SAU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
6.Cilt, 1.Sayı (Mart 2002)

SINIR ŞARTLARINDA ÖZDEĞER PARAMETRESİ BULUNDURAN SÜREKSİZ STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

O. Ş. MUHTAROV, Mahir KADAKAL ve Nihat ALTINIŞIK

Özet-**Bu makalede hem denkleminde, hem de sınır şartlarının birinde özdeğer parametresi bulunduran parçalı sürekli katsayılı Sturm-Liouville problemi incelenmiştir. Sınır şartlarına süreksizlik noktasında çözümün sağ ve sol limit değerleri arasındaki bağıntı olarak verilen iki tane geçiş şartı da eklenmiştir. Farklı bir yaklaşımla araştırdığımız problemin Resolvent operatörü incelenmiştir, Walter[11] anlamında kendine eşlenik olduğu ispatlanmıştır ve özfonksiyonlar sisteminin serisine açılım özellikleri araştırılmıştır. Bulduğumuz yeni sonuçlar özel halinde($\gamma_1 = \delta_1, \gamma_2 = \delta_2$ olduğu durum için) Walter'in[11] uygun sonuçları ile çakışıyor.**

Anahtar Kelimeler: **Süreksiz Sturm-Liouville Problemi, Sınır-değer problemi, Rezolvent operatör**

Abstract-**In this paper the Sturm-Liouville problem with piecewise continuous coefficients and eigenvalue parameter contained both in the equation and one of the boundary conditions are investigated. Two transmission condition, which given by as relations between the right and left hand limit of the solution at the point of discontinuity are added to the boundary conditions. By the different approach we examine the resolvent operator, prove selfadjointness in the sense of Walter [11] and investigate the properties about the expansions on the system of eigenfunctions for the considered problem. In the special case (when $\gamma_1 = \delta_1, \gamma_2 = \delta_2$) the obtained new results are coincided with the corresponding results in Walter [11].**

Key Words: **Discontinuous Sturm-Liouville problem, Boundary-value-problem, Resolvent operator**

O. Ş. Muhtarov Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen-Edebiyat FakültesiMatematik Bölümü TOKAT, muhtarov@gop.edu.tr
M.Kadakal N. Altınışık Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü55139 Kurupelit-SAMSUN, mkadakal@omu.edu.tr

I. GİRİŞ

Bu çalışmada katsayıları sonlu $[a,b]$ aralığın... $a < c < b$ iç noktasında genel olarak süreksiz olan

$$Tu := -u'' + q(x)u = \lambda u, \; x \in [a,c) \cup (c,b] \qquad (I.1)$$

diferensiyel denkleminden, uç noktalardaki

$$u(a) = 0 \qquad (I.2)$$

$$-(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)) = \lambda(\alpha_1 u(b) - \alpha_2 u'(b)) \qquad (I.3)$$

sınır şartlarından ve $x = c$ süreksizlik noktasındak...

$$\gamma_1 u(c-0) = \delta_1 u(c+0) \qquad (I.4)$$

$$\gamma_2 u'(c-0) = \delta_2 u'(c+0) \qquad (I.5)$$

geçiş şartlarından oluşan bir sınır değer prob... inceleyeceğiz. Burada λ kompleks parame... $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i = 1,2)$ reel sayılardır ve $\beta_1^2 + \beta$... $\gamma_1^2 + \delta_1^2 > 0$, $\gamma_2^2 + \delta_2^2 > 0$ şartlarını sağlıyorlar; ... $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarının her birinde sürekli ol... $x = c$ noktasında sonlu sağ ve sol limit değerleri m... olan reel değerli fonksiyondur. Ayrıca,

$$\rho := \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 > 0$$

şartının sağlandığını da kabul edeceğiz. Walter'i... makalesinde olduğu gibi, eğer (I.1)-(I.5) pro... herhangi bir Hilbert uzayında kendine eşleni... operatör için özdeğer problemine indirgenebili... halde bu probleme kendine eşlenik problem diye... (I.1)-(I.5) probleminin bazı özel halleri [1], ... kaynaklarında farklı yöntemlerle incelenmiştir.

