LİNEER VE YARI-LİNEER DALGA DENKLEMLERİ İÇİN PHRAGMEN-LİNDELOF TİPİ KESTİRİMLER

Yalçın YILMAZ*

Özet - Bu çalışmada, bazı lineer ve yarı-lineer dalga denklemleri için çözümlerin asimptotik davranışları incelenmiştir. Bu amaçla, ifade edilen denklemlerin triviyal olmayan çözümleri için Phragmen-Lindelof tipi teoremler verilmiştir.

Anahtar kelimeler: Asimptotik davranış, Phragmen-Lindelof Prensibi, Uzaysal Kestirimler.

Abstract - In this work, asymptotic behaviour of the nontrivial solutions of some linear and semi-linear wave equations are studied. For this aim, for the solutions of the stated problems, Phragmen-Lindelof type theorems have been given.

Keywords: Asymptotic Behaviour, Phragmen-Lindelof Principle, Spatial Estimates.

I.GİRİŞ

İlk olarak yarı-lineer bir dalga denklemi için doğrusal olmayan sınır koşullu başlangıç-sınır değer probleminin çözümünün asimptotik davranışları incelenecektir. Sınırsız bölgeler için maksimum prensibi uygulanamayacağından bunun bir genişlemesi olarak ifade edilebilecek olan Phragmen-Lindelof prensibi, fonksiyonun büyümesine (growth) sonsuzda bazı kısıtlamalar getirmek suretiyle sınırsız bölgeler üzerindeki bir maksimum prensipler sınıfı olarak açıklanabilir. Bu durumda eğer sonsuzda bir asimptotik koşul tanımlanmışsa verilen fonksiyon üstel hızla sonsuza gidecektir, aksi durumda üstel hızla sıfıra gider.

Homogen olmayan sınır koşullu başlangıç-sınır değer problemleri için [1],[2],[3] deki çalışmalara bakılabilir.

II. Problem

Aşağıdaki başlangıç-sınır değer problemini ele alalım:

$$u_{tt} - \Delta u + |u_t|^2 u_t = 0 \;;\; x \in \Omega \;,\; t \geq 0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} + f(u) = 0 \;;\; x \in \Omega \qquad (2)$$

$$u|_{D_0} = 0 \;;\; x \in \partial\Omega \qquad (3)$$

$$u(x,0) = u_t(x,0) = 0 \,;\, x \in \Omega \qquad (4)$$

$$F(u) := \int_0^u f(\xi) d\xi \geq 0 \qquad (5)$$

Burada Ω bölgesi

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 : x_1 > 0, (x_2, x_3) \in D_{x_1}\}$$

şeklinde bir bölgedir ve $\partial\Omega$ da bölgenin yanal yüzeyi.

$\frac{\partial u}{\partial v} := \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial u}{\partial x_i}$ dışa doğru normal türevi gösterir.

Burada $\varepsilon > 0$ için a ve b keyfi olmak üz

$|ab| \leq \frac{\varepsilon}{2} |a|^2 + \frac{1}{2\varepsilon} |b|^2$ şeklindeki ağırlıklı Cauch

Schwarz eşitsizliği kullanılacaktır. Ayrıca aşağıd notasyonlar kullanı

$$\Omega_z = \Omega \cap \{x \in \Omega : 0 < x_1 < z\};$$

$$\partial\Omega_z = \{x \in R^3 : x' \in \partial D_{x_1}, 0 \leq x_1 \leq z\}.$$

Önce (1) denklemi u_t ile çarpılıp $L_2(\Omega_z)$ de inte edilirse

$$\frac{d}{dt}\{\frac{1}{2} \|u_t\|^2_{\Omega_z} + \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2_{\Omega_z} + \int_0^z \int_{D_\xi} F(u) ds d\xi\} + \|u_t\|^4_{4,\Omega_z} = \int_{D_z} u_t u_{x_1} dA$$

