

ZAMAN GECİKMELİ KARARSIZ SİSTEMLER İÇİN KATSAYI DİYAGRAM METODU İLE KONTROLÖR TASARIMI

Serdar Ethem HAMAMCI

Özet - Bu çalışmanın amacı kararsız yapıdaki transfer fonksiyonuna sahip zaman gecikmeli sistemlerin kontrolünde klasik PID kontrolörlerin sınırlılıklarını göstermektir. Bu nedenle, bu tür sistemler için daha iyi bir performans elde etmek amacıyla Katsayı Diyagramı Metodu (KDM) olarak adlandırılan bir polinomsal yaklaşımın kullanılması önerilmiştir. KDM ile kontrolör tasarımı eşdeğer zaman sabiti, kararlılık indeksi ve kararlılık sınır indeksi gibi uygun performans kriterlerine karşı kapalı çevrim sisteminin karakteristik polinomunun katsayılarını seçmeye dayalıdır. Yapılan tasarım örneği KDM'in hem referans basamak girişin takibi ve hem de bozucu işaretin söndürülmesi için performansta önemli bir iyileşme sağladığını göstermiştir. Ayrıca tasarlanan kontrolör en kısa yerleşme süresini ve parametre değişimlerine karşı en dayanıklı performansı sağlamıştır.

Anahtar Kelimeler – Katsayı Diyagramı Metodu, Zaman Gecikmesi, Kararsız Sistemler, Dayanıklılık

Abstract - The objective of this paper is to illustrate the limitations of classical PID controllers in controlling time delay systems with unstable transfer functions. Therefore, using a polynomial approach, Coefficient Diagram Method (CDM) has been proposed in order to obtain a better performance for these systems. The controller design by CDM is based on the choice of the coefficients of the characteristic polynomial of the closed loop system according to the convenient performance criteria such as equivalent time constant, stability index, and stability limit index. Design example illustrated that the CDM provides a significantly improved performance both for the reference step input tracking and for the disturbance rejection. Also the designed controller provides the smallest settling time and the most robust performance to the parameter changes.

Key Words – Coefficient Diagram Method, Time Delay, Unstable Systems, Robustness

S. E. Hamamcı, İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Müh. Bölümü, 44069 Malatya.
e-mail: shamamci@inonu.edu.tr

I. GİRİŞ

Pratikte bir çok sistemin yapısında zaman gecikmesi bulunur. Ölü zaman olarak da adlandırılan bu gecikme, sistemin özünden kaynaklanabildiği gibi sistem çıkışlarının işlenerek girişte yeniden kullanılması veya giriş-çıkış işaretlerinin senkron olarak ölçülememesi nedeniyle meydana gelmekte ve sistemin kararlılığı ile geçici hal karakteristiğini bozucu bir etkiye sebep olmaktadır [1]. Kontrol teorisinde son zamanlarda meydana gelen önemli gelişmelere karşın, endüstride zaman gecikmeli sistemlerin kontrolünde halen PID kontrolörler kullanılmaktadır [2]. Bunun en önemli sebebi yapısının basit olması ve genel olarak bir çok sistemin kontrolünde başarılı olmasındandır [3]. Bundan başka pratik gerçekleştirmedeki kolaylığı ve geniş bir çalışma bölgesi için dayanıklı performansa sahip olması da oldukça önemlidir [4]. Tüm bu avantajlarına rağmen klasik PID kontrolörler özellikle polimerizasyon reaktörleri ve biyoreaktörler vb. gibi bazı kararsız yapıları sistemlerde, arzu edilen nominal ve dayanıklı performansı sağlamakta yetersiz kalmaktadırlar. Kararsız yapıları sistemlerin kontrolü üzerine literatürde yapılmış değişik çalışmalar bulunmaktadır. Morari ve Zafiriou [5] dahili model kontrol (internal model control) yapısını kullanarak PID parametrelerinin hesabı için formüller türetmiş, Stahl ve Hippe [6] kutup yerleştirme metodunu kullanmış, Park ve diğ. [7] PID-P yapısını önermiş, Poulin ve diğ. [8] ise adaptif özellikteki PID kontrolör yapısını kullanmıştır.

Bu çalışmada kararsız yapıları sistemlerin kontrolünde karşılaşılan problemlere karşı daha iyi sonuçlar elde etmek için Katsayı Diyagramı Metodu kullanılacaktır. KDM, 1991'de Shunji Manabe tarafından doğrusal ve zamanla değişmeyen tek-girişli tek-çıkışlı sistemlerin kontrolü için geliştirilmiş bir methodur [9]. Yapılan bu çalışma göstermiştir ki, kontrol sistem yapısının özelliği ve kullandığı standart formun avantajları nedeniyle, zaman gecikmeli kararsız sistemlerin kontrolü için KDM önemli bir kontrol metodudur. Metodun en önemli özellikleri sistem ve kontrolör için polinomsal gösterimin kullanılması, iki dereceli (two-degree of freedom) kontrol sistem yapısının kullanılması, kapalı

çevrim sistemine ait birim basamak cevabının genellikle taşmasız olması, arzu edilen yerleşme süresinin başlangıçta belirlenip ona göre tasarımın yapılması, sistem parametrelerinde meydana gelebilecek olan değişimlere karşı kontrol sisteminin dayanıklı (robust) olması, tasarlanan kontrolörün yeterli kazanç ve faz sınır paylarına sahip olması şeklinde sayılabilir [10].

II. KATSAYI DİYAGRAM METODU

Kontrol sistemleri elde edilirken kontrolörün bazı pratik sınırlamalar altında tasarlanması istenir. Kontrolör mümkün olduğunca düşük dereceli olmalı, (eğer mümkünse) minimum fazlı olmalı ve kararlı olmalıdır. Ayrıca kontrolörün pratikte yeterli band genişliği ve güç sınırlamasına sahip olması gerekir. Bu sınırlamalar göz önüne alınmadan kontrolör tasarımı yapılırsa, kararlılık ve zaman cevabı gereksinimleri sağlanabilmesine rağmen dayanıklılık özelliği zayıf olacaktır. Tüm bu problemler göz önüne alınarak önerilen KDM ile tasarlanan kontrolör en düşük dereceli, en uygun band genişliğine sahip ve kapalı çevrimli sistemin zaman cevabı taşmasız özelliğe sahiptir. Bu özellikler ise dayanıklılık, bozucu etkinin yeterince söndürülmesi ve düşük maliyet özelliklerini garantilemektedir [11]

Bir lineer cebrik kontrol metodu olan KDM'in temel prensipleri oluşturulurken, diğer bazı klasik ve modern kontrol tekniklerinin avantajlı kısımları alınarak metodun temel prensiplerine uygun bir şekilde birleştirilmiş ve temel yapının oluşturulmasında daha önceki bir çok deneyim ve fikirden de yararlanılmıştır. Bu şekilde etkili ve verimli bir kontrol tasarım teorisi olarak ortaya çıkan metodun tasarım prosedürünün kolaylığı nedeniyle, oldukça iyi kontrol sistemleri fazla bir zorlukla karşılaşmaksızın ve fazla bir deneyim gerektirmeksizin tasarlanabilmektedir [10].

KDM'nin gücü kontrol edilmesi istenen her sistem için, pratik sınırlar içinde en dayanıklı ve en basit kontrolörleri tasarlayabilmesinde yatar. Ayrıca KDM gerektiğinde, sınırlı sayıda sensörlü ters sarkaç sistemi gibi kararsız sistemlerin kontrolünde, kararsız kontrolörlerde üretir [12]. LQR, kutup-yerleştirme, vb. modern kontrol metodları ile özellikle sanal eksene yakın kutupları olan sistemler için dayanıklı kontrolör üretimi oldukça zor ve hesap isteyen bir işittir [13]. Bu gibi durumlarda KDM tekniğinin, kontrol sisteminin gerek sistem parametrelerindeki değişimi ve gerekse sistemin kendi içindeki sınırlı belirsizliklere karşı dayanıklılık özelliği göstermesi büyük bir avantajdır.