Matematik fiziğin bazı problemlerinde ... değişkenine göre kısmi türev sadece difere... denklemde değil aynı zamanda sınır şartlarında da ... çıkmaktadır. Böyle problemlere uygun olan sp... problemlerde özdeğer parametresi sadece difere... denklemde değil sınır şartlarında da bulunmaktad... [8]). (I.4)-(I.5) biçimindeki 'geçiş şartları' ise ... fiziksel ve mekanik özellikleri bulunan cis... arasındaki ısı ve madde iletimi veya başka ... süreçlerinde ortaya çıkmaktadır,([4], [6] ve [10]).

II. SINIR-DEĞER-GEÇİŞ PROBLEMİNİN UYGUN HİLBERT UZAYINDAÖZDEĞER PROBLEMİ BİÇİMİNDE İFADESİ

Eğer

$$\begin{aligned}(u)_b &:= \beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\,,\\ (u)'_b &:= \alpha_1 u(b) - \alpha_2 u'(b)\end{aligned} \qquad \text{(II.1)}$$

gösterimlerinden yararlanırsak, kolayca her $u, v \in C^1[a,b]$ için

$$\rho[u(b)v'(b) - u'(b)v(b)] = (u)_b (v)'_b - (u)'_b (v)_b \qquad \text{(II.2)}$$

olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi iki bileşenli $F := \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}$, $F_1(x) \in L_2[a,b]$, $F_2 \in \mathbb{C}$ elemanlarının $L_2[a,b] \oplus \mathbb{C}$ lineer uzayında iç çarpımı

$$< F, G >_\rho := \int_a^b F_1(x)\overline{G_1(x)}dx + \frac{1}{\rho} F_2 \overline{G_2} \qquad \text{(II.3)}$$

formülü ile tanımlayalım. O halde

$$H_\rho := \left(L_2[a,b] \oplus \mathbb{C}\,,\, < \bullet, \bullet >_\rho\right)$$

iç çarpım uzayının bir Hilbert uzayı olacağı açıktır. Bu uzayda tanım bölgesi

$D(A) = \{F \in H_\rho \mid F_1, F_1'$ fonksiyonlarının her biri $[a,c)$ ve $(c,b]$ aralıklarının her birinde mutlak süreklidirler; $F_1(c \pm o)$, $F_1'(c \pm 0)$ sonlu limit değerleri mevcuttur , $F_1(a) = 0$, $\gamma_1 F_1(c-0) = \delta_1 F_1(c+0)$ $\gamma_2 F_1'(c-0) = \delta_2 F_1'(c+0)$; $F_2 = (F_1)'_b\}$ (II.4)

olan $A: H_\rho \to H_\rho$ operatörünü

$$A\begin{pmatrix} F_1(x) \\ (F_1)'_b \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} TF_1 \\ -(F_1)_b \end{pmatrix} \qquad \text{(II.5)}$$

eşitliği ile tanımlayalım. O halde (I.1)-(I.5) sınır-değer-geçiş problemi

$$AU = \lambda U\left(U := \begin{pmatrix} u(x) \\ (u)'_b \end{pmatrix} \in D(A) \right) \qquad \text{(II.6)}$$

operatör-denklem biçiminde yazılabilir. Böylece (I.1)-(I.5) problemini bir Hilbert uzayında tanımlı olan bir lineer operatör için özdeğer problemine indirgemiş olduk.

LemmaII.1. Eğer $\gamma_1\gamma_2 = \delta_1\delta_2$ şartı sağlanıyorsa A operatörü simetriktir.

İspat. $F, G \in D(A)$ iki tane keyfi eleman olmak üzere Lagrange formülünü (bak örneğin [5]) uygularsak,

$$< AF, G >_\rho = \int_a^b (TF_1)(x)\overline{G_1(x)}dx + \frac{1}{\rho}\left(-(F_1)_b\right)(G_1)'_b$$

$$= \int_a^c F_1(x)\overline{(TG_1)(x)}dx + \int_c^b F_1(x)\overline{(TG_1)(x)}dx +$$

$$+ W(F_1, G_1; c-0) - W(F_1, G_1; a) +$$

$$+ W(F_1, G_1; b) - W(F_1, G_1; c+0) - \frac{1}{\rho}(F_1)_b\left(\overline{G_1}\right)'_b$$

$$= \left\{< F, G >_\rho - \frac{1}{\rho}\left(\overline{G_1}\right)_b (F_1)'_b\right\} +$$

