SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
1 (1997) 69-74

On the (k-m+1)-dimensional Time-Like Center Ruled Surface in the Minkowski space, R_1^n

Murat TOSUN

Sakarya üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 54100, Mithatpaşa \ ADAPAZARI

Abstract: In this paper we give the basic properties of (k+1)-dimensional generalized time-like ruled surface in the n-dimensional Minkowski space, R_1^n. Moreover, we discuss the (k-m+1)-dimensional time-like center ruled surfaces of (k+1)-dimensional time-like ruled surfaces in R_1^n

I. Giriş: Bu makalede tüm manifoldlar, dönüşümler, vektör alanları, vb C^∞ sınıfından kabul edilmiştir. R^n, n-boyutlu vektör uzayı olmak üzere aşağıda verilen simetrik, bilineer ve non-dejenere metrik tensör, R^n üzerinde Lorentz metrik olarak isimlendirilir.

$$\langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i - x_n y_n \qquad (I.1)$$

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n)\ ,\ Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)$$

(I.1) ile verilen Lorentz metrik ile R^n ikilisi n-boyutlu Minkowski uzayı olarak isimlendirilir ve R_1^n ile gösterilir. M, R_1^n Minkowski uzayı üzerinde bir yüzey olsun. Eğer M üzerine indirgenmiş metrik Lorentz metriği ise bu takdirde M time-like yüzey olarak isimlendirilir. R_1^n de bir eğri α ve α nın hız vektörü $\dot{\alpha}$ olmak üzere eğer $\langle \dot{\alpha},\dot{\alpha}\rangle < 0$ ise α eğrisi time-like eğri olarak adlandırılır. Ayrıca Minkowski uzayı ile ilgili basit tanım ve teoremler [4]de bulunabilir.

E^n, n-boyutlu Öklid uzayında (k+1)-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzeyler Aslaner, R.[1], Frank, H. and Giering, O.[2], Juzza, M.[3], Thas, C. [4] çalışıldı. İlk olarak [6] de regle yüzeylerle yapılan bu araştırmalar R_1^n uzayında incelendi. Bu çalışmada (k+1)-boyutlu time-like regle yüzeyin (k-m+1)-boyutlu time-like merkez regle yüzeyi üzerinde duruldu ve merkez regle yüzey ile ilgili iki teorem ifade ve ispat edildi.

II. Genelleştirilmiş Time-like Regle Yüzeyler

R_1^n, n-boyutlu Minkowski uzayının bir α time-like eğrisinin her noktasında tanımlı bir ortonormal vektör alan sistemi $\{e_1(t), e_2(t), \dots e_k(t)\}$ olsun. Bu sistem $T_{R_1^n}(\alpha(t))$ tanjant uzayının k-boyutlu bir alt uzayını gerer. Eğer bu alt uzayı $E_k(t)$ ile gösterirsek, o zaman

$$E_k(t)=\{e_1(t), e_2(t), \dots e_k(t)\}$$

dir. $E_k(t)$ alt uzayı α time-like eğrisi boyunca hareket ederken R_1^n de (k+1)-boyutlu bir yüzey meydana gelir. Bu yüzeye R_1^n de (k+1)-boyutlu genelleştirilmiş regle yüzey adı verilir ve M ile gösterilir. $E_k(t)$ alt uzayı ve α time-like eğrisi, sırasıyla, doğrultman uzayı ve dayanak eğrisi olarak isimlendirilir.

Bu regle yüzey

$$\phi(t,u_1,u_2,\dots u_k) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i e_i(t)$$

ile parametrize edilir. ϕ nin t ve u_i, $1 \le i \le k$ ye göre kısmi türevleri alınırsa

$$\phi_t = \dot{\alpha}(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i \dot{e}_i(t)$$

$$\phi_{u_i} = e_i(t)\ ,\quad 1 \le i \le k$$

bulunur.

