FAZ ALAN DENKLEMLERİNİN ÇÖZÜMLERİNİN LİNEER OLMAYAN TERİMİN KATSAYISINA SÜREKLİ BAĞIMLILIĞI

Şevket GÜR*

Özet- **Bu çalışmada $n \leq 3$ olması durumunda Faz Alan denklemlerinin çözümünün lineer olmayan terimin katsayısına sürekli bağımlılığı incelenmiştir.**

Anahtar Kelimeler- **Faz alan denklemi, sürekli bağımlılık.**

Abstract- **In this paper, continuous dependence of solutions of phase-field equations on the nonlinear coefficient for $n \leq 3$ is investigated.**

Keyword-**Phase field equation, continuous dependence**

I.GİRİŞ

$$\tau\phi_t(x,t) - \xi^2\Delta\phi(x,t) + a(\phi^3 - \phi) = \\ = 2u(x,t) + h_1(x,t) \qquad (x,t) \in Q_T \qquad (1)$$

$$u_t(x,t) + \tfrac{l}{2}\phi_t(x,t) = K\Delta u(x,t) + h_2(x,t) \\ (x,t) \in Q_T \qquad (2)$$

$$\phi\big|_\Gamma = \phi_\partial(x,t),\ u\big|_\Gamma = u_\partial(x,t) \\ (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T] \qquad (3)$$

$$\phi(x,0) = \phi_0(x),\ u(x,0) = u_0(x) \\ x \in \Omega \qquad (4)$$

problemini ele alalım. Burada $Q_T = \Omega \times (0,T]$, $\Omega \subset R^n$ $n \geq 1$ yeterince düzgün $\partial\Omega$ sınırına sahip sınırlı bir bölge, $\Gamma = \partial\Omega \times (0,T]$, $\phi_0, u_0, \phi_\partial$, u_∂, h_1, h_2 ise verilmiş fonksiyonlardır. ξ, τ, l ve K ise incelenen materyalin özelliğine bağlı olarak değişen pozitif parametreler olup, sırasıyla uzunluk ''skalası'' nı, ''dinlenme'' zamanını, erime ya da donma ısısını ve ısı iletkenliğini karakterize etmektedirler. $a > 0$ sayısı prosese bağlı parametredir.

Faz geçişleri teorisinin esas modellerinden biri olan faz alan denklem sistemi ile ilgili çalışmalar çok uzun yıllardan beri devam etmektedir. Bu çalışmada gözönüne aldığımız matematiksel model ile ilgili çalışmalar ise 1980 li yıllarda başlamıştır. [1] de G.Çağınalp problemin matematiksel modelini bulmuş ve problemin çözümünü elde etmiştir. [2] de Brochet, Hilhorst ve Chen (1)-(2) yi homogen, (3) sınır koşulunu homogen Neumann koşulu olarak almışlar ve $(\phi_0, u_0) \in (L_2(\Omega))^2$ olması durumunda problemin iyi konulmuş olduğunu ispat etmişlerdir. [3] de Kalantarov (3) ve (4) sınır koşullarını homogen olarak almış ayrıca h_1 ve h_2 fonksiyonlarını sadece x'e bağlı olarak alarak problemin çözümünün varlığını ,tekliğini, başlangıç verilerine sürekli bağımlılığını ve attractorun varlığını göstermiştir.

Konu ile ilgili son zamanlarda yapılan bir diğer çalışma ise 2002 yılında W. Shen ve S. Zheng tarafından yapılmış ve faz alan modellerinden biri olan Penrose-Fife tipindeki denklem sistemi incelenmiştir. Bu çalışmada W. Shen ve S. Zheng bir boyutlu durumda faz alan modellerinden biri olan Penrose-Fife tipindeki

$$\phi_t = K_1 D^2\phi + \phi - \phi^3 + (a\phi + b)u \qquad \Omega = (0,1), \\ t \in R^+$$

$$u_t + u^2(a\phi + b)\phi_t = u^2 D^2 u \qquad \Omega = (0,1),\ t \in R^+$$

$$(D\phi)\big|_{x=0,1} = (Du)\big|_{x=0,1} = 0$$

$$\phi\big|_{t=0} = \phi_0(x),\ u\big|_{t=0} = u_0(x) > 0$$

problemini gözönüne alarak, $K, a > 0$ koşulu altında çözümün davranışını incelemişlerdir [6]. Bu problemin çözümünün varlığı ise S. Zheng (1992) ve S. Zheng , S. Luckhaus (1994) tarafından yapılan çalışmalarda gösterilmiştir.