$$+ \left\{W(F_1, G_1; c-0) - W(F_1, G_1; c+0)\right\} -$$

$$- \frac{1}{\rho}\left\{(F_1)_b (G_1)'_b - (F_1)'_b (G_1)_b\right\}$$

$$= \left\{ \int_a^c F_1(x)\overline{(TG_1)(x)}dx + \int_c^b F_1(x)\overline{(TG_1)(x)}dx + \right.$$

$$+ \frac{1}{\rho}(F_1)'_b\left((-G_1)_b\right) - W\left(F_1, \overline{G_1}; a\right)$$

$$+ \left\{W\left(F_1, \overline{G_1}; c-0\right) - W\left(F_1, \overline{G_1}; c+0\right)\right\} +$$

$$+ \left\{W\left(F_1, \overline{G_1}; b\right) - \frac{1}{\rho}\left((F_1)_b\left(\overline{G_1}\right)'_b - (F_1)'_b\left(\overline{G_1}\right)_b\right)\right\} \qquad \text{(II.7)}$$

eşitliğini buluruz; burada $W(F_1, G_1; x)$ ile F_1, G_1 fonksiyonlarının Wronskiyeni gösterilmiştir.

$$W(F_1, G_1; x) := F_1(x)G_1'(x) - F_1'(x)G_1(x) \qquad \text{(II.8)}$$

$F_1(x)$ ve $\overline{G_1(x)}$ fonksiyonları (I.2) sınır şartını sağladıkları için

$$W\left(F_1, \overline{G_1}; a\right) = 0 \qquad \text{(II.9)}$$

eşitliği sağlanır. $F_1, \overline{G_1}$ fonksiyonlarının (I.4) ve (I.5) geçiş şartlarını sağladığını ve lemmanın şartını dikkate alırsak,

$$W\left(F_1,\overline{G_1};c-0\right)=\left[F_1(c-0)\overline{G_1}'(c-0)-F_1'(c-0)\overline{G_1}(c-0)\right]$$

$$=\left\{\left[\frac{\delta_1}{\gamma_1}F_1(c+0)\right]\left[\frac{\delta_2}{\gamma_2}\overline{G_1}'(c+0)\right]-\left[\frac{\delta_1}{\gamma_1}F_1'(c+0)\right]\left[\frac{\delta_2}{\gamma_2}\overline{G_1}'(c+0)\right]\right\}$$

$$=W\left(F_1,\overline{G_1};c+0\right) \qquad \text{(II.10)}$$

bulmuş oluruz. O halde (II.9) ve (II.10) eşitliklerini (II.7) de yerine yazarak (II.2) eşitliğini de dikkate alırsak, talep olunan

$$<AF;G>_\rho=<F,AG>_\rho \qquad \text{(II.11)}$$

eşitliğini, yani A operatörünün simetrik olduğunu elde ederiz.

SonuçII.1. (I.1)-(I.5) probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

Not: $q(x)$ reel değerli fonksiyon, (I.2)-(I.5) şartlarının katsayıları reel sayılar ve bütün özdeğerler reel olduğu için (I.1)-(I.5) probleminin bütün özfonksiyonlarını reel değerli fonksiyonlar olarak kabul edebiliriz.

SonuçII.2. λ_1 ve λ_2 (I.1)-(I.5) probleminin herhangi iki farklı özdeğeri, $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ ise uygun özfonksiyonları ise

$$\int_a^b u_1(x)u_2(x)r(x)dx=-\frac{1}{\rho}(u_1)'_b(u_2)'_b \qquad \text{(II.12)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. A operatörü simetrik olduğu için, λ_1 ve λ_2 farklı özdeğerlerine uygun

$$U_1=\begin{pmatrix}u_1(x)\\(u_1)'_b\end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad U_2=\begin{pmatrix}u_2(x)\\(u_2)'_b\end{pmatrix}$$

özelementleri H_ρ uzayında ortogonal olacak, yani (II.12) eşitliği sağlanacak.

III. A OPERATÖRÜNÜN REZOLVENTİ

Bu kesimde özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ sayısının A operatörünün regüler değeri olduğunu göstereceğiz ve ayrıca,

$$R(\lambda,A):=(A-\lambda I)^{-1}$$

rezolvent operatörünü inceleyeceğiz.

