SÜREKLİ KESİRLER VE YAKINSAKLIKLARI

Serpil HALICI

Özet - **Birçok fonksiyon, bir sonsuz sürekli kesir yardımıyla temsil edilebilir. Literatürde sürekli kesirlerin çeşitli gösterimleri vardır. Bu farklı gösterimler yardımıyla, sürekli kesirlerin yakınsaklıklarını çalışmak biraz daha kolaylaşır. Bu çalışmada, özellikle sürekli kesrin pay ve paydasındaki farklı gösterimin avantajları üzerinde duruldu ve farklı çalışmalardan bahsedildi.**

Bir sürekli kesir kullanmak ; bir rasyonel fonksiyonun değerlendirilmesi sırasında pay ve paydanın hesabından, gerekli aritmetik işlemler bakımından, daha ekonomiktir. Son yıllarda sürekli kesir teorisi ile fazlaca ilgilenilmeye başlanıldı. Bunun sebebi ise, sürekli kesirlerin algoritmik karakterinin önemli sonucu ve yüksek hızlı dijital bilgisayarların avantajıdır. Diğer yandan ise, sürekli kesir yaklaşımlarının kompleks düzlemin daha geniş bölgelerinde yakınsak olabilmesi dir.

Anahtar Kelimeler - **Sürekli kesir, yakınsaklık ve ıraksaklık, kesirsel dönüşüm.**

Abstract - **Many functions can be represented by an infinite continued fraction. A continued fraction is an expression of the form which is often written in the compact form**

$$F(x)=P_0(x)+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)+}\frac{P_2(x)}{Q_2(x)+}\frac{P_3(x)}{Q_3(x)+\Lambda}$$

Normally the P_i and Q_i are simple functions such as linear functions or constants. In such a case it is clear that a finite, or truncated, continued fraction is equivalent to a rational function. This is, also true if each P_i and Q_i is a polynomial in x. In recent years there has been a renewed interest in the analytic theory of continued fractions. This is due in part to the advent of high-speed digital computers and the resulting importance of the algorithmic character of continued fractions.

Sakarya Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü, Sakarya,Shalici@sakarya.edu.tr

I. TEMEL TANIM VE ÖZELLİKLER

Matematik uygulamalarda ortaya çıkan özel fonksiyonların birçoğu; integraller, iterasyonlar, seriler gibi sonsuz yöntemler yardımıyla tanımlanmıştır. Sürekli kesir, bu sonsuz yöntemlerden biridir. Kabaca bir sürekli kesir,

$$b_0+\cfrac{a_1}{b_1+\cfrac{a_2}{b_2+\cfrac{a_3}{b_3+O}}}$$

biçimindedir. (a_i ve b_i sayıları sürekli kesrin elemanlarıdırlar ve genellikle reel yada kompleks sayılardır.) Bu kesir daha kısa ve daha kullanışlı olarak aşağıdaki gibi de yazılır:

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\Lambda \qquad (1)$$

Bir sürekli kesir örneği, Lambert(1770) tarafından verilmiş olan arctanx fonksiyonunun açılımıdır: $|x|\,\pi\,1$ olmak üzere,

$$\tan^{-1}x=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{4x^2}{5+\cfrac{9x^2}{7+\Lambda}}}}$$

biçimindedir.Bu denklemin sağ tarafı aşağıdaki gibi bir limiti temsil eder ve denklemdeki açılım, iyi tanımlı bir fn fonksiyonunu vermek için n.terimden sonra biter:

$$f_n(x)=\frac{x}{1+}\frac{x^2}{3+}\frac{4x^2}{5+}\frac{9x^2}{7+}\Lambda\frac{(n-1)^2x^2}{2n-1} \quad ;n\geq 2$$