Çalışmamız boyunca

$$\left\{\alpha(t)+\sum_{i=1}^{k}u_i e_i(t), e_1(t), e_2(t), \dots e_k(t)\right\}$$

sistemi lineer bağımsız ve $E_k(t)$ alt uzayı space-like alt uzay olarak kabul edilecektir.

$$Sp\{e_1, e_2, \dots e_k, \dot{e}_1, \dot{e}_2, \dots \dot{e}_k\}$$

alt uzayına M nin $E_k(t)$ ye göre asimptotik demeti denir ve A(t) ile gösterilir

Eğer $boy(A(t)) = k+m$, $0 \le m \le k$ kabul edilirse A(t) asimptotik demetinin $E_k(t)$ yi ihtiva eden

$$\{e_1(t), e_2(t), \dots e_k(t), a_{k+1}(t), a_{k+2}(t), \dots a_{k+m}(t)\}$$

şeklinde bir ortonormal bezı bulunabilir. Burada

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}e_j + \sum_{s=1}^{m}\sigma_{is}a_{k+s}, \quad 1 \le i \le k \quad \text{(II.1)}$$

olduğu açıktır. Bu denklemden ise

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$$

olduğu görülebilir.

TeoremII.1.M . R^n_1 de (k+1)-boyutlu time-like regle yüzey ve $E_k(t)$ de M nin doğrultman uzayı olsun. $t_0 \in I$ olmak üzere $\{e_1(t_0), e_2(t_0), \dots e_k(t_0)\}$ da $E_k(t)$ nin bir ortonormal bazı olsun. $t_0 \in J \subset I$ olacak şekilde öyle bir J aralığı bulunabilirki bu aralıkta $E_k(t)$ nin $\forall t \in J$ için

$$\left\langle \dot{\bar{e}}_j, \bar{e}_i \right\rangle = 0, \quad 1 \le i, j \le k \quad \text{(II.2)}$$

olacak şekilde bir $\{\bar{e}_1(t), \bar{e}_2(t), \dots, \bar{e}_k(t)\}$ ortonormal bazı tek türlü olarak bulunabilir,[4].

Eğer M. (k+1)-time-like regle yüzeyi (II.2) ifadesi geçerli olacak şekilde parametrelendirilir ise (II.1) den

$$\alpha_{ij} = 0, \quad 1 \le i, j \le k \quad \text{(II.3)}$$

bulunur.

TeoremII.2.M . R^n_1 de (k+1)-boyutlu time-like regle yüzey olsun. (t)=k+m boyA olmak üzere $E_k(t)$ doğrultman uzayının $\{e_1(t), e_2(t), \dots e_k(t)\}$ ortonormal bazı

$$\dot{e}_i = \sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}e_j + \kappa_i a_{k+i}, \quad 1 \le i \le m$$
$$\dot{e}_{m+s} = \sum_{j=1}^{k}\alpha_{sj}e_j, \quad 1 \le s \le k-m \quad \text{(II.4)}$$

bağıntıları geçerli olacak şekilde seçilebilir. Burada

$$\alpha_{ij} = -\alpha_{ji}$$
$$\kappa_1 \rangle \kappa_2 \rangle \cdots \rangle \kappa_m \rangle 0 \quad \text{(II.5)}$$

dir.[4].

Sabit bir $t_0 \in I$ için, teoremII.2 de verilen $\{e_1(t), e_2(t), \dots e_k(t)\}$ ortonormal bazı .teoremII.1 de verilen ortonormal baz olarak seçilirse (II.3) den dolayı (II.4) denklemi

$$\dot{e} = \kappa_i(t_0)a_{k+i}(t_0), \quad 1 \le i \le m$$
$$\dot{e}_{m+s} = 0, \quad 1 \le s \le k-m$$

şeklini alır. $\{e_1(t), e_2(t), \dots e_m(t)\}$ nin $E_k(t)$ doğrultman uzayına göre ortonormal tümleyeni olan $\{e_{m+1}(t), e_2(t), \dots e_k(t)\}$ ortonormal baz vektörleri her $t \in I$ için keyfi seçilebilirler. Bu şekilde seçilen ortonormal bazlar için (4) denkleminde

$$\alpha_{(m+p)(m+s)} = 0, \quad 1 \le s, p \le k-m \quad \text{(II.6)}$$

ifadesi geçerlidir.