çıkar. Son denklem $e^{-\gamma t}$ ile çarpılıp yenid düzenlenirse

*Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü, Adapazarı

$$\frac{d}{dt}\{e^{-\gamma.t}(\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+\int_0^z\int_{\partial D_\xi}F(u)dsd\xi)\}$$
$$+\gamma e^{-\gamma.t}\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+$$
$$+\int_0^z\int_{\partial D_\xi}F(u)dsd\xi+\gamma^{-1}\|u_t\|^4_{4,\Omega_z}\}=e^{-\gamma.t}\int_{D_z}u_tu_{x_1}dA$$

bulunur. Cauchy- Schwarz eşitsizliği kullanılır ve $[0,T]$ aralığında t ye göre integre edilirse

$$e^{-\gamma.t}\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+\int_0^z\int_{\partial D_\xi}F(u)dsd\xi+$$
$$\gamma\int_0^T e^{-\gamma.t}\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+\int_0^z\int_{\partial D_\xi}F(u)dsd\xi+$$
$$\gamma^{-1}\|u_t\|^4_{4,\Omega_z}\}dt\le\frac{1}{2}\int_0^T e^{-\gamma.t}(\|u_t\|^2_{D_z}+\|\nabla u\|^2_{D_z})dt \tag{6}$$

ve sonra (6) da (5) kullanılır ve bazı terimler ihmal edilirse

$$\gamma\int_0^T e^{-\gamma.t}\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}\}dt$$
$$\le\frac{1}{2}\int_0^T e^{-\gamma.t}(\|u_t\|^2_{D_z}+\|\nabla u\|^2_{D_z})dt \tag{7}$$

elde edilir. Enerji fonksiyonu

$$E(z):=\int_0^T e^{-\gamma.t}(\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\|\nabla u\|^2_{\Omega_z})dt \tag{8}$$

şeklinde tanımlanırsa (7) den

$$E(z)\le\gamma^{-1}E'(z)$$

eşitsizliği çıkar.

Teorem 1. $u(x,t)$, (1)-(4) probleminin triviyal olmayan bir çözümü olsun. Bu durumda (5) koşulu sağlanırsa (8) ile tanımlanan $E(z)$ fonksiyonu üstel hızla sonsuza gider:

$$E(z)\ge E(0)e^{\gamma.z} \tag{9}$$

İspat. Yukarıdaki işlemler yapılıp (9) eşitsizliği elde edilirse, buradan integrasyonla istenen sonuç elde edilir.

III. Homogen Sınır Koşullu Problem

$$u_{tt}-\Delta u+|u_t|^2u_t=0;\quad x\in\Omega,\ t\ge 0 \tag{10}$$
$$u\big|_{\partial\Omega}=0\ ;\quad t\ge 0 \tag{11}$$
$$u\,|_{D_0}=g(x',t)\ ;\ t\ge 0 \tag{12}$$
$$u(x,0)=u_t(x,0)=0\,;x\in\Omega \tag{13}$$

$R_z=\Omega\cap\{x\in\Omega: z<x_1<\infty\}$ olmak üzere yukarıdaki problemde azalım (decay) kestirimi elde etmek için yine (10) denklemi u_t ile çarpılıp $L_2(R_z)$ ye göre integre edilirse

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|^2_{R_z}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u\|^2_{R_z}$$
$$-\int_{\partial R_z}u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}ds+\|u_t\|^4_{4,R_z}=0$$
$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|u_t\|^2_{R_z}+\|\nabla u\|^2_{R_z}\}+\|u_t\|^4_{4,R_z}=\int_{D_z}u_tu_{x_1}dA \tag{14}$$

bulunur. (14), $e^{-\gamma.t}$ ile çarpılıp yeniden düzenlenirse

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{e^{-\gamma.t}(\|u_t\|^2_{R_z}+\|\nabla u\|^2_{R_z})\}+$$
$$\left\{\frac{\gamma}{2}e^{-\gamma.t}(\|u_t\|^2_{R_z}+\|\nabla u\|^2_{R_z})\right\}+e^{-\gamma.t}\|u_t\|^4_{4,R_z}$$
$$\le\left\{\frac{1}{2}e^{-\gamma.t}(\|u_t\|^2_{D_z}+\|\nabla u\|^2_{D_z})\right\} \tag{15}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu son denklem [0,T] de t ye göre integre edilip bazı terimler ihmal edilirse

$$\frac{\gamma}{2}\int_0^T e^{-\gamma.t}\{\|u_t\|^2_{R_z}+\|\nabla u\|^2_{R_z}\}dt\le$$
$$\le\int_0^T e^{-\gamma.t}\{\|u_t\|^2_{D_z}+\|\nabla u\|^2_{D_z}\}dt \tag{16}$$

bulunur. Buradaki enerji fonksiyonu

$$\hat{E}(z)=\int_0^T e^{-\gamma.t}\{\|u_t\|^2_{R_z}+\|\nabla u\|^2_{R_z}\}dt$$

şeklinde tanımlanırsa (16) dan

$$\hat{E}(z)+\frac{1}{\gamma}\hat{E}'(z)\leq 0 \tag{16'}$$

eşitsizliği çıkar. Buradan aşağıdaki teorem ifade edilir:

Teorem 2. $u(x,t)$; (10)-(13) probleminin triviyal olmayan bir çözümü olsun. Ω bölgesindeki toplam enerji sonlu ise bu durumda $\hat{E}(z)$ fonksiyonu üstel hızla sıfıra gider:

$$\hat{E}(z)\leq\frac{\hat{E}(0)}{e^{\gamma . z}} \tag{17}$$

İspat. Teorem 1 in ispatında olduğu gibi (16') eşitsizliği elde edildikten sonra z ye göre integre edildiğinde (17) ifadesi kolayca elde edilir.

IV. Homogen Olmayan Sınır Koşullu Problem

Bu kısımda homogen fakat Neumann tipi sınır koşuluna sahip bir dalga denklemi için çözümlerin asimptotik davranışı incelenecektir. Bu problemde denklemin tanımlandığı bölge kesitlerinin değişimi sınırlı olan bir bölge olup bu (F3) koşuluyla ifade edilmiştir. Bu durumda aşağıdaki problemi ele alalım:

$$u_{tt}-\Delta u+\alpha u_t=0;\quad x\in\Omega,\ t\geq 0 \tag{18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\beta\frac{\partial u}{\partial t}+f(u)=0;\quad x\in\partial\Omega,\ t\geq 0 \tag{19}$$

$$u=0;\quad x\in D_0,\ t\geq 0 \tag{20}$$

$$u(x,0)=u_t(x,0)=0;\ x\in\Omega \tag{21}$$

$$F(u)=\int_0^u f(\xi)d\xi\geq\gamma u f(u);\ \gamma>0,\ \forall u\in R \tag{F1}$$

$$uf(u)\geq\eta\,|u|^{2p};\ 2p>1,\ \eta>0,\ \forall u\in R \tag{F2}$$

Ω bölgesi; D_z kesitlerinin ∂D_z sınırları yeterince düzgün olan önceki kısımlarda tanımlandığı gibi bir bölgedir ve bu kesitler

$$0<m_0<\inf_z|D_z|\leq\sup_z|D_z|\leq m_1<\infty, \tag{F3}$$

$\forall z\in R^+$

koşulunu sağlar, yani D_z lerin değişim aralığı sonludur. Burada D_0; $x_2 0 x_3$ düzlemindeki kesit olmak üzere α ve β pozitif sabitlerdir.

$\varepsilon>0$ olmak üzere (18) denklemi $u_t+\varepsilon u$ ile çarpıl $L_2(\Omega_z)$ de integre edilsin. Bu durumda

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+2\varepsilon(u,u_t)_{\Omega_z}+\varepsilon\alpha\|u\|^2_{\Omega_z}$$

$$+(\alpha-\varepsilon)\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\varepsilon\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}=$$

$$=\int_{\partial\Omega_z}u_t\frac{\partial u}{\partial\nu}ds+\varepsilon\int_{\partial\Omega_z}u\frac{\partial u}{\partial\nu}ds$$

bulunur, yeniden düzenlenirse

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+2\varepsilon(u,u_t)_{\Omega_z}+\varepsilon\alpha\|u\|^2_{\Omega_z}$$

$$(\alpha-\varepsilon)\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\varepsilon\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+\beta\int_0^z\int_{\partial D_\xi}u_t^2 dsd\xi+$$

$$\int_0^z\int_{\partial D_\xi}uf(u)dsd\xi+\varepsilon\beta\int_0^z\int_{\partial D_\xi}uu_t dsd\xi+\varepsilon\int_0^z\int_{\partial D_\xi}uf(u)dsd\xi$$

