ve 180 derecelik dönme, yansıma ve ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.

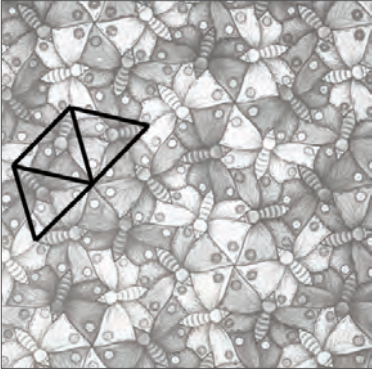


Resim 19: M.C. Escher, Angel-Devil, 1941

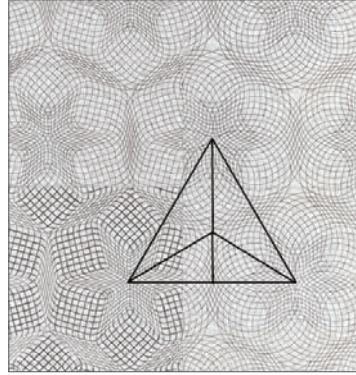


Resim 20: M.C. Escher, Bug, 1952

Resim 19 ve Resim 20, $p4g$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 90 ve 180 derecelik dönme, yansıma ve ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 21: M.C. Escher, Lizard, 1939

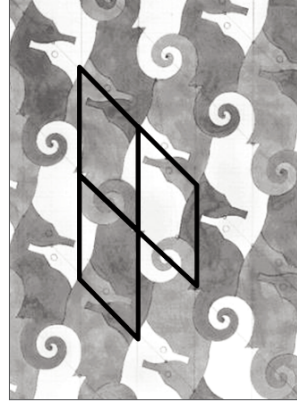


Resim 22: M.C. Escher, Imp, 1938

Resim 21 ve Resim 22, $p3$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 120 derecelik dönme işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 23: M.C. Escher,
Fish/Duck/Lizard, 1948

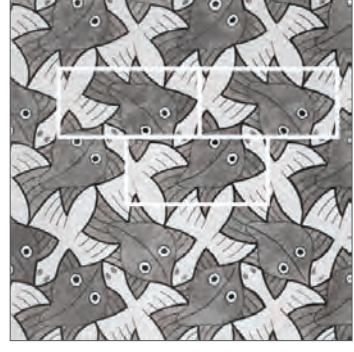


Resim 24: M.C. Escher,
Lizard/Fish/Bat, 1952

Resim 23 ve Resim 24, $p3m1$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 120 derecelik dönme, yansıma ve ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.

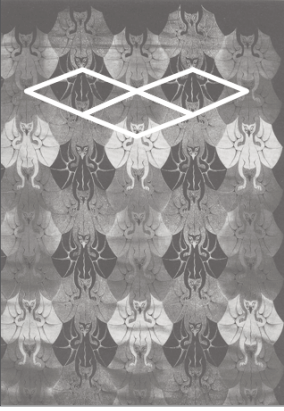


Resim 25: M.C. Escher, Fish, 1959



Resim 26: M.C. Escher, Two Clowns, 1942

Resim 25 ve Resim 26, $p31m$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 120 derecelik dönme, yansıma ve ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 27: M.C. Escher, Fish, 1942



Resim 28: M.C. Escher, Butterfly, 1948

Resim 27 ve Resim 28, $p6$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 60, 120 ve 180 derecelik dönme işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.



Resim 29: M.C. Escher, Overlapping Curves, 1953

Resim 29, $p6m$ simetri grubundadır. Resimlerdeki işaretli alanlara 60, 120 ve 180 derecelik dönme, yansıma ve ötelemeli yansıma işlemleri uygulanarak bütün oluşturulmuştur.

Escher, resimlerinde, bir ya da birkaç motifle, hiçbiri birbiri üstüne gelmeyecek ve aralarında boşluk kalmayacak şekilde örüntü oluşturmaya çalışmıştır. Bu yöntem matematikte düzlem doldurma

problemi ile benzerlik göstermektedir. Düzlem doldurma probleminde matematikçiler daha genel bir yaklaşımla bir düzlemde bulunan mozaik yapıdaki simetri gruplarını araştırmaktadırlar. Escher ise bu işlemi çeşitli hayvan figürlerini kullanarak fantastik bir şekilde oluşturmuştur.

3. Sonuç

İlk bakışta matematik ve sanat; malzemeleri, teknikleri, yöntemleri ve doğal olarak ürünleri birbirinden farklı iki alan olarak görünmektedir. Oysaki matematik de sanat da, diğer bilimler gibi, insanın yaşadığı ortamı anlama çabası sonucu doğmuştur. Zaman zaman doğaya aykırı görünseler de iki alan da doğanın soyutlaması, yorumu ve yeniden sunumudur. Sayılar ve denklemler doğada yoktur ama resimler ve heykeller gibi doğayı betimleyip yeniden sunmaktadırlar.

Escher'in yukarıda analizi yapılan çalışmalarında (Resim 1-29) şekiller kağıdı rastgele dolduruyorlar gibi görünseler de, her biri bir diğerinden oluşan boşluğu dolduracak şekilde yerleştirilmiştir. Bu düzen prensip olarak sonsuza kadar devam ettirilebilmektedir. Escher'in bir çok çalışmasında sonsuzluğun tek bir kağıdın sınırları içerisinde ifade edilebildiği görülmektedir. Escher, bir dörtgen içerisinde sonsuzluk yaratma çabasına sonraki çizimlerinde farklı yöntemlerle yaklaşmıştır. Her şeklin bir başkasının belli bir ölçeğe göre küçültülmüş ya da büyütülmüş hali olduğu, sürekli tekrarlanan "kendi-benzer" bir şekiller kümesi yaratmıştır.

Escher'in düzlem simetri gruplarını kullanarak oluşturduğu eserleri matematiksel sanat alanındaki çalışmalara öncülük etmiştir. Buna ek olarak, Escher'in iç içe geçmiş bezemelerle dolu olan çizimleri, düzlemsel simetri grupları alanında çalışan matematikçi ve kristalogların çalışmalarına da ilham vermeye devam etmektedir.

Kaynakça

Coxeter, H.S.M., Introduction to Geometry, John Wiley and Sons, New York, 1969.

Escher, Maurits Cornelis, The Official Website, (Erişim) <http://www.mcescher.com>, 25 Ocak 2011.

Hacısalıhoğlu, H. Hilmi, Hacıyev, A., Kalantarov, V., Sabuncuoğlu, Arif, Brown, L.M., İbikli, E., Brown S., Matematik Terimleri Sözlüğü, Türk Dil Kurumu Yayınları, Ankara, 2009.

İlter, H. Kemal, "Sanatsal Matematik: Bir Biyografi", Pivolka, sayı 5 ek, 2003: 1-9.

Lockwood, E.H., R.H. Macmillan, Geometric Symmetry, Cambridge University Press, New York, 1978.

Mainzer, Klaus, Symmetry and Complexity: The Spirit and Beauty of Nonlinear Science, World Scientific, Singapur, 2005.

Schattschneider, Doris, M.C. Escher Visions of Symmetry Second Edition, Thames&Hudson, London, UK, 2004.

Schattschneider, Doris, "The Plane Symmetry Groups: Their Recognition and Notation", American Mathematical Monthly, cilt 85, sayı 6, 1978: 439-450.

Türk Dil Kurumu, (Erişim) <http://tdk.gov.tr>, 01 Ekim 2011.