*Sakarya Üniversitesi, Matematik Bölümü, sgur@sakarya.edu.tr

Bu çalışmada ise [1] de incelenen problemdeki lineer olmayan terim göz önüne alınmış ve bu terimin katsayısına sürekli bağımlılık incelenmiştir: $a>0$ sayısı prosese bağlı bir parametre idi. Bu durumda "Bu parametrede küçük değişiklikler olduğunda problemin çözümünde ne gibi değişiklikler meydana gelir?" sorusuna cevap aramak gerekmektedir. Eğer ele alınan problemin çözümleri bu parametreye sürekli bağımlı ise parametrede küçük değişiklikler olduğunda problemin çözümünde de küçük değişiklikler olacaktır. Böylece materyalin özellikleri değişse bile yeni problemin çözümünün nasıl olabileceği tahmin edilebilir.

II. SÜREKLİ BAĞIMLILIK

TEOREM . (1)-(4) probleminin

$$V(Q_T)=W_2^1(0,T;L_2(\Omega))\cap L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap$$
$$\cap\left\{v(x,t)\,\middle|\,v(x,0)=v_0(x),\ v|_\Gamma=v_\partial\right\}$$

olmak üzere $V(Q_T)\times V(Q_T)$ sınıfından olan çözümü ([4],[5],[6]) a katsayısına sürekli bağımlıdır.

İSPAT. Farklı a_1 ve a_2 katsayıları için (1)-(4) probleminin çözümlerini $\{\phi_1,u_1\}$ ve $\{\phi_2,u_2\}$ olarak alalım. Bu durumda $\phi_1-\phi_2=\varphi$ ve $u_1-u_2=u$ olmak üzere $\{\varphi,u\}$ için

$$\tau\varphi_t-\xi^2\Delta\varphi+a_1(\phi_1^3-\phi_1)-a_2(\phi_2^3-\phi_2)=2u \tag{5}$$

$$u_t+\tfrac{l}{2}\varphi_t=K\Delta u \tag{6}$$

$$\varphi|_\Gamma=u|_\Gamma=0 \tag{7}$$

$$\varphi(x,0)=u(x,0)=0 \tag{8}$$

problemini alabiliriz. (5) denklemine $a_1(\phi_2^3-\phi_2)$ ifadesini ekleyip çıkaralım. $a=a_1-a_2$ ($a_1>a_2$ kabul edilebilir) alarak

$$\tau\varphi_t-\xi^2\Delta\varphi+a(\phi_2^3-\phi_2)+$$
$$+a_1[\varphi(\phi_1^2+\phi_1\phi_2+\phi_2^2)-\varphi]=2u \tag{5'}$$

$$u_t+\tfrac{l}{2}\varphi_t=K\Delta u \tag{6}$$

$$\varphi|_\Gamma=u|_\Gamma=0 \tag{7}$$

$$\varphi(x,0)=u(x,0)=0 \tag{8}$$

elde ederiz. Şimdi (5') denklemini $\varphi_t+\varphi$ ile (6) denklemini ise $\frac{2\tau}{l^2}u_t+\frac{4}{l}u$ ifadesi ile çarpalım ve Ω bölgesinde integrallerini alarak taraf tarafa toplayalım. Bu durumda :