Ayrıca buna sürekli kesrin n. yakınsaklığı denir. Bu son denklem,

$$\tan^{-1}x=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\ ;|x|\,\pi\,1$$

eşitliğini anlayabilmek için tanımlanmıştır.
Bu denklemin doğruluğu kabul edilirse, arctanx fonksiyonunun değerlerini hesaplayan bir alternatif metod elde edilmiş olur. Sürekli kesrin yakınsaklıkları,

$$\frac{A_0}{B_0}=b_0\ ;\ \frac{A_1}{B_1}=b_0+\frac{a_1}{b_1}=\frac{b_0b_1+a_1}{b_1}$$

$$\frac{A_2}{B_2}=b_0+\frac{a_1}{b_1+\frac{a_2}{b_2}}=\frac{b_0b_1b_2+a_2b_0+a_1b_2}{b_1b_2+a_2}$$

biçiminde yazılır. (1) deki sürekli kesir, sadece sonlu elemana sahipse; sonlu sürekli kesir denir. Ayrıca,

$$b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\Lambda\frac{a_n}{+b_n} \qquad (2)$$

kesrine de (1) deki sürekli kesrin (n+1). yakınsaklığı denir. Bir sürekli kesir hesaplama işi, bir seri hesabı kadar kolay değildir. Bir sonsuz seri durumunda, $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$, $S_{n+1}= S_n + a_{n+1}$ yardımıyla $S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$ kısmi toplamları bulunur.Bir sürekli kesir için benzer probleme dikkat edilirse;

$$C=\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\frac{a_3}{b_3+}\Lambda$$

Ardıl yakınsaklıkları bulmak için, bir ardıl algoritmaya ihtiyaç vardır:

$f_n(x)$ fonksiyonları,

$$f_n(x)=\frac{a_1}{b_1+}\Lambda\frac{a_{n-1}}{+b_{n-1}}\frac{a_n}{b_n+x}$$

biçiminde tanımlanırsa, $C_n=f_n(0)$ olduğu görülür.Sürekli kesir teorisinin çoğu, C kompleks düzleminde yer alır. Sürekli kesir algoritması bir K fonksiyonudur,öyleki K,

$$\langle\{a_n\},\{b_n\}\rangle,\ a_n\in C,\ a_n\neq 0, n\geq 1, b_n\in C, n\geq 0$$

olmak üzere, dizi çiftini bir başka üçüncü $\{f_n\}\in\hat{C}$ dizisi üzerine resmeder.($\hat{C}=C\cup[\infty]$) Sürekli kesrin kendisi, bir sıralı ikilidir:

$$\langle\langle\{a_n\},\{b_n\}\rangle,\{f_n\}\rangle \qquad (3)$$

$\{f_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır[1]:

$$s_n(w)=\frac{a_n}{b_n+w}\ ,n\geq 1\ ,\ s_0(w)=b_0+w$$

olmak üzere,singüler olmayan s_n lineer kesirsel dönüşümleri bakımından ikinci bir $\{S_n\}$ kesirsel dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlanırsa;

$$S_0(w)=s_0(w),\ S_n(w)=S_{n-1}(s_n(w)),\ n\geq 1, \qquad (4)$$

yazılır. Bu durumda;

$$f_n=S_n(0)\ ,\ n\geq 0$$

olur. a_n ve b_n sayılarına sırasıyla n.nci kısmi pay ve payda denildiği gibi, sürekli kesrin elemanları da denir. Dolayısıyla, f_n değerine de n.nci yaklaşım denir.Bir sürekli kesir için (3) deki gösterim yerine genellikle;

$b_0+K(a_n/\ b_n)$ yada; $b_0+\frac{a_1}{b_1+}\frac{a_2}{b_2+}\Lambda$ gösterimi kullanılır. Ayrıca,

$$S_n(w)=b_0+\frac{a_1}{b_1+}\Lambda\frac{a_n}{+b_n+w}$$

da yazılabilir.S_n e ek olarak, $m\geq 0, n\geq 0$ için S_n^{m} ifadesini, aşağıdaki gibi tanımlamak uygundur[2].

$$S_0^{(0)}(w)=w\ ,\ S_n^{(m)}(w)=S_{n-1}^{(m)}(s_{n+m}(w)),$$
$$m\geq 0, n\geq 1$$

$m\geq 0$ ve $n\geq 1$ için bu tanım aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$S_n^{(m)}(w)=s_{m+1}\,o\Lambda\,o s_{m+n}(w)$$