M yüzeyinin sabit bir noktası $P = \phi(t, u_1, u_2, \dots u_k)$ ise P noktasındaki teğet uzayın bir bazı

$$\left\{\dot{\alpha}+\sum_{i=1}^{k}u_i\dot{e}_i, e_1, e_2, \dots e_k\right\}$$

dır.t sabit tutularak u_i, $1 \le i \le k$ sayıları değiştirilirse P noktası $E_k(t)$ uzayının noktalarını tarar.Buna göre,

$$Sp\{\dot{\alpha}, e_1, e_2, \dots e_k, \dot{e}_1, \dot{e}_2, \dots \dot{e}_k\}$$

uzayı $E_k(t)$ nin bütün P noktalarındaki teğet uzaylarının birleşimini kapsar. Bu altuzay T(t) ile gösterilir ve M nin **Teğetsel demeti** olarak isimlendirilir.

Açıktırki

$$k + m \leq boyT(t) \leq k + m + 1 \ , \ 0 \leq m \leq k$$

dir. Yani boyT(t)=k+m veya boyT(t)=k+m+1 dir. Biz bu çalışmada T(t) Teğetsel demetinin boyutunun (k+m+1) olması durumunda ki hallerin üzerinde duracağız.

Kabul edelimki boyT(t)=k+m+1 olsun. Bu durumda

$$\alpha \notin Sp\{e_1, e_2, \ldots e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+m}\}$$

dir. Böylece

$$\{e_1, e_2, \ldots e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+m}, a_{k+m+1}\} \qquad (II.7)$$

cümlesi T(t) nin ortonormal bir bazı olacak şekilde bir a_{k+m+1} birim vektörü işareti dışında tek olarak belirlidir. $\eta_{m+1} \neq 0$ olmak üzere,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i + \sum_{v=1}^{m} \eta_v a_{k+v} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

yazılabilir. Herhangi bir P(t) dayanak eğrisi, $\alpha(t)$ eğrisine bağlı olarak

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} u_i(t) e_i(t)$$

biçiminde yazılabilir. Buradan

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{i=1}^{k} (u_i e_i + u_i e_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \xi_i e_i + \sum_{v=1}^{k} \eta_v a_{k+v} + \sum_{i=1}^{k} (u_i e_i + u_i e_i)$$

bulunur. Bu son denklemde teoremII.1 kullanılırsa

$$P(t) = \sum_{j=1}^{k} (\xi_j + u_j + \sum_{i=1}^{m} u_i \alpha_{ij} + \sum_{i=m+1}^{k} u_i \alpha_{ij}) e_j$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} (\eta_s + u_s \kappa_s) a_{k+s} + \eta_{m+1} a_{k+m+1}$$

elde edilir.

$$u_s \kappa_s + \eta_s = 0 \ , \ 1 \leq s \leq m$$

olacak biçimdeki P(t) noktası için P(t) vektörleri $Sp\{e_1, e_2, \ldots e_k, \alpha\}$ alt uzayı içinde yatar. $\kappa_s > 0, 1 \leq s \leq m$ olduğundan $u_s \kappa_s + \eta_s = 0 \ , \ 1 \leq s \leq m$ lineer denklem sistemiyle tanımlanan P(t) noktaları $Sp\{e_1, e_2, \ldots e_k, \alpha\}$ içinde (k-m)-boyutlu alt uzayı doldururlar. Bu alt uzaya M nin **Merkez uzayı** denir ve $Z_{k-m}(t)$ ile gösterilir.

$E_k(t)$ bir space-like alt uzay olduğundan bütün baz vektörleri space-like dir. O halde $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı space-like altuzay dır.

Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem II.3. M, R_1^n de (k+1)-boyutlu time-like regle yüzey ve teğetsel demeti T(t) olsun. Eğer boyT(t)=k+m+1 ise M nin $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayı space-like dir.