II.1. KDM Kontrol Sistem Yapısı

Tek giriş-tek çıkışlı bir sistem için KDM standart blok diyagramı Şekil 1'de verilmiştir. Burada r kontrol sisteminin girişini, y çıkışını, u kontrol işaretini ve d ise sisteme etkiyen bozucu işareti ifade etmektedir. Şekilde kontrol edilmesi istenen sistemin transfer fonksiyonu için $N(s)$ pay polinomu ve $D(s)$ ise payda polinomu

olarak gösterilmiştir. Aynı şekilde kontrolör transfer fonksiyonu için $A(s)$ payda polinomu, $F(s)$ referans pay polinomu ve $B(s)$ ise geri besleme pay polinomu olarak verilmiştir. Kontrolörün iki pay polinomuna sahip olması, durumu uzayı gösteriminin gözlemlenebilir kanonik formuna benzemektedir. Aynı zamanda iki-dereceli kontrol sistem yapısı (two-degree of freedom) olarak adlandırılan bu yapı ile hem arzu edilen referans işaret takip edilmekte ve hem de bozucu işaret rahatlıkla söndürülebilmektedir. Ayrıca bu şekilde kararsız kutup-sıfır iptallemeleri ortadan kalkmakta ve pratik gerçekleştirilmede daha az sayıda integratör elemanı kullanılmış olmaktadır [14].

Kapalı çevrim sistemine ait çıkış ifadesi

$$y = \frac{N(s)F(s)}{P(s)}r + \frac{A(s)N(s)}{P(s)}d \quad (1)$$

şeklinde olup, $P(s)$ karakteristik polinomu

$$P(s) = D(s)A(s) + N(s)B(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^i \quad (2)$$

ile ifade edilmektedir.

KDM'de tasarım parametreleri eşdeğer zaman sabiti τ , kararlılık indeksi γ_i ve kararlılık sınır indeksi γ_i^* olup, karakteristik polinomun katsayıları cinsinden

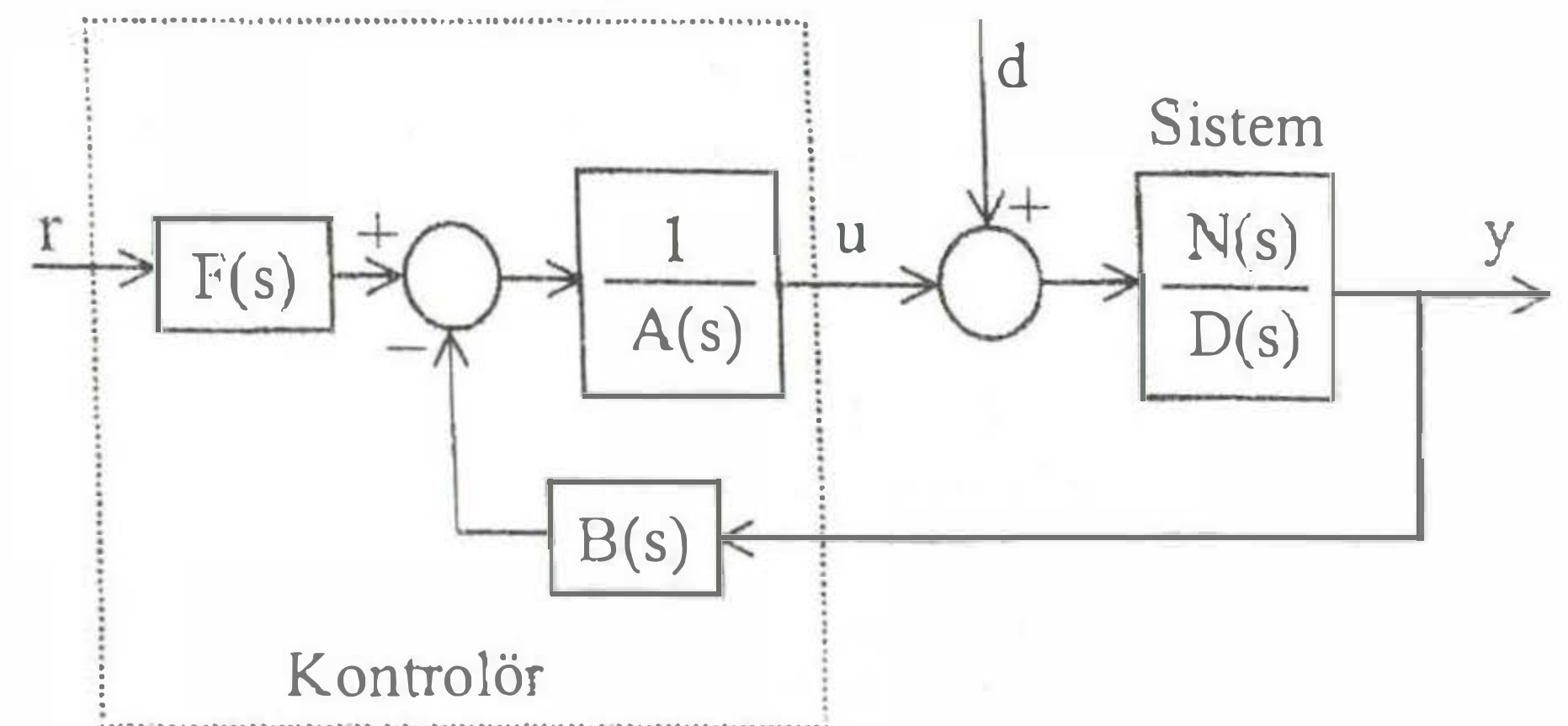
$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i+1}a_{i-1}}, \quad i=1, \dots, n-1, \quad \gamma_0 = \gamma_n = \infty \quad (3a)$$

$$\tau = \frac{a_1}{a_0} \quad (3b)$$

$$\gamma_i^* = \frac{1}{\gamma_{i-1}} + \frac{1}{\gamma_{i+1}} \quad (3c)$$

tanımlanmaktadır. Eşdeğer zaman sabiti kontrol sisteminin zaman cevabının hızını tayin ederken, kararlılık indeksi ve kararlılık sınır indeksi ise zaman cevabının şeklini, kontrol sisteminin kararlılık ve dayanıklılığını tayin eder. Denklem 3a-c'den yola çıkılarak a_i katsayıları

$$a_i = \frac{a_0 \tau^i}{\gamma_{i-1} \gamma_{i-2}^2 \dots \gamma_1^{i-1}} \quad (4)$$



Şekil 1. KDM kontrol sistemine ait blok diyagramı.

şeklinde ifade edilebilir. Son olarak Denklem 2'deki karakteristik polinom, Denklem 3a-c ve 4'ün yardımıyla tasarım parametreleri cinsinden

$$P(s) = a_0 \left[\sum_{i=2}^n \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{\gamma_{i-j}} \right) (\tau s)^i \right] + \tau s + 1 \quad (5)$$

şeklinde verilir. Denklem 5, tasarıma başlarken belirlenen tasarım parametreleri göz önüne alınarak oluşturulan hedef transfer fonksiyonu olarak kullanılacaktır.