Keyfi $F\in H_\rho$ elemanı için

$$(A-\lambda I)U=F \qquad \text{(III.1)}$$

operatör denklemini, onunla eşdeğer, homojen olmayan

$$\left\{-U_1''+q(x)U_1\right\}-\lambda U_1=F_1(x)\ ,x\in[a,c)\cup(c,b] \quad \text{(III.}$$

$$U_1(a)=0 \qquad \text{(III.3)}$$

$$\left(\beta_1U_1(b)-\beta_2U_1'(b)\right)+\lambda\left(\alpha_1U_1(b)-\alpha_2U_1'(b)\right)=F_2 \quad \text{(III.}$$

$$\gamma_1U_1(c-0)=\delta_1U_1(c+0) \qquad \text{(III.5}$$

$$\gamma_2U_1'(c-0)=\delta_2U_1'(c+0) \qquad \text{(III.6}$$

sınır-değer-geçiş problemi şeklinde yazalım.

İlk önce aşağıdaki önemli lemmayı verelim.

LemmaIII.1. Herhangi $[a_1,a_2]$ aralığında tanımlı reel değerli $q(x)$ fonksiyonu verilsin. Eğer q(fonksiyonu bu aralıkta sürekli ise o halde h $f(\lambda)$ ve $g(\lambda)$ tam fonksiyonları için

$$\left\{-u''+q(x)u\right\}=\lambda u,\ x\in[a_1,a_2] \qquad \text{(III.7}$$

diferensiyel denkleminin

$$u(a_i)=f(\lambda)\ ,\ u'(a_i)=g(\lambda) \qquad \text{(III.8}$$

($i=1$ veya $i=2$) başlangıç şartlarını sağlayan u(x, çözümü bulunur ve bu çözüm fonksiyonu h $x\in[a_1,a_2]$ değeri için λ değişkeninin ta fonksiyonudur.

Bu lemma Titchmarsh'ın [9] kitabında Teorem1.5' in ispatındaki yöntemle tam benzer şekil ispat edilir.

Şimdi bu lemmadan yararlanarak (I diferensiyel denkleminin iki tane $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,$ çözümlerini tanımlayacağız. $[a,c]$ aralığında (I diferensiyel denkleminin

$$u(a)=0\ ,\ u'(a)=1 \qquad \text{(III.9}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\phi_1(x,\lambda)$ gösterelim. $\phi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu tanımlandıktan son $[c,b]$ aralığında (I.1) diferensiyel denkleminin

$$u(c)=\frac{\gamma_1}{\delta_1}\phi_1(0,\lambda)\ ,\ u'(c)=\frac{\gamma_2}{\delta_2}\phi_1'(0,\lambda) \qquad \text{(III.1}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü tanımlayabilir. Bu çözümü $\phi_2(x,\lambda)$ ile gösterelim. Benzer şekild $[c,b]$ aralığında (I.1) diferensiyel denkleminin

$$u(b)=\alpha_2\lambda+\beta_2\ ,\ u'(b)=\alpha_1\lambda+\beta_1 \qquad \text{(III.11}$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_2(x,\lambda)$ i göstererek, bu çözümü tanımladıktan sonra [a, aralığında(I.1) diferensiyel denkleminin

$$u(c)=\frac{\delta_1}{\gamma_1}\chi_2(0,\lambda)\ ,\ u'(c)=\frac{\delta_2}{\gamma_2}\chi_2'(0,\lambda) \qquad (III.12)$$

başlangıç şartlarını sağlayan çözümünü $\chi_1(x,\lambda)$ ile gösterelim. LemmaIII.1 gereği $\phi_i(x,\lambda)$, $\chi_i(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ fonksiyonları λ -nın tam fonksiyonlarıdırlar. Bu fonksiyonların tanımları gereği

$$\phi(x,\lambda):=\begin{cases}\phi_1(x,\lambda), x\in[a,c]\\ \phi_2(x,\lambda), x\in[c,b]\end{cases},$$
$$\chi(x,\lambda):=\begin{cases}\chi_1(x,\lambda), x\in[a,c]\\ \chi_2(x,\lambda), x\in[c,b]\end{cases} \qquad (III.13)$$

