SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
5.Cilt, 1.Sayı (Mart 2001) 51-54

PADE YAKLAŞIMLARI

Serpil HALICI, Hamdi ARIKAN, Ömer Faruk GÖZÜKIZIL

Özet - **Yapılan bu çalışmada, bir formal kuvvet serisi yardımıyla bir fonksiyona nasıl yaklaşılabileceği çalışıldı. Bir fonksiyona yaklaşabilmenin birçok yolları vardır. Pade ve Pade tipi yaklaşımları bunlardan bazılarıdır. Bu yaklaşımlar birer rasyonel yaklaşım olduklarından, rasyonel yaklaşımların özelliklerini taşırlar. Bu yaklaşım tipinin gösterimi, hesaplanışı ve hatasının bulunması, farklı şekillerde gösterimi çalışıldı. Enterpolasyon polinomları ile bağlantıları anlatılarak, bu yaklaşımların tek ve çok değişkenli durumları da incelendi.**

1.GİRİŞ

Tanım: $A(x)=\sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j$ formal kuvvet serisi olmak üzere, bu seriye L,M Pade yaklaşımı;

$$[L/M]=\frac{P_L(x)}{Q_M(x)} \tag{1}$$

biçiminde gösterilir. Burada; $P_L(x)$ en fazla L dereceden bir polinom ve $Q_M(x)$ en fazla M dereceden bir polinomdur. Aşağıdaki eşitlik yardımıyla P_L ve Q_M polinomlarının katsayıları bulunabilir[2]:

$$A(x)-\frac{P_L(x)}{Q_M(x)}=O\left(x^{L+M+1}\right) \tag{2}$$

P_L ve Q_M polinomlarının ortak çarpanı yoktur.

$$P_L(x)=p_0+p_1x+p_2x^2+K\ p_Lx^L \tag{3}$$

$$Q_M(x)=1+q_1x+q_2x^2+K+q_Mx^M \tag{4}$$

S.Halıcı, *SAÜ Hendek Meslek Yüksek Okulu*
H.Arıkan, SAÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Ö.F.Gözükızıl, SAÜ Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

$Q_M(0)=1.0$ normalleştirme şartı konulmuştur.

$$\begin{aligned}&\left(a_0+a_1x+a_2x^2+K\right)\left(1+q_1x+q_2x^2+K+q_Mx^M\right)\\&\quad-\left(p_0+p_1x+p_2x^2+K+p_Lx^L\right)=O\left(x^{L+M+1}\right)\end{aligned} \tag{5}$$

Bu eşitlik,

$a_0=p_0$

$a_1+a_0q_1=p_1$

$a_2+a_1q_1+a_0q_2=p_2$

....

$a_L+a_{L-1}q_1+K+a_0q_L=p_L$

$a_{L+1}+a_Lq_1+K+a_{L-M+1}q_M=0$

....

$a_{L+M}+a_{L+M-1}q_1+K+a_Lq_M=0$

biçiminde yazılabilir. Burada; eğer $n<0$ ise $a_n\equiv 0$ ve $j>M$ ise $q_j\equiv 0$ olduğu anlaşılır.

Teorem1: Herhangi bir A(x) formal kuvvet serisine, [L/M] Pade yaklaşımı varsa, bu yaklaşım bir tektir[3].
İspat: Bu özellikte iki yaklaşımın varlığı kabul edilsin. X(x)/Y(x) ve U(x)/V(x) formal kuvvet serisine iki Pade yaklaşımı olsun. Burada, U ve X in derecesi L ye eşit ya da daha küçüktür. Aynı şekilde, V ve Y nin derecesi M ye eşit ya da daha küçüktür. Her iki yaklaşım aynı seriye yaklaştıklarından dolayı,

$$X(x)/Y(x)-U(x)/V(x)=O\left(x^{L+M+1}\right) \tag{6}$$

olmalıdır. Bu eşitlik, Y(x).V(x) ifadesi ile çarpılacak olursa,

$$X(x)V(x)-U(x)Y(x)=O\left(x^{L+M+1}\right) \tag{7}$$

olur. Eşitliğin sol yanı en fazla L+M dereceli bir polinom olacağından, özdeş olarak sıfır olur. Ne Y ne de V özdeş olarak sıfır olmadığından dolayı,

$$\frac{X(x)}{Y(x)}=\frac{U(x)}{V(x)} \tag{8}$$

sonucu elde edilir. Tanım yardımıyla X ile Y ve U ile V relatif asaldırlar. Üstelik,

$$Y(0)=V(0)=1.0 \tag{9}$$

dır. Böylece var olduğu kabul edilen iki Pade yaklaşımının aynı olduğu görülmüş oldu.

