İDEMPOTENT MATRİSLERLE İLGİLİ BAZI RANK EŞİTLİKLERİ

Hasan UYSAL, Halim ÖZDEMİR

Özet - **İdempotent matrisler için bazı rank eşitlikleri ortaya konulmaktadır. Özellikle idempotent matrislerin toplamı, çarpımı, farkı ve komutatörü ile ilgili bazı rank eşitlikleri verilmektedir. Ele alınan rank eşitlikleri, idempotent matrisli kuadratik formlar istatistiksel teoride yaygın olarak kullanıldığından dolayı önemlidir.**

Anahtar Kelimeler-**Komutatör, Genelleştirilmiş invers, İdempotent matris, Ortogonal izdüşüm, Parçalanmış matris, Rank eşitliği**

Abstract - **It is established several rank equalites for idempotent matrices. In particular, it is given some equalities for the rank of differance, the sum, the product and the commutator of idempotent matrices. The rank equalities which are considered are important since quadratic forms with idempotent matrices are used extensively in statistical theory.**

Keywords- **Commutator, Generalized inverse, İdempotent matrix, Orthogonal projector, Partitioned matrix, Rank equality.**

I.GİRİŞ

Bir A kompleks kare matrisine $A^2 = A$ olduğunda idempotent veya projektör; hermityen (reel simetrik) ve idempotent ise genel olarak bir ortogonal projektör (ortogonal izdüşüm), aksine eğik projektör (eğik izdüşüm) denir. Matris teorisinin temel taşlarından birisi olarak, idempotent matrisler, bir çok bakımdan kullanışlıdır ve litaratürde yaygın bir şekilde incelenmiştir(örneğin, [1],[2],[3]).

Özellikle, P ve Q nun her ikisi de idempotent ise bu durumda: $P \pm Q$ ve PQ hangi şartlar altında idempotenttir ?

H. Uysal, Söğütlü Çok Programlı Lisesi, Söğütlü, Sakarya
H. Özdemir; Sakarya Üniversitesi, Fen –Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Sakarya

Hangi şartlar altında $P \pm Q$ nonsingülerdir? Hangi şartlar altında P ve Q değişmelidir? Bu çalışmada $P \pm Q$, $PQ + QP$, $I - QP$ ve bunun gibi matrisler için bazı yeni ve ilginç rank eşitlikleri incelendi. Bu rank eşitlikleri sayesinde, yukarıda sözü edilen bazı çözümleri de içeren idempotent matrislere dair değişik yeni özellikler sıralanacaktır.

$A \in {}^{m\times n}$, $B \in {}^{m\times k}$ olmak üzere $M \in {}^{m\times(n+k)}$ parçalanmış blok matrisi $[A, B]$ ile, $A \in {}^{m\times n}$, $C \in {}^{l\times n}$ olmak üzere $N \in {}^{(m+l)\times n}$ parçalanmış blok matrisi $\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}$ ile gösterilmektedir.

Aşağıdaki lemmada matrislerle ilgili iyi bilinen rank eşitlikleri verilmektedir [4].

Lemma 1.1 : $A \in {}^{m\times n}$, $B \in {}^{m\times k}$, $C \in {}^{l\times n}$ ve $D \in {}^{l\times k}$ verilmiş olsun. Bu durumda aşağıdaki rank eşitlikleri sağlanır:

$$r[A, B] = r(A) + r(B - AA^- B)$$
$$= r(B) + r(A - BB^- A) \quad (1.1)$$

$$r\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} = r(A) + r(C - CA^- A)$$
$$= r(C) + r(A - AC^- C) \quad (1.2)$$

$$r\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = r(B) + r(C) + r[(I_m - BB^-)A(I_n - C^- C) \quad (1.3)$$

Burada A^-, B^- ve C^- sırasıyla A, B ve C nin herhangi genelleştirilmiş inversleridir.

II.ESAS SONUÇLAR

Teorem 2.1 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda $P-Q$ farkı aşağıdaki rank eşitliklerini sağlar:

$$r(P-Q) = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P,Q] - r(P) - r(Q) \quad (2.1)$$

$$= r(P-PQ) + r(PQ-Q) \quad (2.2)$$

$$= r(P-QP) + r(QP-Q) \quad (2.3)$$

[5].