II.2. Kararlılık, Optimum Performans ve Dayanıklılık

Lineer-zamanla değişmeyen sistemlerin kararlılığı için temel olarak Routh kriteri kullanılmaktadır. Bu amaçla Routh'un ortaya koyduğu kriter, Hurwitz kararlılık için gerekli olan zorunluluk şartlarını ifade etmektedir. Ancak Routh kriteri, kontrol sistem tasarımı için aşağıda verilen sebepler nedeni ile yetersiz kalmaktadır:

- Routh'un kriteri, bir polinomun tam olarak kararlı ya da kararsız olduğunu ifade eder. Ancak pratik tasarımda oldukça önemli olan kararlılık derecesini ifade etmede yetersizdir.
- Routh kriteri özellikle sistemin derecesi arttıkça tasarım parametrelerine göre doğrusal olmayan bir fonksiyon ürettiği için, kontrol sisteminin kararlılığını analiz etmede bazı zorluklar ortaya çıkmaktadır. Bu nedenle sistem parametrelerinin değişiminin kararlılık üzerine etkisi açıkça görülememektedir.
- Tasarım için genellikle sistemin matematiksel modeli kullanıldığı için, pratikte ortaya çıkabilecek bazı hatalar göz ardı edilmek zorundadır.

Bu nedenle kesin eşitlik içermeyen bir kararlılık kriterinin ortaya konulması ihtiyacı vardır [15]. Bundan dolayı, kontrol sisteminin kararlılık kriterleri için KDM'in yapısına Routh-Hurwitz kriterinin yanında Lipatov-Sokolov kriteri de [16] dahil edilmiştir [17]. Lipatov'un şartları, karakteristik polinomun Hurwitz kararlı yada kararsız olduğunun analizi için yalnızca yeterlilik şartlarını verir. Bu manada Lipatov-Sokolov kriteri, Routh kriterine göre bir yaklaşıklık kriteri olarak göz önüne alınabilir. Bu kriter, özellikle sistem derecesinin dörtten büyük olduğu durumlarda ayrıntılı bir inceleme yapmadan sistemin kararlılığı hakkında yaklaşık bilgiler verir. Aynı zamanda Lipatov-Sokolov kriterindeki şartlar, KDM'in tasarım parametreleri ile yakından ilişkilidir ve bu parametreler cinsinden kolayca şu şekilde ifade edilmektedir:

- Kararsızlık için zorunluluk şartı:

$$\gamma_i \gamma_{i-1} \leq 1 \quad \exists i \text{ için, } i=2, \dots, n-1. \quad (6a)$$

- Kararlılık için yeterlilik şartı:

$$\gamma_i \gamma_{i-1} > 2.1505 (= \sqrt{1.4665}) \quad \forall i \text{ için, } i=2, \dots, n-1. \quad (6b)$$

Denklem 6b'den, eğer kararlılık indekslerinin tümü 1.5'den büyük seçilirse kontrol sisteminin kararlılığının garanti altına alındığı açıkça görülmektedir.

KDM'de karakteristik polinomun seçilmesi işlemi için Standart Manabe Formu kullanılır. Bu formda kararlılık indeksleri

$$\gamma_1 = 2.5, \quad \gamma_i = 2 \quad i=2 \sim (n-1), \quad \gamma_0 = \gamma_n = \infty \quad (7)$$

olarak seçilir. Formun en önemli özellikleri şu şekilde özetlenebilir:

- Standart form kullanılarak tasarlanan kontrol sistemine ait basamak fonksiyonu cevabının taşınmaz olması,
- Kapalı çevrimli sistemin birim basamak fonksiyonuna olan cevabı için yerleşme süresi 2.5τ civarında olup [14], diğer metodlara göre bu sürenin daha küçük olması,
- Aynı τ ve sıfırıncı dereceden pay polinomu için standart formun birim basamak cevabı, karakteristik polinomun derecesi ne olursa olsun yaklaşık olarak aynı olması,
- Kontrolörün kazanç ve faz sınır payları arzu edilen optimum değerlerde elde edilmesi

Kararlılık indeksleri standart formdaki gibi seçildiğinde, kontrol sisteminin dayanıklılığı oldukça iyi olmaktadır. Denklem 7'de verilen standart değerler tasarımcının arzu ettiği performansın özelliğine göre $\gamma_i > 1.5\gamma_i^*$ için değiştirilebilir. Bu sayede tasarımcı, karakteristik polinom ile birlikte kontrolör tasarımında bir serbestliğe kavuşmuş olur.

Lipatov-Sokolov kararlılık kriteri hakkında daha fazla bilgi için [16] ve standart Manabe formu için ise [17] nolu referanslar incelenebilir.

III. TASARIM PROSEDÜRÜ

Endüstride en çok kullanılan kararsız yapıları zaman gecikmeli sistemler

$$G(s) = \frac{K}{Ts - 1} e^{-\theta s} \quad (8a)$$

$$G(s) = \frac{K}{T_1 s^2 + T_2 s - 1} e^{-\theta s} \quad (8b)$$

şeklinde birinci dereceden yada ikinci dereceden zaman gecikmeli sistem şeklinde ifade edilirler. Sistemin yapısından da görülebileceği gibi sağ yarı düzlemdeki kutup nedeniyle sistemin açık çevrim birim basamak fonksiyonu cevabı sınırsızdır. Bu çalışmada zaman gecikmesi küçük olan sistemlerin kontrolü üzerinde durulacaktır. Büyük zaman gecikmesine sahip olan sistemlerin kontrolünde ise daha çok Smith kestirimci yapısının kullanılması tavsiye edilmektedir [2].

Denklem 8a,b'de verilen kararsız yapıdaki sistemlerin KDM ile kontrolü için genel ve sistematik bir tasarım prosedürü şu şekilde verilebilir:

1. Tasarıma başlamadan önce belirlenen bilgiler

1a. Zaman gecikmesi için yaklaşık eşdeğerinin kullanılması:

Zaman gecikmesini ifade eden $e^{-\theta s}$ için

$$e^{-\theta s} \approx \frac{-\frac{\theta}{2}s + 1}{\frac{\theta}{2}s + 1} \quad (9)$$

olarak ifade edilen 0/1 Pade yaklaşımı kullanılarak Denklem 8a,b'deki sistem yapısının

$$G(s) \approx \frac{-\frac{K\theta}{2}s + K}{\frac{T\theta}{2}s^2 + (T - \frac{\theta}{2})s - 1} \quad (10a)$$

$$G(s) \approx \frac{-\frac{K\theta}{2}s + K}{\frac{T_1\theta}{2}s^3 + (T_1 + \frac{T_2\theta}{2})s^2 + (\mp T_2 - \frac{\theta}{2})s - 1} \quad (10b)$$

şeklinde doğrusal-zamanla değişmeyen eşdeğeri elde edilir.

1b. $A(s)$, $B(s)$ ve $F(s)$ kontrolör polinomlarının seçilmesi:

Genel olarak, kontrol edilmesi istenen doğrusal, zamanla değişmeyen bir sistemin transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_r s^r + b_{r-1} s^{r-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (11)$$

şeklinde ifade edilir. KDM polinomsal gösterime sahip bir metod olduğundan, sistemin transfer fonksiyonu birbirinden bağımsız iki ayrı polinom olarak düşünülür. Bu polinomlar, derecesi m olan $N(s)$ pay polinomu ve derecesi r olan $D(s)$ payda polinomudur ($m \leq r$). Böyle bir sistem için seçilecek olan $A(s)$ ve $B(s)$ kontrolör polinomları

$$A(s) = \sum_{i=0}^p l_i s^i \quad \text{ve} \quad B(s) = \sum_{i=0}^q k_i s^i \quad (12)$$

formunda olmalıdır. Bu noktada, seçilecek olan polinomların derecesi önem kazanmaktadır. Bunu belirleyen en önemli etmen ise sisteme etkiyen herhangi bir bozucu işaretin varlığı ve varsa türüdür. Tablo 1'de kontrolör polinomlarının seçimine ait bilgiler verilmiştir. Denklem 1'den faydalanarak oluşturulan bu bilgiler, Denklem 1'den faydalanarak ve bozucu işareti tamamen söndürerek arzu edilen zaman cevabını elde edecek şekilde düzenlenmiştir. Tabloda sisteme etkiyen bozucu işaretin türüne göre, kullanılacak olan en düşük dereceden kontrolör polinomlarının seçimi tavsiye edilmektedir. Bozucu işareti tamamen söndürmek için

Tablo 1. Değişik bozucu türleri göz önüne alınarak $A(s)$ ve $B(s)$ kontrolörlerinin seçimi.