III. R_1^n, Mikowski Uzayında (k-m+1)-boyutlu Time-Like Merkez Regle Yüzeyler

Bu bölümde R_1^n, Minkowski uzayının (k+1)-boyutlu M time-like regle yüzeyi tarafından ihtiva edilen (k-m+1)-boyutlu time-like merkez regle yüzeyi üzerinde duracağız.

TanımIII.1 R_1^n. Minkowski uzayında (k+1)-boyutlu time-like regle yüzey M olsun. M nin $E_k(t)$ doğrultman uzayı $\alpha(t)$ time-like eğrisi boyunca M, (k+1)-boyutlu time-like regle yüzeyi oluştururken, M nin $Z_{k-m}(t)$ merkez uzayıda aynı eğri boyunca bir diğer (k-m+1)-boyutlu time-like regle yüzey oluşturur. Bu regle yüzeye **Merkez regle yüzey** adı verilir ve Ω ile gösterilir.[4].

Ω .Merkez regle yüzeyi

$$\Omega(t, x_1, x_2, \ldots x_{k-m}) = \alpha(t) + \sum_{s=1}^{k-m} x_s e_s(t) \qquad (III.1)$$

ile parametrize edilir.

Şimdi bir I açık aralığında A(t) asimptotik demetinin (II.4) ve (II.6) ifadelerinin geçerli olduğu

$$\{e_1, e_2, \ldots e_k, a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+m}\}$$

bazını ele alalım ve her $t \in I$ için bu ortonormal bazı T(t) teğetsel demetinin (II.7) ortonormal bazına, bunuda $a_{k+m+2}, \ldots, a_n$ vektörleri yardımıyla R_1^n nin,

$$\{e_1, \ldots e_k, a_{k+1}, \ldots a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \ldots, a_n\} \qquad (III.2)$$

ortonormal bazına tamamlıyalım.

Böylece $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+m}, a_{k+m+1}, \ldots, a_n$ türev vektörleri için aşağıdaki teorem verilebilir.

TeoremIII.1 M, R^n_1 de (k+1)-boyutlu time-like regle yüzey ve Ω da M tarafından ihtiva edilen (k-m+1)-boyutlu time-like merkez regle yüzeyi olsun. $E_k(t)$ doğrultman uzayının $\{e_1, e_2, \ldots e_k\}$ ortonormal bazını R^n_1 nin bazına tamamlayan $\{a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_{k+m}, a_{k+m+1}, a_{k+m+2}, \ldots, a_n\}$ sisteminin türev vektörleri

$$a_{k+i} = -\kappa_i e_i + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il} a_{k+l} + w\, a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=1}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda}$$

$$a_{k+m+1} = -\sum_{l=1}^{m} w_l a_{k+l} - \sum_{\lambda=1}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda} \qquad \text{(III.3)}$$

$$a_{k+m+\xi} = \sum_{l=1}^{m} w_{\xi l} a_{k+l} + \beta_\xi a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{\xi\lambda} a_{k+m+\xi}$$

ile verilir.

İspat:(III.2) ile verilen ortonormal sistemi gözönüne alınırsa

$$a_{k+i} \in Sp\{e_1, \ldots e_k a_{k+1}, \ldots a_{k+m}, a_{k+m+1}, \ldots, a_n\}$$

ve buradan

$$a_{k+i} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} e_j + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il} a_{k+l} + w a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=1}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda}, \quad 1 \le i \le m$$

yazılabilir. Bu son denklemden

$$\alpha_{ij} = \langle a_{k+i}, e_j \rangle = -\langle a_{k+i}, e_j \rangle, \; 1 \le i \le m,\; 1 \le j \le k \qquad \text{(III.4)}$$

bulunur. (III.4) denkleminde (II.6) gözönünde bulundurularak (II.4) denklemi ile verilen e_j türev vektörü yerine yazılırsa

$$a_{k+i} = -\kappa_i e_i + \sum_{l=1}^{m} \tau_{il} a_{k+l} + w\, a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=1}^{n-k-m} \gamma_{i\lambda} a_{k+m+\lambda} \qquad \text{(III.5)}$$