$$=\int_{D_z}u_t u_1 da+\varepsilon\int_{D_z}uu_1 da$$

veya

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+\varepsilon(u,u_t)_{\Omega_z}+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\|u\|^2_{\Omega_z}\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon\beta}{2}\int_0^z\int_{\partial D_\xi}u^2 dsd\xi+\int_0^z\int_{\partial D_\xi}F(u)dsd\xi\right\}+$$

$$(\alpha-\varepsilon)\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\varepsilon\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+\beta\int_0^z\int_{\partial D_\xi}u_t^2 dsd\xi+$$

$$+\int_0^z\int_{\partial D_\xi}uf(u)dsd\xi=\int_{D_z}u_t u_1 da+\varepsilon\int_{D_z}uu_1 da \tag{22}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte parantezin içindeki ifadeyi alttan sınırlamak gerekirse aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliğinden

$$\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{\Omega_z}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{\Omega_z}+\varepsilon(u,u_t)_{\Omega_z}+\frac{\varepsilon\alpha}{2}\|u\|^2_{\Omega_z}$$

$$+\frac{\varepsilon\beta}{2}\int_0^z\int_{\partial D_\xi}u^2 dsd\xi+\int_0^z\int_{\partial D_\xi}F(u)dsd\xi\geq$$

$$\geq \frac{1-\varepsilon\delta}{2} \| u_t \|^2_{\Omega_z} + \frac{1}{2} \| \nabla u \|^2_{\Omega_z} + \left(\frac{\varepsilon\alpha}{2} - \frac{\varepsilon}{2\delta}\right) \| u \|^2_{\Omega_z}$$

$$+ \int_0^z \int_{\partial\Omega_\xi} F(u) ds d\xi + \frac{\varepsilon\beta}{2} \int_0^z \int_{\partial\Omega_\xi} u^2 ds d\xi$$

elde edilir. Son eşitsizlik (22) de yerine konur, [0,T] aralığında t ye göre integre edilir ve δ uygun seçilip bazı terimler ihmal edilirse

$$(\alpha - \varepsilon) \int_0^T \| u_t \|^2_{\Omega_z} dt + \varepsilon \int_0^T \| \nabla u \|^2_{\Omega_z} dt +$$

$$\varepsilon \int_0^T \int_0^z \int_{\partial D_\xi} u f(u) ds d\xi dt + \beta \int_0^T \int_0^z \int_{\partial D_\xi} u_t^{\,2} ds d\xi dt$$

$$\leq \int_{D_z} u_t u_1 da + \varepsilon \int_{D_z} u u_1 da \tag{23}$$

eşitsizliği çıkar. Buradan sağ taraftaki integraller için [4] de olduğu gibi Poincare ve Cauchy eşitsizlikleri yardımıyla birer üst sınır bulunur ve β nın pozitif olduğu gözönüne alınırsa (23) den

$$(\alpha - \varepsilon) \int_0^T \| u_t \|^2_{\Omega_z} dt + \varepsilon \int_0^T \| \nabla u \|^2_{\Omega_z} dt +$$

$$\varepsilon \int_0^T \int_0^z \int_{\partial D_\xi} u f(u) ds d\xi dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^T \| u_t \|^2_{D_z} dt + \int_0^T \| \nabla u \|^2_{D_z} dt + M_1 \varepsilon \int_0^T \| \nabla u \|^2_{D_z} dt \right)$$

$$+ M_2 C \varepsilon N_1(p) \left\{ \int_0^T \left(\int_{\partial D_z} u f(u) ds + \frac{1}{2} \| \nabla u \|^2_{D_z} \right) dt \right\}^{p+1/2p}$$

elde edilir. Burada M_1, M_2; p ve bölgeye bağlı sabitler olmak üzere $\varepsilon = \alpha / 2$ seçilirse

$$\int_0^T \| u_t \|^2_{\Omega_z} dt + \int_0^T \| \nabla u \|^2_{\Omega_z} dt + \int_0^T \int_0^z \int_{\partial D_\xi} u f(u) ds d\xi dt \leq$$

$$\alpha^{-1} \left(\int_0^T \| u_t \|^2_{D_z} dt + \left(M_1 \frac{\alpha}{2} + 1\right) \int_0^T \| \nabla u \|^2_{D_z} dt + \int_0^T \int_{\partial D_z} u f(u) ds d\xi dt \right)$$

$$+ M_2 C \alpha N_1(p) \left(\int_0^T \| u_t \|^2_{D_z} dt + \int_0^T \| \nabla u \|^2_{D_z} dt + \int_0^T \int_{\partial D_z} u f(u) ds d\xi dt \right)^{p+1/2p} \tag{24}$$

bulunur.