$$\tau\|\varphi_t\|^2+\xi^2\|\nabla\varphi\|^2+\frac{4K}{l}\|\nabla u\|^2+\frac{2\tau}{l^2}\|u_t\|^2+$$
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi\|^2+\frac{2}{l}\|u\|^2+\frac{\tau}{2}\|\varphi\|^2+\frac{\tau K}{l^2}\|\nabla u\|^2\right]$$
$$\le a\int_\Omega|\phi_2^3-\phi_2||\varphi_t|dx+$$
$$a_1\int_\Omega|\varphi||\varphi_t||(\phi_1^2+\phi_1\phi_2+\phi_2^2)-1|dx+$$
$$a\int_\Omega|\phi_2^3-\phi_2||\varphi|dx+2(u,\varphi)+\frac{\tau}{l}|(\varphi_t,u_t)|+$$
$$+a_1\int_\Omega|\varphi||(\phi_1^2+\phi_1\phi_2+\phi_2^2)-1||\varphi|dx \tag{9}$$

elde edilir. (9) eşitsizliğinin sağ tarafında integral işareti altında bulunan terimlere Hölder ve Cauchy-Schwarz eşitsizliklerini uygulayalım:

$$a\int_\Omega|\phi_2^3-\phi_2||\varphi_t|dx\le a\|\phi_2\|\|\varphi_t\|+$$
$$+a\|\varphi_t\|\|\phi_2\|_{L_6}^3 \tag{10}$$

$$a_1\int_\Omega|\varphi||\varphi_t||(\phi_1^2+\phi_1\phi_2+\phi_2^2)-1|dx\le$$
$$\le a_1\|\varphi\|\|\varphi_t\|+a_1c_3c_1(t)\|\varphi_t\|\|\varphi\|_{L_6} \tag{11}$$

$$a\int_\Omega|\phi_2^3-\phi_2||\varphi|dx\le a\|\phi_2\|\|\varphi\|+$$
$$+a\|\varphi\|\|\phi_2\|_{L_6}^3 \tag{12}$$

$$a_1\int_\Omega|\varphi||(\phi_1^2+\phi_1\phi_2+\phi_2^2)-1||\varphi|dx\le a_1\|\varphi\|^2+$$
$$a_1c_3c_1(t)\|\varphi\|\|\varphi\|_{L_6} \tag{13}$$

Burada $c_1(t)$ verilen fonksiyonlara bağlıdır. Elde edilen bu eşitsizlikleri (9) da yerine yazalım. Bu durumda:

$$\tau\|\varphi_t\|^2+\xi^2\|\nabla\varphi\|^2+\frac{4K}{l}\|\nabla u\|^2+\frac{2\tau}{l^2}\|u_t\|^2+$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi\|^2+\frac{2}{l}\|u\|^2+\frac{\tau}{2}\|\varphi\|^2+\frac{\tau K}{l^2}\|\nabla u\|^2\right]$$

$$\leq a\|\phi_2\|\|\varphi_t\|+a\|\varphi_t\|\|\phi_2\|_{L_6}^3+a_1\|\varphi\|\|\varphi_t\|+$$

$$+a_1c_3c_1(t)\|\varphi_t\|\|\varphi\|_{L_6}+a\|\phi_2\|\|\varphi\|+a\|\varphi\|\|\phi_2\|_{L_6}^3+$$

$$+a_1\|\varphi\|^2+\frac{\tau}{l}|(\varphi_t,u_t)|+a_1c_3c_1(t)\|\varphi\|\|\varphi\|_{L_6}+$$

$$+2(u,\varphi) \tag{14}$$

elde edilir. (14) ün sağ tarafındaki terimlere Cauchy-Schwarz ve ε-Young eşitsizliklerini uygulayalım. ε un uygun şekilde seçilmesiyle ve $\|\varphi\|_{L_6}^2\leq c_2\|\nabla\varphi\|^2$ eşitsizliği yardımıyla

$$\frac{\tau}{4}\|\varphi_t\|^2+\frac{4K}{l}\|\nabla u\|^2+\frac{3\tau}{2l^2}\|u_t\|^2+$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi\|^2+\frac{2}{l}\|u\|^2+\frac{\tau}{2}\|\varphi\|^2+\frac{\tau K}{l^2}\|\nabla u\|^2\right]$$

$$\leq a_3(t)\|\nabla\varphi\|^2+a_4(t)\|\varphi\|^2+\|u\|^2+$$

$$+\left(\frac{8+\tau}{2\tau}\right)a^2\left[\|\phi_2\|^2+\|\phi_2\|_{L_6(\Omega)}^6\right] \tag{15}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $a_3(t)$ ve $a_4(t)$ verilen fonksiyonlara ve parametrelere bağlıdırlar.