$S_n(w)$ bir lineer kesirsel dönüşüm olduğundan ve $S_n(\infty)=S_{n-1}(0)$ olduğundan aşağıdaki eşitlik,

$$S_n(w)=\frac{A_n+A_{n-1}w}{B_n+B_{n-1}w}\ ;\ n\geq 0$$

yazılır. Buradaki A_n, B_n değerleri aşağıdaki başlangıç şartlarını gerçekleyecek biçimde ve ikinci mertebeden fark denklemlerini sağlayacak biçimde seçilmiştir[2]:

$$A_{n-1}=1\ ,\ A_0=b_0\ ,\ B_{-1}=0\ ,\ B_0=1$$

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}$$

$$B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2} \quad ; \ n \geq 1$$

Bu son iki eşitlik, üç terimli recursion bağıntıları olarak bilinir.Bunlar, (4) eşitliklerinin sonucudur.Tekrarlı bağıntı, herbir katsayıyı kendinden önceki birkaç katsayı cinsinden verir:

n=1 için $A_1 = b_1 A_0 + a_1 A_{-1}$ ve n=2 için; $A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0$ gibi.

A_n ve B_n sırasıyla n.nci pay ve n.nci payda olmak üzere, f_n n.nci yaklaşımı $f_n = A_n / B_n$, $n \geq 0$ biçimindedir.

Lineer kesirsel dönüşümlerin bileşiminin determinantı, bunların ayrı ayrı determinantlarının çarpımı olarak yazılabileceğinden, bunun için önemli bir determinant formülü yazılabilir:

$$A_n B_{n-1} - A_{n-1} B_n = (-1)^{n-1} \prod_{k=1}^{n} a_k \quad ; \ n \geq 1$$

Eğer $\{f_n\}$ dizisi yakınsak ise; $b_0 + K(a_n / b_n)$ sürekli kesri de yakınsaktır[3]. Yakınsak bir sürekli kesrin değeri,

$$f = \lim_{n \to \infty} f_n$$

olur. Bir $g \in \hat{C}$ verildiğinde,

$$g^{(n)} = S_n^{-1}(g) \quad ; \ n \geq 0$$

ile tanımlanan $\{g_n\}$, $g_n \in \hat{C}$ dizisi, $b_0 + K(a_n / b_n)$ sürekli kesrinin bir kalan dizisidir. Dikkat edilirse, $g = b_0 + g^{(0)}$ dır. Eğer sürekli kesir, f ye yaklaşıyorsa bu durumda, $\{f^{(n)}\}$

$$f^{(n)} = S_n^{-1}(f) \quad ; \ n \geq 0$$

$b_0 + K(a_n / b_n)$ nin sağ kalan dizisi olur. $f = \lim_{n \to \infty} S_n(0)$ olduğundan aşağıdaki yazılabilir:

$$f^{(n)} = s_n^{-1} \circ \Lambda \ s_0^{-1}(\lim_{m \to \infty} s_0 \circ \Lambda \ \circ s_m(0))$$

$$= \lim_{m \to \infty} s_{n+1} \circ \Lambda \ \circ s_m(0) = \lim_{m \to \infty} S_{m-n}^{(n)}(0)$$

Üstelik;

$$f = S_n(f^{(n)}) \ , \quad n \geq 0$$

dır. Dikkat edilirse, gösterimde $f^{(0)} = f - b_0$ olur.

$h_n = -S_n^{-1}(\infty)$; $n \geq 1$ değeri,

$$h_n = \frac{B_n}{B_{n-1}} = b_n + \frac{a_n}{b_{n-1} +} \Lambda \frac{a_2}{+ b_1} \ ; \ n \geq 2, h_1 = b_1$$

ile verilir.

II. SONUÇLAR

Teorem:Tüm sürekli kesirler, aşağıdaki biçimde yazılabilen $b_0 + K(a_n / b_n)$ ifadesine denktir:

$$b_0 + \frac{\sigma_1 a_1}{\sigma_1 b_1 +} \frac{\sigma_1 \sigma_2 a_2}{\sigma_2 b_2 +} \Lambda \frac{\sigma_{n-1} \sigma_n a_n}{\sigma_n b_n +} \Lambda$$

Burada σ_n ler keyfi kompleks sayılardır[6].