elde edilir. Benzer düşünceyle

$$a_{k+m+1} = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{(k+m+1)s} e_s + \sum_{l=1}^{m} w_l a_{k+l} + w a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=1}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda}$$

yazılabilir. Buradan ise

$$\alpha_{(k+m+1)s} = \langle a_{k+m+1}, e_s \rangle = -\langle a_{k+m+1}, e_s \rangle, \; 1 \le s \le k$$

bulunur. Bu son eşitlikte e_s, $1 \le s \le k$ türev vektörünün eşiti yerine yazılırsa

$$\alpha_{(k+m+1)s} = 0, \; 1 \le s \le k$$

bulunur. Ayrıca kolayca görebiliriz ki

$$w = \langle a_{k+m+1}, a_{k+m+1} \rangle = 0$$

dir. Böylece

$$a_{k+m+1} = -\sum_{l=1}^{m} w_l a_{k+l} - \sum_{\lambda=1}^{n-k-m} \beta_\lambda a_{k+m+\lambda} \qquad \text{(III.6)}$$

elde edilir. Tekrar benzer olarak

$$a_{k+m+\xi} = \sum_{s=1}^{k} \alpha_{\xi s} e_s + \sum_{l=1}^{m} w_{\xi l} a_{k+l} + \beta_\xi a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{\xi\lambda} a_{k+m+\lambda}$$

yazılabilir. Yine benzer işlemler yapılarak

$$\alpha_{\xi s} = 0, \; 2 \le \xi \le n-k-m, \; 1 \le s \le k$$

olduğu görülür. Bundan dolayı

$$a_{k+m+\xi} = \sum_{l=1}^{m} w_{\xi l} a_{k+l} + \beta_{\xi} a_{k+m+1} + \sum_{\lambda=2}^{n-k-m} \beta_{\xi\lambda} a_{k+m+\xi} \qquad \text{(III.7)}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

(II.4),(III.5),(III.6) ve (III.7) denklemlerini matris formunda ekteki şekilde verebiliriz.

$\alpha(t)$ dayanak eğrisinin $\alpha(t)$ hız vektörü

$$\alpha = \sum_{j=1}^{k} \xi_j e_j + \eta_{m+1} a_{k+m+1}, \quad \eta_{m+1} \neq 0 \qquad \text{(III.8)}$$

dır. Ω time-like merkez regle yüzeyinin keyfi bir P(t) dayanak eğrisi, $\alpha(t)$ eğrisine bağlı olarak

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{s=1}^{k-m} x_{m+s}(t) e_{m+s}(t) \qquad \text{(III.9)}$$

olmak üzere, bu eşitliğin t ye göre türevi alınırsa

$$P(t) = \alpha(t) + \sum_{s=1}^{k-m} (x_{m+s} e_{m+s} + x_{m+s} e_{m+s})$$

elde edilir (II.4) ve (III.8) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum_{j=1}^{k} \xi_j e_j + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \\ &+ \sum_{s=1}^{k-m} x_{m+s} e_{m+s} + \sum_{s=1}^{k-m} x_{m+s} \Big(\sum_{j=1} \alpha_{(m+s)j} e_j\Big) \\ &= \sum_{l=1}^{m} (\xi_l + x_{m+s} \alpha_{(m+s)l}) e_l \\ &+ \sum_{s=1}^{k-m} (\xi_{m+s} + x_{m+s}) e_{m+s} + \eta_{m+1} a_{k+m+1} \end{aligned} \qquad \text{III.10}$$

bulunur.

$$x_{m+s}(t) + \xi_{m+s}(t) = 0 \ , \ 1 \le s \le k-m \qquad \text{(III.11)}$$

eşitliğini sağlayan P(t) noktaları Ω time-like merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesini oluştururlar.

$$\xi_{m+s} = 0 \ , \ 1 \le s \le k-m \qquad \text{(III.12)}$$

olması $x_{m+s} = c_s$, (c_s = sabit) olmakla beraber P(t) eğrisinin Ω time-like merkez regle yüzeyinin ortogonal yörüngesi olmasını karakterize eder.

