SAÜ. Fen Bil. Der. 17. Cilt, 1. Sayı, s. 113-118, 2013 SAU J. Sci. Vol 17, No 1, p. 113-118, 2013

Sabit olmayan ortalama eğrilikli timelike Bonnet yüzeyler

Soley Ersoy*, Kemal Eren[2]

[1*]Sakarya Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,Matematik Bölümü, SAKARYA
[2]Kabataş Lisesi, ORDU

02.05.2012 Geliş/Received, *13.12.2012 Kabul/Accepted*

ÖZET

Bu çalışmada, 3-boyutlu Minkowski uzayında [11]'de verilen bir timelike yüzeyin Bonnet yüzey olma kriteri göz önüne alındı ve [6]'da I. M. Roussos'un Öklid uzayında yaptığı sınıflandırmaya benzer şekilde Minkowski uzayında Bonnet yüzey olan timelike yüzeyler C_1, C_2 ve C_3 olmak üzere üç farklı sınıfta incelendi. C_1 de verilen timelike yüzeyler sabit ortalama eğrilikli olup bu durum [11]'de ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu çalışmada ise C_2 ve C_3 durumları incelerek sabit olmayan ortalama eğrilikli timelike yüzeylerin Bonnet yüzey olma kriteri belirlendi.

Anahtar Kelimeler: Timelike Bonnet yüzeyler, ortalama eğrilik, Gauss eğriliği, izometri

Timelike Bonnet surfaces with non-constant curvature

ABSTRACT

In this study, the criterion of a timelike surface being Bonnet surface in 3-dimensional Minkowski space given by [11] is taken into consideration and by a similar manner of the classification of surfaces in Euclidean space done by I. M. Roussos in [6], timelike surfaces as Bonnet surfaces are investigated in three class as C_1, C_2 and C_3. Timelike surfaces given in the case of C_1 have constant mean curvature and were investigated by a detailed way in [11]. In the present study, by investigating the cases of C_2 and C_3, a criterion of the timelike surfaces with non-constant mean curvature being Bonnet surfaces is determined.

Keywords: Timelike Bonnet surfaces, mean curvature, Gaussian curvature, isometry

* Sorumlu Yazar / Corresponding Author

1. GİRİŞ

3-boyutlu Öklid uzayında ortalama eğriliği koruyan bir izometrik deformasyon kabul eden yüzeye Bonnet yüzey adı verilir. Literatürde konu ile ilgili pek çok çalışma var olup ilk çalışma 1987 de O. Bonnet tarafından yapılmıştır. O. Bonnet, [1] de yüzeyin ortalama eğrilik korunarak izometrik olarak tasvir edilmesi probleminin genel halde çözülebilir olmadığını sabit ortalama eğrilikli yüzeylerin birbirine izometrik olarak tasvir edilebildiğini göstermiştir. Bu nitelikteki yüzeylerle ilgili daha detaylı sonuçları ise E.Cartan [2] çalışmasında elde etmiştir.
B. H. Lawson, Bonnet'in sonuçlarını sabit eğrilikli Riemann uzayında sabit ortalama eğrilikli yüzeylere genişletmiş ve sabit olmayan ortalama eğrilikli Bonnet yüzeylerin altı keyfi sabite bağlı olduğunu göstermiştir [3].

S. S. Chern asli eğrilikleri koruyan yüzeylerin izometrik deformasyonu için diferansiyel formlar yardımıyla bir karakterizasyon elde etmiştir [4].
Konu ile ilgili pek çok çalışması olan I. M. Roussos, sırasıyla, [5], [6] ve [7] çalışmalarında helikodial yüzey olan Bonnet yüzeyleri, tanjant açılabilir olan Bonnet yüzeyleri ve Bonnet yüzeyler üzerinde global sonuçları araştırmıştır. I. M. Roussos, Chern'in yöntemini kullanarak ortalama eğriliği koruyan izometri için bir karakterizasyon verilmiştir.