Teorem: Bir sürekli kesrin n.nci yakınsaklığı için,

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \Lambda \frac{a_n}{+ b_n}$$

aşağıdaki formüller geçerlidir: $k \geq 2,3,\ldots$ için

$$A_k = b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}$$
$$B_k = b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}$$
$$A_0 = 0 \ , A_1 = a_1 \ , \ B_0 = 1 \ , \ B_1 = b_1$$

İspat: $f_n(z) = \dfrac{a_1}{b_1 +} \dfrac{a_2}{b_2 +} \Lambda \dfrac{a_n}{+ b_n + z}$ olsun.

$f_n(z) = \dfrac{A_{n-1} z + A_n}{B_{n-1} z + B_n}$ olduğunu görmek yeterlidir.

z=0 iken teoremdeki formül elde edilir. n=1 için

$$\frac{a_1}{b_1 + z} = \frac{A_0 z + A_1}{B_0 z + B_1}$$

olur. n-1 için formül doğru olsun.

$$f_{n-1}(z)=\frac{A_{n-2}z+A_{n-1}}{B_{n-2}z+B_{n-1}}$$

denkleminde z ile $a_n/(b_n+z)$ yer değiştirirse; sonuç,

$$f_{n-1}(z)=f_{n-1}\left(\frac{a_n}{b_n+z}\right)=\frac{A_{n-2}a_n+A_{n-1}b_n+A_{n-1}z}{B_{n-2}a_n+B_{n-1}b_n+B_{n-1}z}$$

$$=\frac{A_n+A_{n-1}z}{B_n+B_{n-1}z}$$

olur. Bu sürekli kesrin ardıl yakınsaklıkları,

$$\frac{A_n}{B_n}-\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}}=\frac{(-1)^{n-1}a_1a_2\Lambda\, a_n}{B_nB_{n-1}}$$

formülüyle bağlantılıdır[5].

Sonuç: Bu sürekli kesrin n.nci yakınsaklığı aşağıdaki gibi verilebilir:

$$\frac{A_n}{B_n}=\frac{a_1}{B_0B_1}-\frac{a_1a_2}{B_1B_2}+\frac{a_1a_2a_3}{B_2B_3}-\Lambda$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{a_1a_2\Lambda\, a_n}{B_{n-1}B_n}$$

Uygulamalı matematikte ortaya çıkan birçok önemli özel fonksiyon, sürekli kesirlere göre açılıma sahiptir. Aşağıdaki teorem, bir seriden, bir sürekli kesir elde edilebileceğini gösterir.

Teorem:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{x_k}=\frac{1}{x_1-}\frac{x_1^{\,2}}{x_1+x_2-}\frac{x_2^{\,2}}{x_2+x_3-}\Lambda\frac{x_{n-1}^{\,2}}{x_{n-1}+x_n-}\Lambda$$

Bu teoremin nasıl uygulanacağını göstermek için, arctanx fonksiyonunun Maclauin serisinden bir sürekli kesir oluşturulursa,

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\Lambda$$

$$=\frac{1}{x^{-1}}+\frac{1}{-3x^{-3}}+\Lambda=\frac{1}{x^{-1}-}\frac{(x^{-1})^2}{x^{-1}+(-3x^{-3})-(-3x^{-3})+}\Lambda$$

$$=\frac{x}{1+}\frac{-x^2}{x^2-3+}\frac{-9x^2}{-3x^2+5+}\Lambda$$

Buna benzer sayısal örnekler, sürekli kesir yakınsaklığının serilerden daha hızlı olduğunu gösterir. Sürekli kesirler,

$$f(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\Lambda$$

Maclaurin serisi yardımıyla

$$c_0+c_1z+c_2z^2+\Lambda=c_0+\frac{c_1z}{1+c_1^{(1)}z+c_2^{(1)}z^2+\Lambda}$$

$$=c_0+\cfrac{c_1z}{1+\cfrac{c_1^{(1)}z}{1+c_1^{(2)}z+c_2^{(2)}z^2+\Lambda}}$$

$$f(z)=c_0+\frac{c_1z}{1+}\frac{c_1^{(1)}z}{1+}\frac{c_1^{(2)}z}{1+}\Lambda$$

biçiminde yazılabilirler.