	Bozucu Yok	Basamak tipi	Rampa tipi	Darbe / Sinüs tipi
Der {A(s)}	$n-1$	n	$n+1$	$n-1$
Der {B(s)}	$n-1$	n	$n+1$	$n-1$
Şart	-	$l_0=0$	$l_0=l_1=0$	-
Der {P(s)}	$2n-1$	$2n$	$2n+1$	$2n-1$

kontrolör polinomunun yapısına ait gerekli olan şartlar tabloda üçüncü satırda verilmiştir. En alt satırda ise, sonuçta elde edilecek olan kontrol sisteminde ait karakteristik polinomun derecesi verilmiştir.

Endüstride bir sisteme etkiyen bozucu işaret tek bir tipte olmayabilir. Örneğin sisteme çalışma anında, bazı zamanlarda basamak türünde ve bazı zamanlarda ise rampa türünde bozucu işaretler etkiyebilir. Bu durumda bu sistemin kontrolü ve bozucu işaretin tam olarak söndürülebilmesi için tasarımcı, tablodan en yüksek dereceden polinom gerektiren rampa tipine göre kontrolörleri seçmesi gerekmektedir.

Ön-filtreleme elemanı olarak tanımlanan $F(s)$ ise

$$F(s) = (P(s)/N(s))|_{s=0} \quad (13)$$

şeklinde seçilir. Böylece kapalı çevrimli sistemin kalıcı hal cevabında meydana gelebilecek olan herhangi bir hata değeri sıfıra indirilmiş olur. Kontrol edilmesi istenen sistem Tip-1 türünde ise, kontrol sistemi de Tip-1 türünde olur ve böylece arzu edilen zaman cevabı taşmasız olarak elde edilir. Eğer sistem Tip-2 veya daha üstü türde ise bu durumda taşmalı ancak arzu edilen zaman domeyni özellikleri sağlanmış bir cevap elde edilir.

1c. Tasarım için anahtar parametreler olan eşdeğer zaman sabiti ve kararlılık indeksinin seçilmesi

- **Eşdeğer zaman sabitinin seçilmesi:** KDM tekniği ile kontrol sisteminin tasarımına başlamadan önce, arzu edilen zaman cevabı için yerleşme süresinin değeri tayin edilmelidir. Tasarımda temel olarak standard Manabe formu kullanıldığından yerleşme süresi ile eşdeğer zaman sabiti arasındaki ilişki göz önüne alınır. Buna göre eşdeğer zaman sabiti $\tau = t_s/2.5$ olarak belirlenir (t_s , arzu edilen yerleşme süresi).

KDM'de eşdeğer zaman sabiti τ ile kontrol işareti arasında kapalı bir ilişki vardır. Eğer τ büyürse zaman cevabı yavaş olur ve kontrol işaretinin genliği küçülür. τ küçülürse zaman cevabı hızlanır ve kontrol işaretinin genliği büyür. Bu nedenle pratikteki uygulamalar için, τ 'nın değeri rasgele seçilememektedir. Bu işlem basitçe deneme-yanılma yolu ile yapılmaktadır. Çünkü diğer kontrol metotlarının çoğunda kontrol işaretinin genliği $t=0$ anında maksimum olmakta, fakat KDM'de

ise bunun aksine $t > 0$ için kontrol işaretinin genliği maksimum değere çıkmaktadır. Bu nedenle $|u(t)|$ ile τ arasında açık bir ilişki kurulamamaktadır.

- Kararlılık indeksi ve kararlılık sınır indeksinin seçilmesi: Tasarımda Manabe formu kullanıldığından, kararlılık indeksi Denklem 7'de verilen standart değerlere göre seçilir. Kısım II.2'de belirtildiği gibi arzu edilen performans özelliğine göre $\gamma_i > 1.5\gamma_i^*$ için bu değerler değiştirilebilir. Kararlılık sınır indeksi ise Denklem 3c ile belirlenir.

2. Tasarım sırasında karakteristik polinom ve kontrolör polinomlarının katsayılarının hesaplanması:

KDM'de karakteristik polinom ve dolayısı ile kontrolör polinomlarının hesaplanmasında temel olarak kutup-yerleştirme metodundan faydalanılmaktadır. Buna göre önce 1b maddesinde anlatıldığı gibi Denklem 12 ve Tablo 1'deki bilgiler ile belirlenen kontrolör polinomları, Denklem 2'de yerine konularak k_i ve l_i parametrelerine bağlı bir polinom elde edilir. Daha sonra 1c maddesinde belirlenen tasarım parametreleri Denklem 5'te yerine konularak bir hedef polinom ($P_{hedef}(s)$) belirlenir. Bu iki polinom birbirleri ile eşitlenerek

$$A(s)D(s) + B(s)N(s) = P_{hedef}(s) \quad (14)$$

şeklinde Diophantine eşitliği elde edilmiş olur. Daha sonra denklem

$$[C]_{s \times s} \begin{bmatrix} l_i \\ k_i \end{bmatrix}_{s \times 1} = [a_i]_{s \times 1} \quad (15)$$

şeklinde Sylvester matris formuna dönüştürülür ($s=p+n$). Burada l_i ve k_i 'lerden oluşan vektör bilinmeyen kontrolör parametrelerini, C matrisi kontrolör parametrelerinin katsayılarını ve a_i 'lerden oluşan vektör ise arzu edilen hedef polinomun katsayılarını ifade eder. Bu şekilde s bilinmeyenli denklem sistemi, basit bir matris işlemi ile kolayca çözümlenerek kontrolör parametreleri ve dolayısı ile karakteristik polinom elde edilmiş olur. Denklem 1 ile verilen kapalı çevrimli sistemin transfer fonksiyonunu tamamen elde etmek için pay kısmındaki F(s) polinomu ise Denklem 13 yardımı ile belirlenir. Bu şekilde kontrol sistemi son şeklini almış olur.

3. Tasarım sonrası yapılan işlemler

Bu kısımda kontrol sistemi simüle edilerek kontrol işareti için doyum seviyesinin kontrolü test edilir. Eğer sistem doyuma gidiyorsa 1c maddesine dönülüp τ yeterince artırılır ve işlemler tekrar edilir. Aynı şekilde $|u(t)|$ çok küçükse arzu edilen miktarda τ biraz daha küçültülerek sistem cevabı hızlandırılabilir.

Verilen tasarım prosedürünün verimliliğini göstermek için bundan sonraki kısımda bir tasarım uygulaması gerçekleştirilecektir.

IV. TASARIM UYGULAMASI

Birinci dereceden bir zaman gecikmeli sistemin transfer fonksiyonu

$$G(s) = \frac{1}{s-1} e^{-0.4s} \quad (16)$$

şeklinde verilsin. Sisteme $t=20$ s'de ve genliği 0.5 olan basamak fonksiyonu şeklinde bir bozucu işaret uygulanmaktadır. Ayrıca çalışma sırasında sistem parametrelerinde $\pm 10\%$ 'luk değişimler meydana gelmektedir. Buna göre sistemin zaman cevabı özellikleri göz önünde bulundurularak, mümkün olan en iyi şekilde kontrol edilmesi amaçlanmaktadır.