Z. Soyuçok bir yüzeyin Bonnet yüzey olması için özel bir izotermal parametreli sisteme sahip olmasının gerek ve yeter koşul olduğunu göstermiştir [8].

Ayrıca Z. Soyuçok bir diğer çalışmasında 4-boyutlu Öklid uzayında 3-boyutlu bir hiperyüzeyin Bonnet yüzeyi olması için gerek ve yeter koşulun ortogonal şebekeye sahip olması gerektiğini kanıtlamıştır [9].

Z. Soyuçok danışmanlığında H. Bağdatlı, bir hiperyüzeyin ortalama eğriliğini koruyan izometrisi problemini [10] doktora tezinde ele almıştır ve $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir hiperyüzeyin bir Bonnet hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter koşulun A-şebekesi adı verilen özel bir ortogonal şebekeye sahip olması gerektiğini göstermiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

$\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayı ve M de umbilik nokta içermeyen timelike yüzey olsun. $p \in M$ noktasında $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\}$ ortonormal vektörler olmak üzere $\vec{e_1}$ timelike vektör, $\vec{e_2}$ spacelike vektör ve $\vec{e_3}$ yüzeyin normal vektörü olsun., $\mathbb{R}_1^3$, 3-boyutlu Minkowski uzayında $\left\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right\}$ çatı alanının bağ formları w_j^i, $1 \le i, j \le 3$ ve dual 1-formları w^i, $1 \le i \le 3$, olmak üzere

$$\begin{aligned} dx &= w^1\vec{e_1} + w^2\vec{e_2} \\ d\vec{e_1} &= w_1^2\vec{e_2} + w_1^3\vec{e_3} \\ d\vec{e_2} &= w_2^1\vec{e_1} + w_2^3\vec{e_3} \\ d\vec{e_3} &= w_3^1\vec{e_1} + w_3^2\vec{e_2} \end{aligned} \qquad (2.1)$$

dır öyle ki $w_1^3 = w_3^1, w_2^3 = -w_3^2, w_1^2 = w_2^1$ eşitlikleri vardır [11].

M timelike yüzeyinin şekil operatörü $A: T_pM \to T_pM$ şeklinde verilsin. Bu durumda $A\vec{e_1} = -a\vec{e_1} - b\vec{e_2}$, $A\vec{e_2} = b\vec{e_1} - c\vec{e_2}$ yazılabilir. M timelike yüzeyin şekil operatörüne karşılık gelen matrisin reel öz vektörlerinin var olması için gerek ve yeter şart

$$\frac{(a+c)^2}{4} - (ac + b^2) \ge 0$$

ve

$$H^2 - K = \frac{(a-c)^2}{4} - b^2 \ge 0$$

olmasıdır, öyle ki $H = \frac{a+c}{2}$ ve $K = ac + b^2$, sırasıyla, ortalama eğrilik ve Gauss eğriliğidir [11]. Çalışmamızda aksi belirtilmedikçe $H^2 > K$ ve $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ asli vektörler kabul edeceğiz. Dolayısıyla $b = 0$ ve

$$\begin{aligned} w_1^2 &= hw^1 + kw^2 \\ w_1^3 &= -aw^1 \\ w_2^3 &= cw^2 \end{aligned} \qquad (2.2)$$

olur. Burada açıkça görebiliriz ki $\vec{e_1}$ ve $\vec{e_2}$ boyunca a ve c asli eğriliklerdir. $J = \frac{a-c}{2} > 0$ olsun. Ayrıca M yüzeyinin ortalama ve Gauss eğrilikleri, sırasıyla,

$$H = \frac{a+c}{2} \quad \text{ve} \quad K = ac \qquad (2.3)$$

dir. $\mathbb{R}_1^3$, de $\left\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}\right\}$ çatı alanının bağ formları w_j^i ve dual 1-formları w^i olmak üzere birinci ve ikinci tür Cartan yapı denklemleri

$$\begin{aligned} dw^1 &= w^2 \wedge w_2^1 \\ dw^2 &= w^1 \wedge w_1^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

ve

$$dw_1^2 = w_1^3 \wedge w_3^2 = -Kw^1 \wedge w^2 \tag{2.5}$$

$$dw_1^3 = w_1^2 \wedge w_2^3,\; dw_2^3 = w_2^1 \wedge w_1^3 \tag{2.6}$$

dir. Bu denklemler, sırasıyla, Gauss ve Codazzi denklemleri olarak adlandırılır [11].