Teorem: Bu gösterime sahip olan sürekli kesir, her $c_1^{(j)}$ sıfırdan farklı olmak üzere bir Maclaurin açılımına sahiptir. Bu durumda kuvvet serisinin Pade yaklaşımları, aşağıdaki eşitlikler yardımıyla sürekli kesrin yakınsaklıklarına özdeştir[6]:

$$[M/M]_f(z)=\frac{A_{2M}(z)}{B_{2M}(z)},\quad [M+1/M]_f(z)=\frac{A_{2M+1}(z)}{B_{2M+1}(z)}$$

Örnek: $\tanh z=\frac{z}{1+}\frac{z^2}{3+}\frac{z^2}{5+}\Lambda\frac{z^2}{+2n+1+}\Lambda$

Açılımı $z=(2n+1)i\pi/2$ değeri hariç her z değeri için yakınsaktır.

Sonuç olarak, sürekli kesirler lineer kesirsel dönüşümler gibi davrandıklarından, bu dönüşümlerin özelliklerini taşırlar:

Lineer kesirsel dönüşüm, $A\alpha=\dfrac{a\alpha+b}{c\alpha+d}$ biçiminde olup, $a,b,c,d\in Z$ dir[7].

$$\frac{(S_n(u_n)-S_n(w_n))(S_n(v_n)-S_n(z_n))}{(S_n(u_n)-S_n(v_n))(S_n(w_n)-S_n(z_n))}$$

$$=\frac{(u_n - w_n)(v_n - z_n)}{(u_n - v_n)(w_n - z_n)}$$

ifadesi, dört farklı sayının çapraz oranının bir lineer kesirsel dönüşüm altında değişmez kaldığını belirtir. Ayrıca,

$$u_n = 0\ ,\ v_n = f^{(n)}, w_n = \infty\ ,\ z_n = -h$$

yazılırsa,

$$f_n - f = (f_n - f_{n-1})\frac{f^{(n)}}{f^{(n)} + h_n}$$

elde edilir. Ve,

$$u_n = f^{(n)}, v_n = 0, w_n, z_n = -h$$

yazılırsa;

$$\frac{f - S_n(w_n)}{f - f_n} = \frac{(f^{(n)} - w_n)h_n}{f^{(n)}(w_n + h_n)}$$

sonucu çıkar. Ayrıca, d kirişsel metrik olmak üzere, sürekli kesirler için aşağıdaki sonuç da yazılabilir:

$$\frac{d(S_n(u_n), S_n(w_n))d(S_n(v_n), S_n(z_n))}{d(S_n(u_n), S_n(v_n))d(S_n(w_n), S_n(z_n))}$$

$$= \frac{d(u_n, w_n)d(v_n, z_n)}{d(u_n, v_n)d(w_n, z_n)}$$

KAYNAKLAR

[1].W.B Jones and w.J. Thron. Continued fraction in numerical Analysıs. Applied Numerical Math. 4 (1988) 143-230.North-Holland.

[2]. J.H.Mathews and K.D. Fınk. Numerical Methods. Vol.3.

[3]. L . Jakobsen , H. Waadeland. Department of Math. And Statistics University of Trondheim 7055 Dragvoll / Norway.

[4]. Y. Shapira. Algebraic İnterpretation of Continued Fractions. Journal of Comp. And Appl.Math. 78 (1997) 3-8. Haifa- Israel.

[5]. S.Halıcı. Tek Değişkenli Ve Çok Değişkenli Pade Yaklaşımları, doktora tezi,1999, Sakarya.

[6]. George A. Baker, Peter Graves-Morris.Padé Approximants.Encyclopedia of mathematics and its applications,vol 13.

[7].E.M.Nikishin, V.N.Sorokin . Rational Approximations And Orthogonality, Vol.92.