Teorem 2.2 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda:

(a) Eğer $PQ = 0$ veya $QP = 0$ ise

$$r(P-Q) = r(P) + r(Q)$$

(b) Eğer $PQ = 0$ ise

$$r(P-QP) + r(QP-Q) = r(P) + r(Q)$$

(c) Eğer $QP = 0$ ise

$$r(P-PQ) + r(PQ-Q) = r(P) + r(Q)$$

(d) $r(P-Q) = r(P) - r(Q) \Leftrightarrow PQP = Q$
$\Leftrightarrow R(Q) \subseteq R(P)$ ve $R(Q^*) \subseteq R(P^*)$

(e) $P-Q$ farkı nonsingülerdir ancak ve ancak

$r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = r[P,Q] = r(P) + r(Q) = m$, veya denk olarak $R(P) \oplus R(Q) = R(P^*) \oplus R(Q^*) = {}^{m}$ dir

İspat : (a) nın ispatı (2.2) ve (2.3) ten kolaylıkla görülür.
(b) ve (c) (2.2) ve (2.3) birleştirildiğinde ispatı elde edilir.
(d) $r(P-Q) = r(P) - r(Q)$, (2.1) ve Lemma 1.1 den

$$r(P) - r(Q) = r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P,Q] - r(P) - r(Q)$$

$$2r(P) = r(P) + r(Q-QP) + r(P) + r(Q-PQ)$$

$0 = r(Q-QP) + r(Q-PQ)$ ise,

$Q = QP$ ve $Q = PQ$ dur. Q idempotent olduğundan $QQ = PQQP \Rightarrow Q = PQP$ bulunur. (2.1) de Q yerine PQP yazıldığında tersinin de doğru olduğu görülür.
(e) $P-Q$ farkının nonsingüler olduğu (2.1) den bulunur.

Teorem 2.3 : $P, Q \in \square^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda aşağıdaki rank eşitlikleri sağlanır:

$$r(I_m - P - Q) = r(PQ) + r(QP) - r(P) - r(Q) + m \quad (2.4)$$

$$= r(I_m - P - Q + PQ) + r(PQ) \quad (2.5)$$

$$= r(I_m - P - Q + QP) + r(QP) \quad (2.6)$$

Bunun yanında :

(a) $P + Q = I_m \Leftrightarrow PQ = QP = 0$ ve $r(P+Q) = r(P) + r(Q) = m$

(b) $I_m - P - Q$ nonsingülerdir ancak ve ancak $r(PQ) = r(QP) = r(P) = r(Q)$

İspat : (2.1) de P yerine $I_m - P$ yazılarak teoremin ispatı elde edilir.

Teorem 2.4 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda $P+Q$ toplamı,

$$r(P+Q) = r(P - PQ - QP + QPQ) + r(Q) \quad (2.7)$$

$$= r(Q - PQ - QP + PQP) + r(P) \quad (2.8)$$

rank eşitliklerini sağlar [5].

Teorem 2.5 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) $r(I_m + P - Q) = r(QPQ) - r(Q) + m$

(b) $r(2I_m - P - Q) = r(Q - QPQ) - r(Q) + m$
$= r(P - PQP) - r(P) + m$

(c) $r(I_m + P - Q) = m \Leftrightarrow r(QPQ) = r(Q)$

(d) $r(2I_m - P - Q) = m \Leftrightarrow r(P - PQP) = r(P)$
$\Leftrightarrow r(Q - QPQ) = r(Q)$

İspat : (a) (2.7) de Q yerine $I_m - Q$ yazılırsa

$$r(P + I_m - Q) = r[P - P(I_m - Q) - (I_m - Q)P + (I_m - Q)P(I_m - Q)] + r(I_m - Q)$$

$$= r(QPQ) + iz(I_m - Q)$$

$$= r(QPQ) + m - r(Q)$$

olur.

(b) (2.7) de P ve Q yerine sırasıyla $I_m - P$ ve $I_m - Q$ yazıldığında ispat yapılır.

(c), (a) dan yararlanılarak, (d) de (b) den yararlanılarak gösterilebilir.

Teorem 2.6 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$\begin{aligned} r(PQ - QP) &= r(P - Q) + r(I_m - P - Q) - m \\ &= r(P - Q) + r(PQ) + r(QP) - r(P) - r(Q) \\ &= r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] + r(PQ) + r(QP) - 2r(P) \\ &\qquad - 2r(Q) \\ &= r(P - PQ) + r(PQ - Q) + r(PQ) + r(QP) \\ &\qquad - r(P) - r(Q) \\ &= r(P - QP) + r(QP - Q) + r(PQ) + r(QP) \\ &\qquad - r(P) - r(Q) \end{aligned}$$

Ayrıca P ve Q nun her ikisi de hermityen idempotent matris ise, bu durumda

$$r(PQ - QP) = 2\{r[P, Q] + r(PQ) - r(P) - r(Q)\}$$

dır [5].

Sonuç 2.7 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

(a) $r(PQ - QP) = r(P - Q)$

(b) $r(PQ) = r(QP) = r(P) = r(Q)$

(c) $I_m - P - Q$ nonsingülerdir

İspat : Teorem (2.6) dan elde edilir.

Teorem 2.8 : $A \in \square^{m\times m}$ olmak üzere

$$r(A^2 - A) = r(A) + r(A - I_m) - m \tag{2.9}$$

dır [6].