Codazzi denklemlerinde (2.2) denklemleri yerine yazılırsa

$$dw_1^3 = hcw^1 \wedge w^2 \tag{2.7}$$

elde edilir. Ayrıca (2.2) nin ikinci denkleminin dış türevinde (2.2) ve (2.4) ün ilk eşitlikleri yerine yazıldığında

$$dw_1^3 = -da \wedge w^1 - ahw^2 \wedge w^1 \tag{2.8}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$dw_2^3 = -akw^2 \wedge w^1 \tag{2.9}$$

ve

$$dw_2^3 = dc \wedge w^2 + ckw^1 \wedge w^2 \tag{2.10}$$

elde edilir. Sırasıyla (2.7) ile (2.8) ve (2.9) ile (2.10) denklemleri eşitlenerek

$$\begin{aligned} \left(da + \left(a-c\right)hw^2\right) \wedge w^1 &= 0, \\ \left(dc + \left(c-a\right)kw^1\right) \wedge w^2 &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

bulunur. Bu son denklem düzenlenirse

$$\begin{aligned} da &= \left(c-a\right)\left(pw^1 + hw^2\right), \\ dc &= \left(a-c\right)(kw^1 + qw^2) \end{aligned} \tag{2.12}$$

eşitlikleri elde edilir. $dH = \dfrac{da+dc}{2}$ olduğu göz önüne alınarak son iki eşitlikten

$$2dH = \left(a-c\right)\left((k-p)w^1 + (q-h)w^2\right)$$

elde edilir. Burada u ve v fonksiyonları $u = k - p$ ve $v = q - h$ şeklinde tanımlanırsa

$$2dH = \left(a-c\right)(uw^1 + vw^2) \tag{2.13}$$

veya $dH = J(uw^1 + vw^2)$ bulunur. Ayrıca (2.12) de verilen eşitlikler

$$\begin{aligned} \frac{da}{a-c} &= \left(u-k\right)w^1 - hw^2, \\ \frac{dc}{a-c} &= kw^1 + (v+h)w^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

olarak düzenlenebilir. Böylece son iki eşitlik yardımıyla

$$d\ln\left(a-c\right) = \left(u-2k\right)w^1 - (v+2h)w^2 \tag{2.15}$$

bulunur. (2.13) denklemi dikkate alınırsa ve H nin gradiyenti

$$\nabla H = gradH = \frac{a-c}{2}(-u\vec{e_1} + v\vec{e_2})$$

olur. Buradan

$$\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 (-u^2 + v^2)$$

elde edilir, öyle ki

$$4\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle = \left(a-c\right)^2 (-u^2 + v^2) \tag{2.16}$$

veya

$$\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle = \left(H^2 - K\right)(-u^2 + v^2)$$

yazılabilir. Burada $\pm u \neq v$ olsun yani, ∇H null olmasın. $\varepsilon = sgn\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle = \pm 1$ olmak üzere

$$\varepsilon\left(-u^2 + v^2\right) = \frac{\left|\left\langle \nabla H, \nabla H \right\rangle\right|}{H^2 - K} = A^2$$