Bu sistem daha önce Huang ve Chen. [18] ile Rotstein ve Lewin [19] tarafından değişik prosedürlere sahip PID kontrolör, Park ve diğ. [7] tarafından ise PID-P kontrolör yardımı ile kontrol edilmiştir. Burada bu üç metod ile elde edilen kontrol sistem performansı göz önüne alınarak, bir KDM kontrolörü tasarlanacak ve bu tasarım sonucu elde edilecek olan kontrol sisteminin performansı adı geçen üç kontrol sisteminin performansı ile karşılaştırılacaktır.

PID ve PID-P kontrolörlere ait transfer fonksiyonları

$$G_{c1}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \quad \text{ve} \quad G_{c2}(s) = 0 \quad (17a)$$

$$G_{c1}(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s\right) \quad \text{ve} \quad G_{c2}(s) = K_f \quad (17b)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Bu yapılar için daha ayrıntılı bilgi için ilgili referanslara bakılabilir [7, 18, 19].

Huang-Chen metodu kullanıldığında PID kontrolörün parametreleri $K_p=2.636$, $T_i=5.673$ ve $T_d=0.118$ olarak hesaplanmıştır. Rotstein-Lewin ise tatmin edici bir zaman cevabı elde etmek için PID kontrolör parametrelerini $K_p=2.25$, $T_i=5.76$ ve $T_d=0.20$ olarak belirlemiştir. Park ve diğ. PID-P kontrolör için $K_p=0.437$, $T_i=0.418$, $K_f=1.756$ ve $T_d=0.472$ değerlerini kullanmıştır.

Yukarıda verilen üç kontrolörün zaman cevabı özellikleri (özellikle yerleşme süresi ve kontrol işaretinin genliği) göz önünde bulundurularak KDM tasarım prosedürü aşağıdaki gibi uygulanmıştır:

1. Tasarıma başlamadan önce belirlenen bilgiler

1a. Zaman gecikmesini ifade eden $e^{-0.4s}$ için

$$e^{-0.4s} \approx \frac{-0.2s + 1}{0.2s + 1} \quad (18)$$

şeklinde Pade dönüşümü kullanılarak

$$G(s) \approx \frac{-0.2s + 1}{0.2s^2 + 0.8s - 1} \quad (19)$$

şeklinde doğrusal-zamanla değişmeyen sistem eşdeğeri elde edilir.

1b. Kontrol edilmesi istenen sisteme ait transfer fonksiyonu polinomsal formda

$$N(s) = -0.2s + 1 \quad (20a)$$

$$D(s) = 0.2s^2 + 0.8s - 1 \quad (20b)$$

olarak ifade edilir. Sistemin derecesi 2 ve sisteme etkiyen bozucu işareti basamak fonksiyonu şeklinde olduğundan, Tablo 1'de verilen bilgiler göz önüne alınarak kontrolör polinomlarının derecesi ve tipi belirlenir. Buna göre $A(s)$ ve $B(s)$ polinomlarının derecesi de 2 olarak seçilmelidir. Ayrıca bozucu işareti söndürebilmek için $l_0=0$ kabul edilerek $A(s)$ polinomu integrator içeren bir forma dönüştürülür. Buna göre $A(s)$ ve $B(s)$ kontrolör polinomları

$$A(s) = l_2 s^2 + l_1 s \quad (21a)$$

$$B(s) = k_2 s^2 + k_1 s + k_0 \quad (21b)$$

olarak belirlenmiş olur.

1c. Bu uygulamada PID ve PID-P kullanılarak elde edilen üç kontrol sistemine ait birim basamak cevabının yerleşme süresi ve kontrol işaretinin genliği göz önünde bulundurularak, KDM kontrol sistemi için hedef yerleşme süresi 2.75 s. olarak belirlenmiştir. Yerleşme süresi ile eşdeğer zaman sabiti arasındaki ilişki yaklaşık olarak $t_s \approx 2.5 \tau$ olarak verildiğinden, $\tau = 2.75/2.5 \approx 1.1$ olarak seçilir. Yapılan çalışma sonucu daha uygun zaman cevabı elde etmek için kararlılık indeksi ise standard Manabe formundan biraz farklı seçilerek $\gamma_i = \{2.4, 2.5, 5\}$ şeklinde belirlenir. Kararlılık sınır indeksi ise Denklem 3c'den $\gamma_i^* = \{0.67, 0.62, 0.4\}$ olarak hesaplanır.

2. Tasarım sırasında karakteristik polinom ve kontrolör polinomlarının katsayılarının hesaplanması:

Denklem 21a ve b'de kısmen belirlenen kontrolör polinomları Denklem 2'de yerine konursa

$$P(s) = 0.2l_2 s^4 + (0.8l_2 + 0.2l_1 - 0.2k_2) s^3 + (-l_2 + 0.8l_1 - 0.2k_1 + k_2) s^2 + (-l_1 - 0.2k_0 + k_1) s + k_0 \quad (22)$$

elde edilir. Daha sonra 1c maddesinde belirlenen tasarım parametreleri Denklem 5'te yerine konularak

$$P_{hedef}(s) = 0.0034s^4 + 0.0924s^3 + 0.5042s^2 + 1.1s + 1 \quad (23)$$

şeklinde bir hedef polinom belirlenir. l_i ve k_i parametrelerini hesaplayabilmek için Denklem 22 ve 23 birbirine eşitlenerek dört bilinmeyenli dört denklem elde edilir. İşlemi kolaylaştırmak için bu denklem seti Denklem 15'te verilen Sylvester formuna dönüştürülür:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -0.2 \\ -1 & 0.8 & 1 & -0.2 & 1 \\ 0.8 & 0.2 & -0.2 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_2 \\ l_1 \\ k_2 \\ k_1 \\ k_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1.1 \\ 0.5042 \\ 0.0924 \\ 0.0034 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Denklem 24'de matris eşitliği haline dönüştürülen denklem seti MATLAB ile kolayca çözümlenerek kontrolör parametreleri