eşitlikleri ile tanımlı ϕ ve χ fonksiyonları $[a,c)\cup(c,b]$ de (I.1) denklemini ve (I.4), (I.5) geçiş şartlarını sağlayacaklar. Ayrıca $\phi(x,\lambda)$ çözümü (I.2) sınır şartını, $\chi(x,\lambda)$ ise (I.3) sınır şartını sağlayacaktır. $W_\lambda(\phi_1,\chi_1;x)$, $x\in[a,c)$ ve $W_\lambda(\phi_2,\chi_2;x)$, $x\in(c,b]$ Wronskiyenleri x değişkeninden bağımsız oldukları için sadece λ değişkeninin tam fonksiyonlarıdırlar. Aşağıda

$$\omega_i(\lambda):=W_\lambda(\phi_i,\chi_i;x)\ ,\ i=1,2$$
$$\omega(x,\lambda):=W_\lambda(\phi,\chi;x)=\begin{cases}\omega_1(\lambda)\ ,\ x\in[a,c)\\ \omega_2(\lambda)\ ,\ x\in(c,b]\end{cases}$$

gösterimlerinden de yararlanacağız.

LemmaIII.2. Özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ ve her $x\in[a,c)\cup(c,b]$ için $\omega(x,\lambda)\neq 0$ dır.

İspat. Önce özdeğer olmayan her λ ve her $x\in[a,c]$ için $\omega(x,\lambda)\neq 0$ olduğunu ispat edelim.

Aksini kabul edelim. O halde özdeğer olmayan en az bir $\lambda_0\in\mathbb{C}$ için $\omega_1(\lambda_0)=0$ olur. O halde $\phi_1(x,\lambda_0)$ ve $\chi_1(x,\lambda_0)$ lineer bağımlı olacak, yani

$$\chi_1(x,\lambda_0)=k_1\phi_1(x,\lambda_0)\ ,\ x\in[a,c)$$

olacak şekilde $k_1\neq 0$ sayısı mevcuttur. Buradan

$$\chi_1(a,\lambda_0)=k_1\phi_1(a,\lambda_0)=0$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\chi(a,\lambda_0)=0$$

olur. Böylece $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu (I.2) sınır şartını da sağlamış olur. $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu $\lambda=\lambda_0$ değeri için (I.1) denkleminin, (I.3) sınır şartını ve (I.4), (I.5) geçiş şartlarını da sağladığından $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu $\lambda=\lambda_0$ için (I.1)-(I.5) probleminin çözümü olur. Diğer taraftan $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonunun tanımı gereği

$$\chi(b,\lambda_0)=\alpha_2\lambda_0+\beta_2$$
$$\chi'(b,\lambda_0)=\alpha_1\lambda_0+\beta_1$$

eşitlikleri sağlanır.

$$\rho=\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1\neq 0$$

olduğu için sonuncu iki eşitlikten $\chi(b,\lambda_0)$ ve $\chi'(b,\lambda_0)$ sayılarının en az birinin sıfırdan farklı olduğu elde edilir. Yani $\chi(x,\lambda_0)\not\equiv 0$ dır. O halde $\chi(x,\lambda_0)$ fonksiyonu $\lambda=\lambda_0$ için (I.1)-(I.5) probleminin çözümüdür, yani özfonksiyondur. Bu ise $\lambda=\lambda_0$ sayısının özdeğer olmadığı varsayımı ile çelişkidir. Böylece özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $\omega_1(\lambda)\neq 0$ olduğu ispat olunur. $x\in(c,b]$ durumu için de ispat tam benzer şekilde yapılabilir.

Bu teoremden ve Wronskiyenin özelliklerinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

SonuçIII.1. Özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $\phi_1(x,\lambda)$, $\chi_1(x,\lambda)$ fonksiyonları $[a,c]$ aralığında, $\phi_2(x,\lambda)$, $\chi_2(x,\lambda)$ fonksiyonları ise $[c,b]$ aralığında lineer bağımsızdırlar.