şeklinde yazılabilir. Hodge $*$ operatörü

$$*w^1 = w^2,\; *w^2 = w^1,\; *^2 = 1 \tag{2.17}$$

olarak tanımlıdır. Böylece (2.2) de verilen w_1^2 bağ formuna Hodge operatörü uygulanırsa

$$*w_1^2 = h*w^1 + k*w^2 = kw^1 + hw^2 \qquad (2.18)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \theta^1 &= uw^1 + vw^2, \\ \theta^2 &= vw^1 + uw^2 \end{aligned} \qquad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \alpha^1 &= uw^1 - vw^2, \\ \alpha^2 &= -vw^1 + uw^2 \end{aligned} \qquad (2.20)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} *\theta^1 &= u*w^1 + v*w^2 = vw^1 + uw^2 = \theta^2, \\ *\theta^2 &= v*w^1 + u*w^2 = uw^1 + vw^2 = \theta^1 \end{aligned} \qquad (2.21)$$

ve

$$\begin{aligned} *\alpha^1 &= u*w^1 - v*w^2 = -vw^1 + uw^2 = \alpha^2, \\ *\alpha^2 &= -v*w^1 + u*w^2 = uw^1 - vw^2 = \alpha^1 \end{aligned} \qquad (2.22)$$

eşitlikleri elde edilir. (2.21) nin ikinci eşitliği göz önüne alınarak (2.13) denklemi yeniden düzenlenirse

$$2dH = (a-c)\theta^1 \qquad (2.23)$$

olarak yazılabilir. Benzer şekilde (2.18) ve (2.20) yardımıyla (2.15) denklemi de

$$d\ln(a-c) = (uw^1 - vw^2) - 2(kw^1 + hw^2)$$

olarak düzenlenir. Dolayısıyla

$$d\ln(a-c) = \alpha^1 - 2*w_1^2 \qquad (2.24)$$

elde edilir.

3. MİNKOWSKİ UZAYINDA TİMELİKE BONNET YÜZEYLER

$\mathbb{R}_1^3$, Minkowski uzayında asli doğrultulara sahip olan bir diğer timelike yüzey $\bar{M}$ olsun öyle ki $\bar{M}$, M nin asli eğriliklerini koruyan bir izometrik deformasyonu olduğunu kabul edelim. $\bar{M}$ üzerinde ortonormal asli çatı alanı $\{\vec{\bar{e}}_1, \vec{\bar{e}}_2, \vec{\bar{e}}_3\}$ ve $\{\vec{\bar{e}}_1, \vec{\bar{e}}_2\}$ çatı alanına karşılık gelen dual asli çatı $\{\bar{w}^1, \bar{w}^2\}$ olmak üzere $\bar{M}$ nin birinci temel formu

$$-(\bar{w}^1)^2 + (\bar{w}^2)^2 = -(w^1)^2 + (w^2)^2 \qquad (3.1)$$

dır. $\vec{\bar{e}}_1$ ve $\vec{\bar{e}}_2$ boyunca asli eğrilikler, sırasıyla

$$\bar{a} = a, \ \bar{c} = c \qquad (3.2)$$

olup $b = 0$ dır. (3.1) denklemi ile verilen birinci temel formdan görülür ki $\bar{M}$ üzerinde

$$\begin{aligned} \bar{w}^1 &= \cosh\varphi w^1 + \sinh\varphi w^2, \\ \bar{w}^2 &= \sinh\varphi w^1 + \cosh\varphi w^2 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

olacak şekilde bir φ dönüşümü vardır. (3.3) denkleminin dış türevi alındığında

$$d\bar{w}^1 = \bar{w}^2 \wedge (-d\varphi + w_1^2)$$

ve

$$d\bar{w}^2 = \bar{w}^1 \wedge (-d\varphi + w_1^2)$$

elde edilir. Birinci tür Cartan yapı denklemleri yardımıyla

$$\bar{w}_1^2 = \bar{w}_2^1 = w_1^2 - d\varphi \qquad (3.4)$$

elde edilir. (2.24) denkleminden

$$d\ln(\bar{a} - \bar{c}) = \bar{\alpha}^1 - 2*\bar{w}_1^2$$

yazılabilir. (3.2) denkleminden $\bar{a} = a$ ve $\bar{c} = c$ olduğundan (2.24) ve son denklem yardımıyla $\alpha^1 - 2*w_1^2 = \bar{\alpha}^1 - 2*\bar{w}_1^2$ elde edilmiş olur. Bu son eşitliğe $*$ operatörü uygulandığında