$$A(s) = 0.0169s^2 + 0.7347s \quad (25a)$$

$$B(s) = 0.3403s^2 + 2.0347s + 1 \quad (25b)$$

şeklinde elde edilir. $F(s)$ referans pay polinomu ise Denklem 13'den

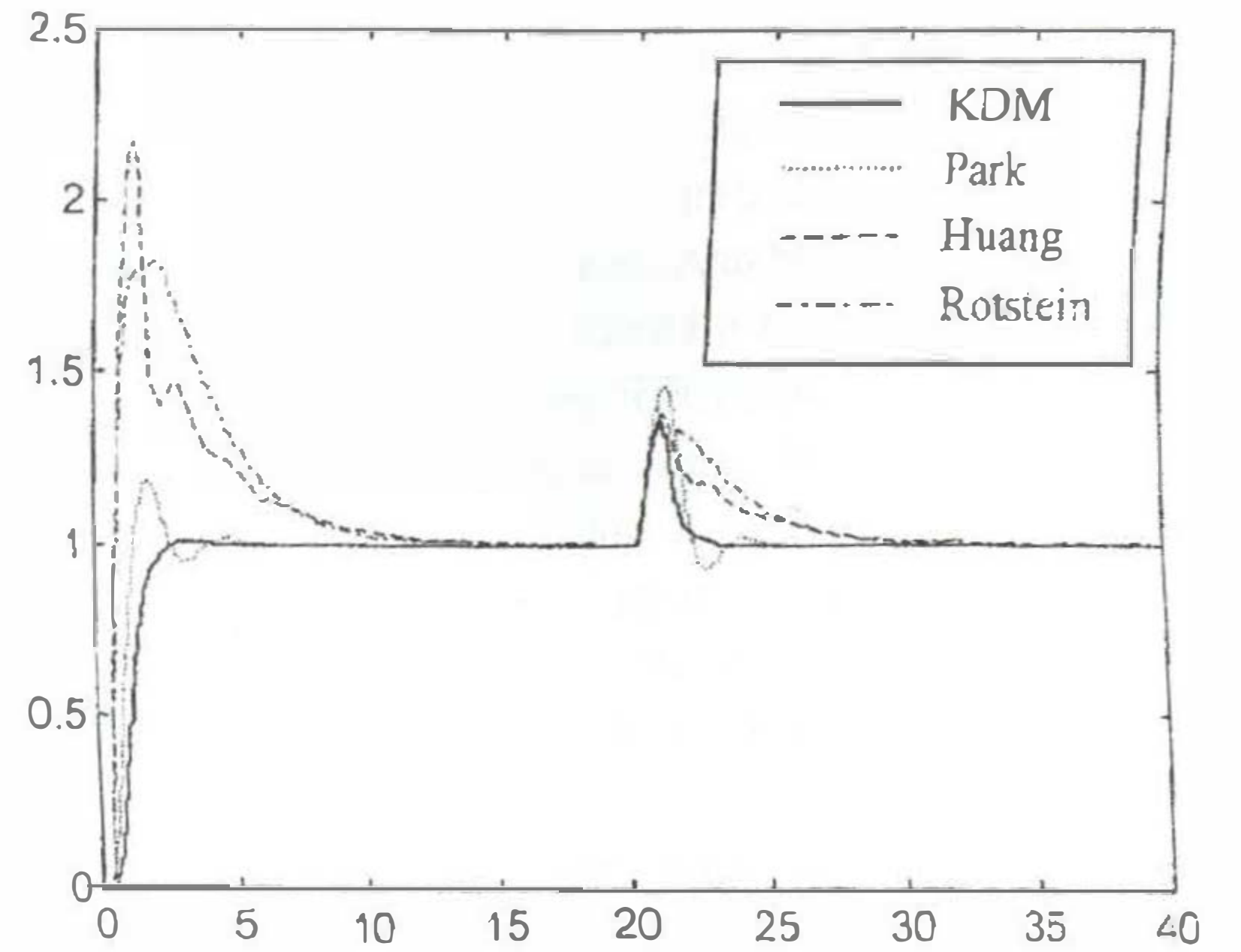
$$F(s) = P(s)/N(s)|_{s=0} = 1 \quad (25c)$$

olarak hesaplanır.

3. Tasarım sonrası yapılan işlemler:

Bu kısımda tasarlanan kontrol sisteminin arzu edilen performansı sağlayıp sağlamadığı kontrol edilir. Aşağıda, KDM ile tasarlanan kontrol sisteminin performansı diğer üç kontrol sistemi ile karşılaştırmalı olarak verilerek bir kıyaslama yapılacaktır.

1. Kontrol sisteminin birim basamak fonksiyonuna cevabı: Şekil 2'de dört ayrı metodla tasarlanan kontrol sistemine ait zaman cevapları verilmiştir. Şekilde PID kontrolörlerin diğer iki metoda göre daha büyük taşma özelliğine sahip olduğu görülürken, KDM kontrol ile neredeyse taşmasız denilebilecek bir cevap elde edilmektedir. Ayrıca zaman cevabının yerleşme süreleri göz önüne alındığında KDM metodunun en iyi değerlere sahip kontrolörü ürettiği görülmektedir. Tablo 2'de her bir kontrol metodu için zaman cevabı performans değerleri verilmiştir.



Şekil 2. Dört ayrı metod ile tasarlanan kontrol sistemlerine ait birim basamak fonksiyonu cevapları.

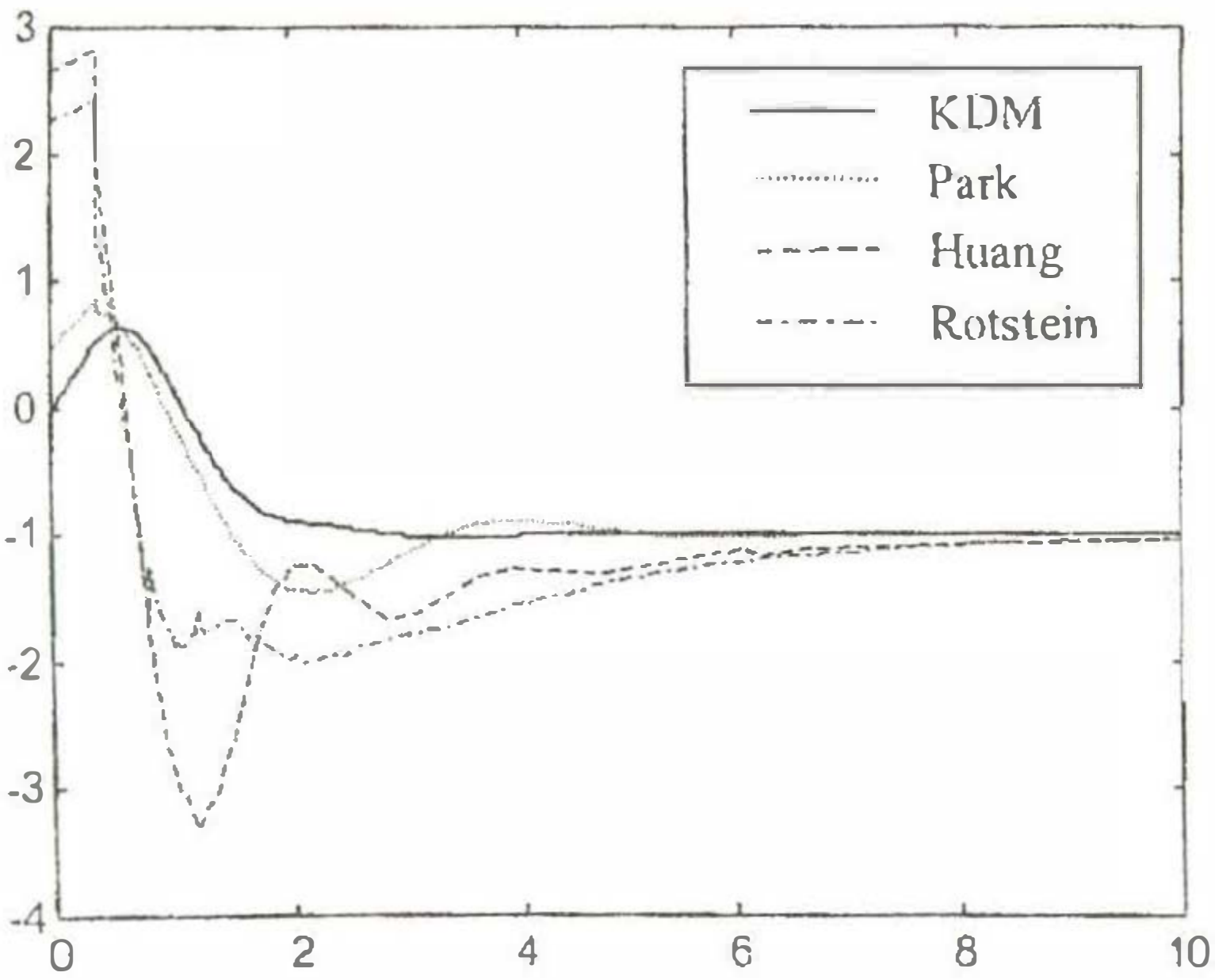
Tablo 2. Şekil 2'de verilen zaman cevabı eğrilerine ait performans değerleri.