Böylece Ω time-like merkez regle yüzeyine II.bölümdeki teoriyi uygularsak, $\eta_{m+1} \neq 0$ olduğundan

$$P(t) \notin \{e_{m+1}, \dots, e_k, e_{m+1}, \dots, e_k\}$$

dır. Buradan dolayı Ω time-like merkez regle yüzeyi her $t \in I$ için $Z_{k-m}(t)$ doğrultman uzayı ile aynı olan bir $Z_{k-m-s}(t)$ merkez uzayına sahiptir.

Böylece son olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem III.2. M, R_1^n de (k+1)-boyutlu time-like regle yüzey olsun. M tarafından ihtiva edilen (k-m+1)-boyutlu time-like merkez regle yüzeyi Ω, bir $Z_{k-m-s}(t)$ merkez uzayına sahiptir.

REFERENCES

[1]ASLANER,R: Master Sci. Thesis, İnönü Üniversity, Graduate School of Natural and Applied Science (1989)

[2]FRANK,H. und GIERING ,O: Verallgemeinerte regelflachen.Math.Zelt.150,261-271,1976

[3]JUZA, M: Ligne de striction sur une generalisation a plusieurs dimensions d'une surface reglee. Czechosl.Math. J. 12 (87), 143-250,1962

[4]O'NEILL, B., Semi-Riemannian Geometry, Academic Press, New York, London. 1983.

[5] THAS,C; Een (lokale) Studie Van de (m+1)-dimensionale Variete iten,Van de n-dimensionale Euclidische Ruimte IR (n=2m+1 en m=1),Beschreven Door Een Eendimensionale Familie Van m-dimensionale lineaire Ruiten.Paleis Der Academien-Herttogsstroat,I Brussel,(1974).

[6]TOSUN,M; Ph. D. Thesis, Ondokuz Mayıs Üniversity, Graduate School of Natural and Applied Science (1995)

(Ek)

$$
\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_{k+m} \\ a_{k+m+1} \\ a_{k+m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\alpha_{11}\cdots & \alpha_{1m} & \alpha_{1(m+1)}\cdots & \alpha_{1k} & \kappa_1\cdots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
\alpha_{m1}\cdots & \alpha_{mm} & \alpha_{m(m+1)}\cdots & \alpha_{mk} & 0\ldots & \kappa_m & 0 & 0\ldots & 0 \\
\alpha_{(m+1)1}\ldots & \alpha_{(m+1)m} & \alpha_{(m+1)(m+1)}\cdots & \alpha_{(m+1)k} & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
\vdots & & & & & & & & \\
\alpha_{k1}\cdots & \alpha_{km} & \alpha_{k(m+1)}\cdots & \alpha_{kk} & 0\ldots & 0 & 0 & 0\ldots & 0 \\
-\kappa_1\cdots & 0 & 0\ \ldots & 0 & \tau_{11}\cdots & \tau_{1m} & w_1 & \gamma_{12}\cdots & \gamma_{1(n-k-m)} \\
\vdots & & & & & & & & \\
0\ldots & -\kappa_m & 0\ \ldots & 0 & \tau_{m1}\cdots & \tau_{mm} & w_m & \gamma_{m2}\cdots & \gamma_{m(n-k-m)} \\
0\ldots & 0 & 0\ \ldots & 0 & -w_1\cdots & -w_m & 0 & -\beta_2\cdots & -\beta_{n-k-m} \\
0\ldots & 0 & 0\ \ldots & 0 & w_{21}\cdots & w_{2m} & \beta_2 & \beta_{22}\cdots & \beta_{2(n-k-m)} \\
\vdots & & & & & & & & \\
0\ldots & 0 & 0\ \ldots & 0 & w_{(n-k-m)1}\cdots & w_{(n-k-m)m} & \beta_{n-k-m} & \beta_{(n-k-m)2}\cdots & \beta_{)n-k-m)(n-k-m)}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \\ e_{m+1} \\ \vdots \\ e_k \\ a_{k+1} \\ \vdots \\ a_{k+m} \\ a_{k+m+1} \\ a_{k+m+2} \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}
=
$$