$$*\alpha^1 - 2w_1^2 = *\bar{\alpha}^1 - 2\bar{w}_1^2$$

elde edilir. Burada $*\alpha^1 = \alpha^2, *\alpha^2 = \alpha^1, *^2 = 1$, olduğundan $\alpha^2 - 2w_1^2 = \bar{\alpha}^2 - 2\bar{w}_1^2$ bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa $2(\bar{w}_1^2 - w_1^2) = \bar{\alpha}^2 - \alpha^2$ yani $(\bar{w}_1^2 - w_1^2) = \frac{1}{2}(\bar{\alpha}^2 - \alpha^2)$ eşitliği elde edilir. Buradan (3.4) göz önüne alınırsa

$$d\varphi = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \bar{\alpha}^2) \qquad (3.5)$$

bulunur. (2.23) denklemine benzer şekilde $\bar{M}$ için $2dH = (\bar{\alpha} - \bar{c})\bar{\theta}^1$ verilebilir. (3.2) de göz önüne alınarak bu son eşitlik ile (2.23) karşılaştırılırsa $\bar{\theta}^1 = \theta^1$ bulunur. Böylece $\bar{u}\bar{w}^1 + \bar{v}\bar{w}^2 = uw^1 + vw^2$ yazılabilir. (3.3) denklemi dikkate alınarak

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u\cosh\varphi - v\sinh\varphi, \\ \bar{v} &= -u\sinh\varphi + v\cosh\varphi \end{aligned} \tag{3.6}$$

bulunur. (2.20) eşitliği dikkate alınarak $\bar{\alpha}^2 = -\bar{v}\,\bar{w}^1 + \bar{u}\,\bar{w}^2$ denkleminde (3.3) ve (3.6) denklemleri yerine yazılırsa

$$\bar{\alpha}^2 = \sinh 2\varphi\alpha^1 + \cosh 2\varphi\alpha^2 \tag{3.7}$$

elde edilir. $T = \coth\varphi$ olsun. T nin diferansiyeli alınırsa

$$dT = T\alpha^1 + \alpha^2 \tag{3.8}$$

bulunur. Bu toplam diferansiyel denklem izometrik deformasyonlar sonucu asli doğrultuların φ açısı kadar hiperbolik dönmesiyle sağlanır. Deformasyonun aşikâr olmaması için gerek ve yeter şart (3.8) denkleminin tam olarak integrallenebilir olmasıdır [11].

[11] de W. Chen ve H. Li tarafından timelike yüzeyin ortalama eğriliğini sabit kabul edilerek böyle bir yüzeyin timelike Bonnet yüzey olması ile ilgili aşağıdaki teoremi vermiştir.

Teorem 3.1. *$\mathbb{R}^3_1$ de $H^2 > K$ olmak üzere sabit ortalama eğrilikli tüm timelike yüzeyler bir parametreli aşikâr olmayan izometrik deformasyon ailesi altında ortalama eğriliği koruyorsa bu yüzeyler timelike Bonnet yüzey olur [11].*

Şimdi H nin sabit olma ve olmama durumlarını ayrı ayrı incelemek üzere

$$\begin{aligned} d\alpha^1 &= P\alpha^1 \wedge \alpha^2, \\ d\alpha^2 &= Q\alpha^1 \wedge \alpha^2 \end{aligned} \tag{3.9}$$

olacak şekilde P ve Q tanımlayalım. (3.8) denkleminin dış türevinde (3.9) eşitlikleri yazılırsa

$$(TP + Q - 1)\alpha^1 \wedge \alpha^2 = 0 \tag{3.10}$$

bulunur. Böylece yüzeyler

$C_1 : H =$ sabit olma durumu,

$C_2 : H \neq$ sabit, $P = 0$ ve $Q = 1$ olma durumu,

$C_3 : H \neq$ sabit, $P \neq 0$ ve $Q \neq 1$ olma durumu,

olacak şekilde sınıflandırmalar yapılarak üç farklı kategoride incelenebilir. Bu durumla ayrı ayrı incelenirse C_1, C_2 ve C_3 de durum aşağıdaki gibi olur.