Tanım: $[L/M]=\dfrac{P^{[L/M]}(z)}{Q^{[L/M]}(z)}$ biçiminde de gösterilen Pade yaklaşımının pay ve paydası determinant yardımıyla aşağıdaki gibi verilebilir[2]:

$$Q^{[L/M]}(z)=\det\begin{bmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & K & c_L & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & K & c_{L+1} & c_{L+2} \\ M & M & K & M & M \\ c_L & c_{L+1} & K & c_{L+M-1} & c_{L+M} \\ z^M & z^{M-1} & K & z & 1 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$P^{[L/M]}(z)=\det\begin{bmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & K & c_{L+1} \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & K & c_{L+2} \\ M & M & K & M \\ c_L & c_{L+1} & K & c_{L+M} \\ \sum_{i=0}^{L-M} c_i z^{M+i} & \sum_{i=0}^{L-M+1} c_i z^{M+i-1} & \Lambda & \sum_{i=0}^{L} c_i z^i \end{bmatrix} \tag{11}$$

Örnek: $f(z)=1+z+\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{6}+K+\dfrac{z^n}{n!}+K$ fonksiyonuna $P^{[L/M]}(z)/Q^{[L/M]}(z)$ yaklaşımıyla yaklaşılacak olunursa, paydadaki polinom aşağıdaki gibi hesaplanabilir[5]:

$$Q^{[L/M]}=\det\begin{bmatrix} \frac{1}{(L-M+1)!} & \frac{1}{(L-M+2)!} & \Lambda & \frac{1}{(L+1)!} \\ \frac{1}{(L-M+2)!} & \frac{1}{(L-M+3)!} & \Lambda & \frac{1}{(L+2)!} \\ M & M & \Lambda & M \\ \frac{1}{L!} & \frac{1}{(L+1)!} & \Lambda & \frac{1}{(L+M)!} \\ z^M & z^{M-1} & \Lambda & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

II. TEK VE ÇOK DEĞİŞKENLİ PADE YAKLAŞIMLARI

Teorem 2: P polinomu $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$ eksenlerinde yapılanmış $g(x) = (1-xt)^{-1}$ fonksiyonunun Lagrange enterpolasyon polinomu olsun.

$$P(x)=v(x)\sum_{i=1}^{k}\frac{g(x_i)}{(x-x_i)v'(x_i)} \tag{13}$$

Bu durumda,

$$c(P)=\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)}$$

olur. Burada, $\tilde{w}(t)=t^{k-1}w(t^{-1})$ ve $\tilde{v}(t)=t^k v(t^{-1})$ dır.

İspat:

$$P(x)=\sum\frac{\frac{v(x)-v(x_i)}{x-x_i}}{v'(x_i)}\,\frac{1}{1-x_i t} \quad ; \quad g(x_i)=\frac{1}{1-x_i t}$$

w nın tanımı yardımıyla, x=1/t olmak üzere,

$$c(P)=\sum_{i=1}^{k}\frac{w(x_i)}{v'(x_i)}\frac{1}{1-x_i t}=x\sum_{i=1}^{k}\frac{w(x_i)}{v'(x_i)}\frac{1}{x-x_i}=x\frac{w(x)}{v(x)}$$

$$=\frac{1}{t}\frac{w(t^{-1})}{v(t^{-1})}=\frac{\tilde{w}(t)}{\tilde{v}(t)}$$

Sonuç: $c(P)-f(t)=O(t^k)$; $t\to 0$

Teorem 3: Teorem 2 nin kabulleri altında,

$$c(P)-f(t)=\frac{t^k}{\tilde{v}(t)}c\left(\frac{v(x)}{xt-1}\right)$$

dır.

$$\tilde{w}(t)=t^{k-1}w\left(t^{-1}\right)=t^{k-1}c\left(\frac{v(x)-v\left(t^{-1}\right)}{x-t^{-1}}\right)=$$

$$c\left(\frac{t^{k}v(x)-t^{k}v\left(t^{-1}\right)}{xt-1}\right)=t^{k}c\left(\frac{v(x)}{xt-1}\right)-\tilde{v}(t)c\left(\frac{1}{xt-1}\right)$$

$\tilde{v}(t)$ ile bölerek sonuç görülür.

Tanım: $t=\left(t_1,t_2,K,t_N\right)$, f(t) N değişkenli reel katsayılı bir formal kuvvet serisi olsun[1].

$$f(t)=c_0+c_1+c_2+K+c_i+K \quad ; \quad t=\left(t_1,K,t_N\right)$$

$$f(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum c_{j_1},K_{j_N}\, t_1^{j_1}K\, t_N^{j_N}\right) \quad ; \quad c_{j_1K\, j_N}\in R$$

Burada c_i katsayıları $t_1,t_2,\ldots,t_N$ ye göre i. nci dereceden reel katsayılı birer homojen polinomlardır. P(X) ise, katsayıları $t_1,t_2,\ldots,t_N$ ye göre polinomlar olan X e göre bir formal Laurent serisi olup,

$$P(X)=a_nX^n+a_{n+1}X^{n+1}+K \quad ; \quad n\in Z \tag{14}$$

$a_i\in R\left[t_1,t_2,K,t_N\right]$; $i=n,n+1,K$ dıır $R\left[t_1,t_2,K,t_N\right]$ ise R sayı cismi üzerinde $t_1,t_2,\ldots,t_N$ ye göre bir polinom halkasıdır. Bu özellikteki polinomların kümesi P olsun.