	Yerleşme süresi	% Maksimum Taşma
Huang PID	11.8 s	217.5
Rotstein PID	10.6 s	182.7
Park PID-P	4.74 s	25.8
KDM	2.58 s	0.9

Genliği 0.5 olan birim basamak fonksiyonu şeklindeki bozucu işaret $t=20$ s'de uygulandığında, bu dört metod arasında KDM kontrol metodunun bozucu etkiyi söndürmede daha iyi bir performansa sahip olduğu görülmektedir. Çünkü diğer üç metoda ait bozucu işaret cevabı daha uzun süreli bir bozulmaya uğradıktan sonra tekrar kararlı hale dönmektedir.

2. Kontrol sisteminin ürettiği kontrol işaretleri: Dört ayrı metodla tasarlanan kontrol sistemi için girişlerine birim basamak fonksiyonu uygulandığında elde edilen kontrol işaretlerine ait eğriler Şekil 3'te verilmiştir. Şekilde PID kontrolörlerin diğer iki metoda göre oldukça büyük genlikli kontrol işaretine sahip oldukları görülmektedir. Bu nedenle kontrol işaretinin, sürücü elemanın (actuator) özelliğine göre doyuma gitmesi büyük bir olasılıktır. PID-P ve KDM kontrolör ile elde edilen kontrol işaretleri birbirine yakın gibi görünse de, KDM ile elde edilen işaretin genliği daha küçüktür ve daha kısa bir zamanda kararlı hale dönmektedir. Daha iyi bir karşılaştırma için her bir kontrol metoduna ait kontrol işaretinin performans değerleri Tablo 3'te verilmiştir.

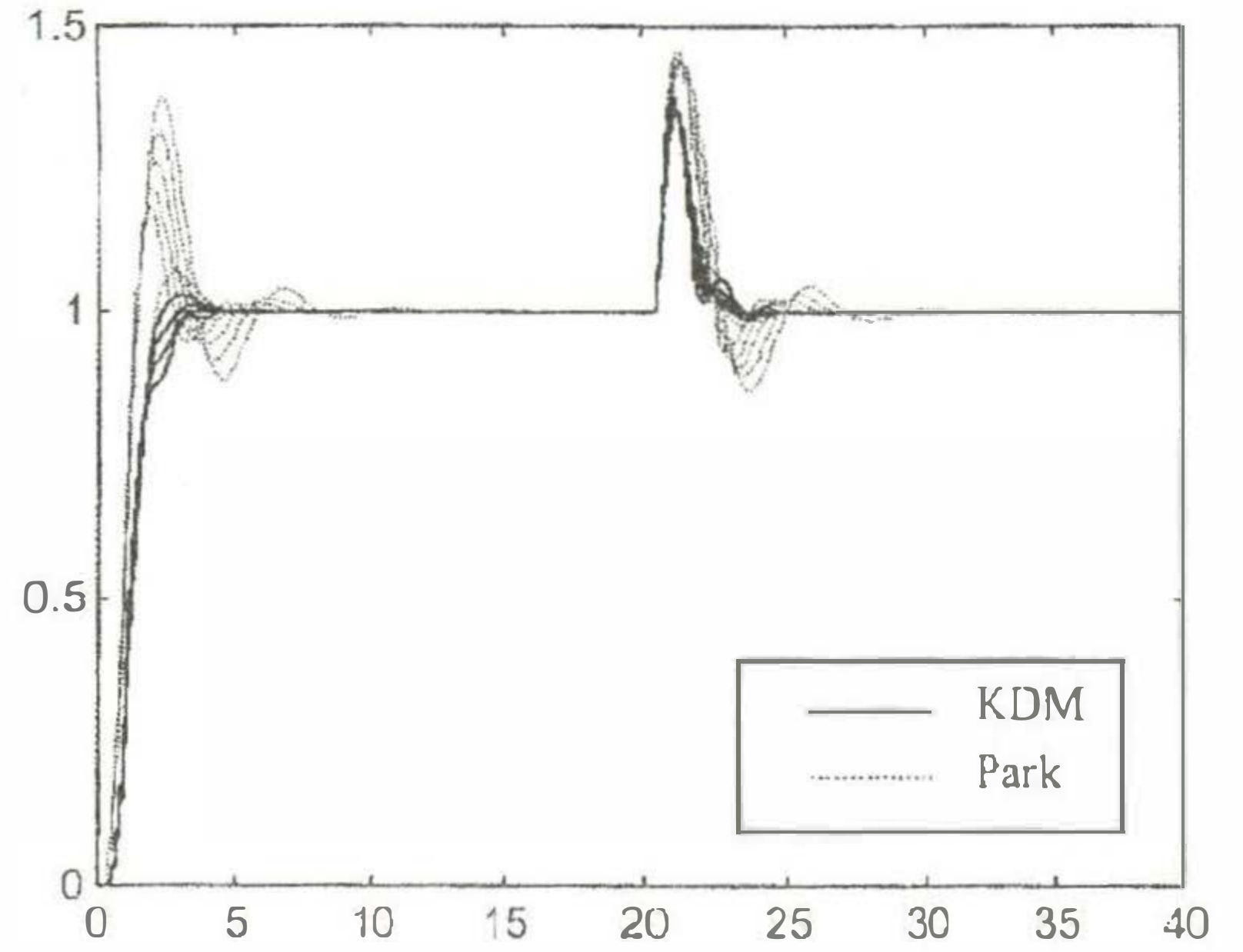
3. Kontrol sisteminin parametrik belirsizliğe karşı dayanıklılığı: Dayanıklılık analizi için birim basamak fonksiyonu cevabı daha iyi olan KDM ve PID-P kontrolörleri inceleme altına alınmıştır. Sistemin kazanç parametresinde %5 aralıklarla meydana gelen $\pm\%10$ 'luk parametre değişimi için kontrol sistemlerinin birim basamak fonksiyonu cevapları Şekil 4'de verilmiştir.



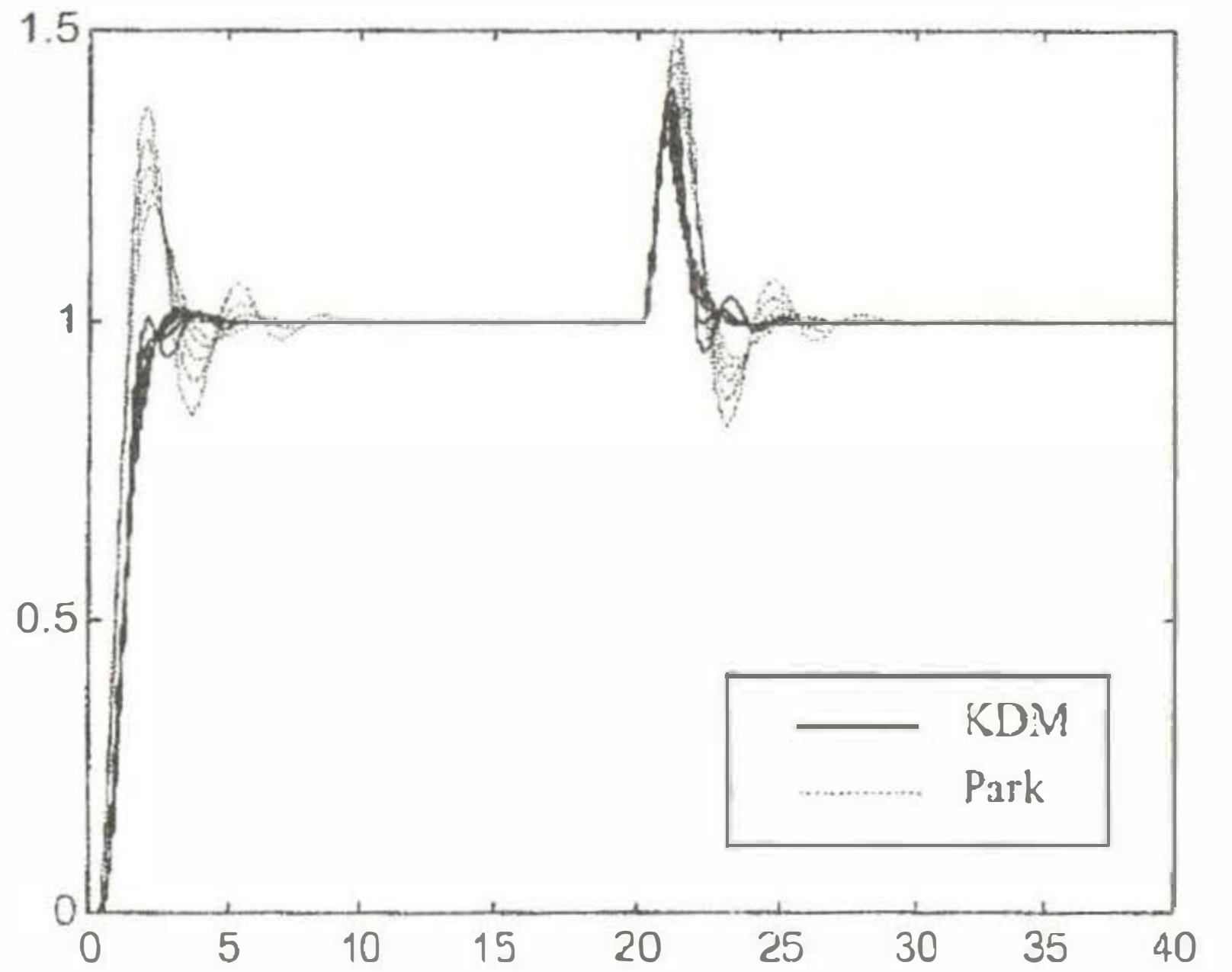
Şekil 3. Kontrol sistemlerinin ürettikleri kontrol işaretleri.