$$E(z) := \int_0^T \| u_t \|^2_{\Omega_z} dt + \int_0^T \| \nabla u \|^2_{\Omega_z} dt + \int_0^T \int_0^z \int_{\partial D\xi} u f(u) ds d\xi dt$$

şeklinde tanımlanırsa (24) eşitsizliği

$$E(z) \leq \alpha^{-1} E'(z) + + M_2 C \alpha N_1(p) \left(E'(z)\right)^{p+1/2p} \tag{25}$$

haline dönüşür. Şimdi aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma[5] Φ fonksiyonu $\Phi(0) = 0, \lim_{\tau \to \infty} \Phi(\tau) = +\infty$ koşullarını sağlayan monoton artan bir fonksiyon olsun. Bu durumda $z(\tau) \leq \Phi(z'(\tau)), \tau > 0$ koşulunu sağlayan $z(\tau) > 0$ fonksiyonu $\tau \to \infty$ iken $+\infty$ a gider:

(i) Belli bir c ve $m > 1$ için eğer $\Phi(\tau) \leq c\tau^m$ ise bu durumda $\liminf_{z \to \infty} z(\tau)\tau^{-m/m-1} > 0$ eşitsizliği sağlanır.

(ii) Belli bir c ve $\tau \geq \tau_1$ için $\Phi(\tau) \leq c\tau$ ise bu durumda $\liminf_{z \to \infty} z(\tau) e^{-\tau / c_1} > 0$ eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3. $u(x,t)$, (18)-(21) probleminin triviyal olmayan bir çözümü olsun. $f(u)$ doğrusal olmayan fonksiyonu ise (F1) ve (F2) koşullarını sağlasın. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler geçerlidir:

$$\liminf_{z\to\infty} z^{-\frac{p+1}{1-2p}} E(z) > 0, \qquad \frac{1}{2} < p < 1 \text{ ise}$$

$$\liminf_{z\to\infty} e^{-z/c} E(z) > 0, \qquad p \geq 1 \text{ ise.}$$

Burada $c^{-1} = \dfrac{2 + M_1\alpha}{2\alpha} + M_2 C N_1(p)$ dır.

İspat. (25) eşitsizliği elde edildikten sonra Ladyzhenskaya-Solonnikov [5] lemması yardımıyla istenen sonuçlar elde edilir.

V. Sonuç

Bu çalışmada farklı yapıdaki dalga denklemleri için asimptotik davranışlar incelenmiştir. Denklemin lineer olup olmamasına göre çözümlerin uzay değişkenine göre davranışı oldukça değişmektedir. Ayrıca nonlineerliğin, denklemde veya sınır koşulunda olmasına göre de çözümlerin davranışı farklılık arz etmektedir.

KAYNAKLAR

[1] R. Quintanilla, A Spatial Decay Estimate for the Hyperbolic Heat equation, SIAM J. MATH. ANAL. Vol.27, No. 1, pp. 78-91, January 1996.

[2] C. O. Horgan and L. E. Payne, Phragmen-Lindelof Type Results for Harmonic Functions with Nonlinear Boundary Conditions, Arch. Rattional Mech. Anal. 122 (1993) 123-144.

[3] J. K. Knowles, On the Spatial Decay of Solutions of the Heat Equation, J. Appl. Math. Phys. 22 (1971) pp. 1050-1056.

[4] A. O. Çelebi and V. K. Kalantarov, Spatial Behaviour Estimates for the Wave Equation under Nonlinear Boundary Condition, Lectures Notes on Computer Sciences, Vol. 2260, p. 20-26, 2001.

[5] O. A. Ladyzenskaya and V. A. Solonnikov, Determination of Solutions of Boundary Value Problems for Stationary Stokes and Navier-Stokes Equations Having an Unbounded Dirichlet Integral, Zap. Nauch. Semin. LOMI, 96 (1980), 117-160.