$$\frac{1}{1-X}=1+X+X^2+K$$

$$\frac{1}{X^n(1-X)}=X^{-n}+X^{-n+1}+K \tag{15}$$

f(t) kuvvet serisi için, P de hareket eden c lineer operatörü,

$$c\left(\sum_i a_iX^i\right)=\sum_i a_ic_i \quad ; \quad i\,\pi\,0 \text{ iken } c_i=0$$

olarak tanımlıdır. Bu operatörün aşağıdaki özellikleri vardır[4]:

i) $c(aP(X)+bQ(X))=ac(P(X))+bc(Q(X))$

ii) $c^{(n)}(P(X))=c\left(X^nP(X)\right)$

iii) $c^{(n)}(aP(X)+bQ(X))=ac\left(X^nP(X)\right)+bc\left(X^nQ(X)\right)$

iv) $c\left(X^i\right)=c_i$ ve $c^{(n)}\left(X^i\right)=c_{n+i}$; $i\,\pi\,0$ ise $c_i=0$, $n+i\,\pi\,0$ ise $c_{n+i}=0$

dır.

Burada, $a,b\in R[t_1,\ldots,t_N]$, $n\in Z$ ve P(X) , Q(X) $\in$P dir.

III. SONUÇLAR

Sonuç: $n\leq 0$ için,

$$c^{(n)}\left(\frac{1}{1-X}\right)=f(t) \quad ; \quad t=\left(t_1,t_2,K,t_N\right) \quad \text{yazılabilir.}$$

1/ 1-X fonksiyonu f(t) nin üreteç fonksiyonudur.

V(X) $\in$P , $t_1,t_2,\ldots,t_N$,X n+1 değişkene göre homojen bir polinom ise, bu V(X) e bir g polinom denir.

$$V(X)=b_mX^q+b_{m+1}X^{q-1}+K+b_{m+q} \tag{16}$$

v(t) = V(1) polinomu V(X) in tersidir ve

$$v(t)=b_m+b_{m+1}+K+b_{m+q} \tag{17}$$

yazılır[6].

$$w^{(n)}(t)=c\left(\frac{v(t)-X^nV(X)}{1-X}\right) \quad , \quad t=\left(t_1,K,t_N\right), n\in Z$$

polinomuna da, V(X) g polinomunun n ilişkili polinomu denir.

Sonuç: Yukarıdaki polinom m+q+n-1 dereceden bir polinomdur.

Sonuç:

$$f(t)v(t)-w^{(n)}(t)=c^{(n)}\left(\frac{V(X)}{1-X}\right)=O(m+q+n) \quad ; \quad t=\left(t_1,K,t_N\right) \tag{18}$$

Teorem: v(t) ve w(t) polinomları sırasıyla m+q ve m+p dereceden olsunlar. O(m+p+1) hata terimi olup,

$$f(t)v(t)-w(t)=c^{(p-q+1)}\left(\frac{V(X)}{1-X}\right)=O(m+p+1) \tag{19}$$

dır[1].

Sonuç: c ve $\overline{c}$ fonksiyonelleri arasındaki bağlantı şudur: $\overline{c}$ ve $\overline{c}_i$ sırasıyla, c fonksiyoneli ve genel kuvvet serisinin c_i katsayısı olsun. O halde,

1) $c\left(X^i\right)=c_i=\overline{c}_it^i=\overline{c}\left(x^it^i\right)$ ve $\overline{c}\left(x^i\right)=\overline{c}_i$ olup,

$c\left(X^i\right)=\overline{c}\left((xt)^i\right)$

2) $c\left(\frac{1}{1-X}\right)=\bar{c}\left(\frac{1}{1-xt}\right)=f(t)$

ifadeleri bulunur.

KAYNAKLAR

1. Arioka, S. "Pade Type Approximants in Multivariables", Applied Numerical Mathematics 3,497-511, 1987.
2. Baker,George A. and Morris, Peter G. "Pade Approximants",Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol 59, 1996.
3. Brezinski, C."Rational Approximation to Formal Power Series", Journal of Approximation Theory 25,295-317, 1979.
4. Cheney, E.W. "Introduction to Approximation Theory", McGraw-Hill beek c.,New York, 1966. 3, pp251-256, 1988.
5. Conte, Samuel D. and Carl de Boor. "Elementary Numerical Analysis", McGraw-Hill International Editions, Mathematics and Statistics Series, Singapure, 1981.
6. Cuyt, A. "Nonlinear Numerical Methods and Rational Approximation", Lectures Notes in Math.1065, Berlin, 1984