C_1 de ortalama eğrilik sabit olduğundan (2.13) denkleminden $u = v = 0$ olduğu açıktır. Dolayısıyla (2.20) dan $\alpha^1 = \alpha^2 = 0$ dır. Sonuç olarak (3.8) denkleminden T nin sabit olduğu görülür. H nin sabit olması durumunda Bonnet'in E^3 de verdiği Bonnet teoreminin benzeri timelike Bonnet yüzeyler için [11] de incelenmiştir.

C_2 de ortalama eğriliğin sabitten farklı olup eğer, $P = 0$ ve $Q = 1$ ise (3.10) denklemi her T için sağlanır.

C_3 de ise ortalama eğrilik sabitten farklı iken $P \neq 0$ ve $Q \neq 1$ ise (3.10) denkleminde

$$T = \frac{1 - Q}{P} \tag{3.11}$$

elde edilir. Böylece (3.8) denkleminin bir tek çözümü vardır.

Şimdi sabit olmayan ortalama eğrilikli ve $gradH$ null olmayan timelike yüzeyleri incelemek üzere C_3 durumunu göz önüne alalım. (3.11) denklemindeki T, umbilik nokta olmayan yani $H^2 > K$ olan herhangi timelike yüzey için tam anlamıyla hesaplanabilir. Ancak ortalama eğriliği koruyan Φ non-trivial izometriyi elde etmek için T nin (3.8) denklemini sağlaması gerekir. Şöyle ki (3.11) denklemi (3.8) de yerine yazılırsa

$$d\left(\frac{1 - Q}{P}\right) = \left(\frac{1 - Q}{P}\right)\alpha^1 + \alpha^2 \tag{3.12}$$

elde edilir. Bu denklem C_3 deki timelike Bonnet yüzeyler için bir kriter oluşturur.

KAYNAKLAR

[1] BONNET, O., Mémoire sur la théorie des surfaces applicables, J. École Polytech. 42 (1867), 72-92.

[2] CARTAN, E., Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales, Bull. Sc. Math. 66 (1942), 1-30; reprinted in: Oeuvres Completes, Partie III, vol.2, 1591-1620.

[3] LAWSON, H. B., Complete minimal surface in S^3, Ann. of Math. (2), 92 (1970), 335-374.

[4] CHERN, S. S., Deformation of surfaces preserving principal curvature, Differ. Geo. and Complex Anal., H. E. Rauch Memorial volume, Springer-Verlag (1985) 155-163.

[5] ROUSSOS, I. M., The helicoidal surfaces as Bonnet surfaces, Tohoku Math. J. (2) 40 (1988), no. 3, 485–490.

[6] ROUSSOS, I. M., Tangent developable surfaces as Bonnet surfaces, Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 15 (1999), no. 2, 269–276.

[7] ROUSSOS, I. M., Global results on Bonnet surfaces, J. Geom. 65 (1999), no. 1-2, 151–168.

[8] SOYUÇOK, Z., The problem of non-trivial isometries of surfaces preserving principal curvatures, J. Geom. 52 (1995), no. 1-2, 173–188.

[9] SOYUÇOK, Z., The problem of isometric deformations of a Euclidean hypersurface preserving mean curvature, Bull. Tech. Univ. 49 (1996), no. 3-4, 551–562.

[10] BAĞDATLI, H., SOYUÇOK, Z., On the problem of isometry of a hypersurface preserving mean curvature, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. 117 (2007), no. 1, 49–59.

[11] CHEN, W., LI, H., On the classification of the timelike Bonnet surfaces, in: Geometry and Topology of Submanifolds, 10, Chern, S. Chen, W., Shelton Street, Covent Garden, London, (1999), 18-31.