Tablo 2. Şekil 3'de verilen kontrol işaretleri eğrilerine ait performans değerleri.

	$ u(t) $	yerleşme süresi
Huang PID	3.33	13.8 s.
Rotstein PID	2.4	11 s.
Park PID-P	1.5	5.15 s.
KDM	1	2.7 s.



Şekil 4. Sistemin kazanç parametresinde %5 aralıklarla meydana gelen $\pm\%10$ parametre değişimi için kontrol sistemlerinin birim basamak fonksiyonu cevapları.



Şekil 5. Sistemin zaman gecikme değerinde %5 aralıklarla meydana gelen $\pm\%10$ parametre değişimi için kontrol sistemlerinin birim basamak fonksiyonu cevapları.

Şekil 4'den KDM kontrol sisteminin, kazanç parametresindeki değişimlere karşı daha dayanıklı olduğu görülmektedir. Çünkü KDM'e ait eğriler genel olarak yerleşme süresi için izin verilen bölge içinde kalmıştır.

Aynı şekilde sistemin zaman gecikmesi değerinde %5 aralıklarla meydana gelen $\pm\%10$ parametre değişimi için, seçilen iki kontrol sisteminin birim basamak fonksiyonu cevapları Şekil 5'te verilmiştir. Yine KDM metodunun PID-P metoduna göre daha dayanıklı olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak dört ayrı metod için elde edilen kontrolör ve kapalı çevrimli sistemin zaman cevapları göz önüne alındığında KDM metodunun diğer üç metoda göre oldukça avantajlı olduğu görülmektedir.

V. SONUÇLAR

Bu çalışmada, doğrusal kontrolör polinomları kullanılarak oluşturulan KDM kontrol sistemi ile kararsız yapıdaki zaman gecikmeli sistemlerin kontrolü için bir tasarım prosedürü verilmiştir. Bu prosedürde temel nokta, gecikme elemanı yerine Pade yaklaşımının kullanılması ve KDM tasarım parametrelerinin uygun bir şekilde seçilerek optimal kontrol işleminin gerçekleştirilmesidir. Verilen prosedür, bu tür sistemlerin kontrolünde kullanılan diğer kontrol tekniklerine göre oldukça kolay, sistematik, ve açıktır. Bölüm 4'te verilen karşılaştırmalı tasarım örneğinde, bu prosedürün ne kadar başarılı bir şekilde ortaya konulduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

- [1]Gorecki, H., Fuksa, S., Grabowski, P and Korytowski, A., Analysis and Synthesis of Time Delay Systems. John Wiley, NY, 1989.
- [2]S. Ṁzhi and D.P. Atherton, "Autotuning and controller design for processes with small time delays", IEE Proc.-Control Theory Appl., vol. 146, no. 5, pp.415-425, 1999.
- [3]W. Tan, J. Liu and P.K.S. Tam, "PID tuning based on loop-shaping H-inf control", IEE Proc.-Control Theory Appl., vol. 145, no. 6, pp.485-490, 1998.
- [4]K.J. Astrom and T. Hagglund, "Automatic tuning of simple regulators with specificatins on phase and amplitude margins," Automatica, vol. 20, no. 5, pp. 645-651, 1984.
- [5]M. Morari and E. Zafiriou, Robust Process Control, Prentice Hall, Englewood, NJ, 1989.
- [6]H. Stahl and P. Hippe, "Design of pole-placing controllers for stable and unstable systems with pure time delay", Int. J. Control, vol.45, pp.2173-2182, 1987.
- [7]J. H. Park, S.W. Sung and I. Lee, "An enhanced PID control strategy for unstable proceses", Automatica, vol.34(6), pp.751-756, 1998.
- [8]E. Poulin, A. Pomerleau, A. Desbiens and D. Hodouin, "Development and evaluation of an auto-tuning and adaptive PID controller", Automatica, vol.32, pp.71-82, 1996.
- [9]S. Manabe, "Unified interpretation of classical, optimal and H ∞ control", Journal of SICE, vol.30, no.10, pp.941-946, 1991.
- [10]S. Manabe, "Coefficient Diagram Method", 14th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, Seoul, 1998.
- [11]S. Manabe and Y.C. Kim, "Recent development of Coefficient Diagram Method", ASSC'2000 3rd Asian Control Conference, Shanghai, 2000.
- [12]S. Manabe, "A low cost inverted pendulum system for control system education", The 3rd IFAC Symposium on advances in Control Education, Tokyo, 1994.
- [13]R.A. Mills and A.E. Bryson, "Parameter-robust control design using a minimax method", AIAA Guidance, Control and Dynamics, vol.15, no.5, 1989.
- [14]S.E. Hamamcı, Katsayı Diyagram Metodu'nun Özel Durumlara ve ÇGÇÇ (MIMO) Sistemlere Uygulanması, Doktora Tezi, Fırat Üniv., Mart 2002.
- [15]N.K. Bose, E.I. Jury and E. Zeheb, "On robust Hurwitz and Schur polynomials", IEEE Trans. on Automat. Contr., vol. 33, pp.1166-1168,1988.
- [16]A.V. Lipatov and N. Sokolov, "Some sufficient conditions for stability and instability of continuous linear stationary systems", Auto. Remote Contr., vol.39, pp.1285-1291, 1979.
- [17]K. Saito, K. Muta and S. Manabe, "A solution of the Benchmark problem by Coefficient Diagram Method", ACC1995-AIAA20, 1995.
- [18]H.P. Huang and C.C. Chen, "Control-system synthesis for open-loop unstable process with time delay", IEE Proc. Contr. Theory Appl., vol.144(4), pp.334-346, 1997.
- [19]G.E. Rotstein and D.R. Lewin, "Simple PI and PID tuning for open-loop unstable systems", Ind. Eng. Chem. Res., vol.30, pp.5329-5338, 1997.