$$\tilde{c}(t)=\max\left\{\frac{2a_3(t)}{\xi^2},\frac{2a_4(t)}{\tau},\frac{l}{2},1\right\}$$

ve

$$Y(t)=\frac{\xi^2}{2}\|\nabla\varphi\|^2+\frac{2}{l}\|u\|^2+\frac{\tau}{2}\|\varphi\|^2+\frac{\tau K}{l^2}\|\nabla u\|^2$$

alarak (15) eşitsizliğinden

$$\frac{dY(t)}{dt}\leq\tilde{c}(t)Y(t)+$$

$$+\left(\frac{8+\tau}{2\tau}\right)a^2\left[\|\phi_2\|^2+\|\phi_2\|_{L_6(\Omega)}^6\right] \tag{16}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu son eşitsizliğin her iki tarafını $e^{-\int_0^t\tilde{c}(s)ds}$ ile çarpalım ve $[0,t]$ de integre edelim. Bu durumda

$$Y(t)\leq$$

$$\leq e^{\int_0^t\tilde{c}(s)ds}\left(\frac{8+\tau}{2\tau}\right)a^2\left[\|\phi_2\|_{L_2(Q_t)}^2+\|\phi_2\|_{L_6(Q_t)}^6\right] \tag{17}$$

elde edilir. $\{\phi,u\}\in V(Q_T)\times V(Q_T)$ oldugundan ve Sobolev gömme teoremi yardımıyla (17) nin sağ tarafındaki $\|\phi_2\|_{L_2(Q_t)}^2+\|\phi_2\|_{L_6(Q_t)}^6$ teriminin sınırlı olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\|\phi_2\|_{L_2(Q_t)}^2+\|\phi_2\|_{L_6(Q_t)}^6\leq C(t)$$

olarak alınırsa (17) den

$$Y(t)\leq e^{\int_0^t\tilde{c}(s)ds}\left(\frac{8+\tau}{2\tau}\right)C(t)(a_1-a_2)^2$$

elde edilir. Bu son eşitsizlik yardımıyla da

$$A(T)=e^{\int_0^T\tilde{c}(s)ds}\left(\frac{8+\tau}{2\tau}\right)\int_0^T C(s)ds$$

olmak üzere

$$\|u_1-u_2\|_{C[0,T;W_2^1(\Omega)]}^2\leq A(T)(a_1-a_2)^2$$

ve

$$\|\phi_1-\phi_2\|_{C[0,T;W_2^1(\Omega)]}^2\leq A(T)(a_1-a_2)^2$$

eşitsizlikleri elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

III. SONUÇ

Bu ispat yardımıyla giriş kısmında sorulan soruya cevap verilmiş oldu. Yani a parametresinde küçük değişiklikler olduğunda problemin çözümünde de küçük değişiklikler meydana gelecektir.

KAYNAKLAR

[1] Caginalp, G. An analysis of a phase field model of a free boundary Arch. Rat. Mech. Anal.92, 205-245, 1986.

[2] Brochet, D., Hilhorst, D., Chen, X., Finite dimensional exponential attractor for the phase field model, Appl. Analysis, vol.49, 197-212, 1993.

[3] Kalantarov, V.K. On the minimal global attractor of a system of phase field equations, Zap.Nauchn.Semin. LOMI, 188, 70-86, 1991.

[4] Soltanov, K.N. On nonlinear equations of the form: $F(x;u;Du;\Delta u)=0$. Russian Acad. Sic. Sb. Math. 80.(1995) no:2 367-3923, 1995.

[5] Soltanov, K.N. Some imbedding theorems and nonlinear differential equations, Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. 19, 125-146, 1999.

[6] Gür, Şevket. Faz Alan Denklemleri için Başlangıç sınır değer problemlerinin çözümlerinin global davranışı. Doktora Tezi. Hacettepe Üniversitesi. 2004.

[7] Shen, W., Zheng, S., 2002, Maximal attractors for the phase field equations of penrose fife type, App. Math. Let.15, 1019-1023.