Bu teoremden aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 2.9 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} r(PQ + QP) &= r(P + Q) + r(I_m - P - Q) - m \\ &= r(P + Q) + r(PQ) + r(QP) - r(P) - r(Q) \\ &= r(P - PQ - QP + QPQ) + r(PQ) + r(QP) \\ &\qquad - r(P) \\ &= r(Q - PQ - QP + PQP) + r(PQ) + r(QP) \\ &\qquad - r(Q) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat : (2.9), $(P + Q)^2 - (P + Q)$ ya uygulanırsa

$$\begin{aligned} r\left[(P + Q)^2 - (P + Q)\right] &= r(P + Q) \\ &\qquad + r(P + Q - I_m) - m \\ r(PQ + QP) &= r(P + Q) + r(I_m - P - Q) - m \end{aligned}$$

olur. İkinci eşitlik (2.4) ten, (2.7) nin değeri ikinci eşitlikte yerini yazılırsa üçüncü eşitlik ve (2.8) den yararlanarak dördüncü eşitlik elde edilir.

Sonuç 2.10 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} r\left[(P - Q)^2 - (P - Q)\right] &= r(P - Q) \\ &\qquad + r(I_m - P + Q) - m \\ &= r(PQP) - r(P) + r(P - Q) \end{aligned}$$

İspat : (2.9) ve Teorem 2.5 ten yararlanılarak ispat yapılır.

Teorem 2.11 : $A \in {}^{m\times n}$ verilmiş bir matris ve $P \in {}^{m\times m}$ ve $Q \in {}^{n\times n}$ idempotent matrisler olsun. Bu durumda $PA - AQ$ farkı aşağıdaki rank eşitliklerini sağlar:

$$\begin{aligned} r(PA - AQ) &= r\begin{bmatrix} PA \\ Q \end{bmatrix} + r[AQ, P] - r(P) \\ &\qquad - r(Q) \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$= r(PA - PAQ) + r(PAQ - AQ) \tag{2.11}$$

İspat : Blok Gaussian eleme yöntemiyle

$$r\begin{bmatrix} -P & 0 & PA \\ 0 & Q & Q \\ P & AQ & 0 \end{bmatrix} = r(P) + r(Q) + r(PA - AQ) \tag{2.12}$$

ve

$$r\begin{bmatrix} -P & 0 & PA \\ 0 & Q & Q \\ P & AQ & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} PA \\ Q \end{bmatrix} + r[AQ, P] \qquad (2.13)$$

bulunur. (2.12) ve (2.13) birleştirilirse, (2.10) elde edilir. Teorem 2.1 den de (2.11) elde edilir.

Teorem 2.12 : $P, Q \in {}^{m\times m}$ herhangi iki idempotent matris olsun. Bu durumda her $\alpha \in$ ($\alpha \neq 1$) için

$$r(I_m - P - Q + \alpha PQ) = r(I_m - P - Q) \qquad (2.14)$$

sağlanır.

İspat : Her $\alpha_1 \in$ ($\alpha_1 \neq 0$) için

$$P - PQ + \alpha_1 (PQ - Q) = P(P + \alpha_1 Q) - (P + \alpha_1 Q)Q$$

olduğuna dikkat edilirse, (2.10) dan

$$r[P - PQ + \alpha_1 (PQ - Q)] = r\begin{bmatrix} P(P + \alpha_1 Q) \\ Q \end{bmatrix} + r[(P + \alpha_1 Q)Q, P] - r(P) - r(Q)$$

$$= r\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} + r[P, Q] - r(P) - r(Q)$$

bulunur. Son eşitlik (2.1) ile birleştirilerek

$$r[P - PQ + \alpha_1 (PQ - Q)] = r(P - Q)$$

elde edilir. Bu eşitlikte P yerine $I_m - P$ yazılırsa

$$r[I_m - P - Q + (1 - \alpha_1)PQ] = r(I_m - P - Q)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

KAYNAKLAR

[1] Y.Tian, Rank equalities related to generalized inverses and their applications, M.Sc. Thesis, Department of Mathematics and Statistics, Concordia University, Montreal, April 1999.

[2] J.R.Magnus, H. Neudecker, Matrix Differential Calculus with Applications in Statistics and Econometrics, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[3] F.A. Graybill, Introudction to Matrices with Applications in Statistics, Wadsworth Publishing Company, Inc., California, 1970.

[4] G. Marsaglia, G.P.H. Styan, Equalities and inequalities for ranks of matrices, Linear and Multilinear Algebra 2 (1974), 269-292

[5] Y. Tian, G.P.H. Styan, Rank equalities for idempotent and involutory matrices, Linear Algebra Appl.,335(2001), 101-117

[6] T.W. Anderson, G.P.H. Styan, Cochran's theorem, rank additiviy and tripotent matrices, in: G. Kallianpur, P.R. Krishnaiah, J.K.Ghosh (Eds.), Statistics and Probability: Essays in Honor of C.R. Rao, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 1-23. [Reprinted in: G.P.H. Styan (Ed.), The Collected Papers of T.W Anderson : 1943-1985, vol. 2, Wiley, New York, 1990, pp. 1307-1329.]