SonuçIII.1 gereği özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ için (I.1) diferensiyel denkleminin genel çözümünü

$$u(x,\lambda)=\begin{cases}C_1\phi_1(x,\lambda)+D_1\chi_1(x,\lambda), x\in[a,c)\\ C_2\phi_2(x,\lambda)+D_2\chi_2(x,\lambda), x\in(c,b]\end{cases} \qquad (III.14)$$

biçiminde ifade edebiliriz; burada C_1, D_1, C_2, D_2 keyfi sabitlerdirler. O halde sabitin değişimi yöntemini uygulamakla (III.2) homojen olmayan denkleminin genel çözümünü $x\in[a,c)$ için

$$U_1(x,\lambda)=\frac{\chi_1(x,\lambda)}{\omega_1(\lambda)}\int_a^x\phi_1(y,\lambda)F_1(y)dy+$$
$$+\frac{\phi_1(x,\lambda)}{\omega_1(\lambda)}\int_x^c\chi_1(y,\lambda)F_1(y)dy+ \qquad (III.15)$$
$$+C_1\phi_1(x,\lambda)+D_1\chi_1(x,\lambda)$$

biçiminde, $x\in(c,b]$ için ise

$$U_1(x,\lambda)=\frac{\chi_2(x,\lambda)}{\omega_2(\lambda)}\int_c^x \phi_2(y,\lambda)F_1(y)dy+$$

$$+\frac{\phi_2(x,\lambda)}{\omega_2(\lambda)}\int_x^b \chi_2(y,\lambda)F_1(y)dy+ \qquad \text{(III.16)}$$

$$+C_2\phi_2(x,\lambda)+D_2\chi_2(x,\lambda)$$

biçiminde ifade edebiliriz. (III.2) diferensiyel denkleminin (II.15) ve (III.16) eşitlikleri ilke verilmiş genel çözümünü (III.3)-(III.6) şartlarında yerine yazarak C_i, D_i sabitlerini bulabiliriz. (III.15) ifadesini (III.3) sınır şartında yerine yazarsak

$$D_1\chi(a,\lambda)=0$$

eşitliğini elde ederiz. λ özdeğer olmadığı için $\chi(a,\lambda)\neq 0$ dır. Dolayısıyla $D_1=0$ dır. (III.16) ifadesini (III.4) sınır şartında yerine yazarsak,

$$C_2=\frac{F_2}{\omega_2(\lambda)}$$

eşitliğini elde ederiz. D_1 ve C_2 için bulduğumuz değerleri de dikkate alarak (III.15) ve (III.16) ifadelerini (III.5) ve (III.6) geçiş şartlarında yazarsak, C_1 ve D_2 değerlerini bulmak için aşağıdaki lineer denklem sistemini elde ederiz.

$$\begin{cases} \gamma_1\phi_1(c,\lambda)C_1-\delta_1\chi_2(c,\lambda)D_1=-\dfrac{\gamma_1\chi_1(c,\lambda)}{\omega_1(\lambda)}\displaystyle\int_a^c \phi_1(y,\lambda)F_1(y)dy+ \\ \quad +\dfrac{\delta_1\phi_2(c,\lambda)}{\omega_2(\lambda)}\displaystyle\int_c^b \chi_2(y,\lambda)F_1(y)dy+\delta_1\dfrac{F_2}{\omega_2(\lambda)}\phi_2(c,\lambda) \\ \gamma_2\phi_1'(c,\lambda)C_1-\delta_2\chi_2'(c,\lambda)D_2=-\dfrac{\gamma_2\chi_1'(c,\lambda)}{\omega_1(\lambda)}\displaystyle\int_a^c \phi_1(y,\lambda)F_1(y)dy+ \\ \quad +\dfrac{\delta_2\phi_2'(c,\lambda)}{\omega_2(\lambda)}\displaystyle\int_c^b \chi_2(y,\lambda)F_1(y)dy+\delta_2\dfrac{F_2}{\omega_2(\lambda)}\phi_2'(c,\lambda) \end{cases}$$

Bu sistemin determinantı $-\delta_1\delta_2\omega_2(\lambda)\neq 0$ olduğu için bir tek çözümü bulunur. $\phi_i(x,\lambda)$, $\chi_i(x,\lambda)$ fonksiyonlarının tanımlarından yararlanarak sonuncu denklem sisteminden

$$C_1=\frac{1}{\omega_2(y,\lambda)}\int_c^b \chi_2(y,\lambda)F_1(y)dy+\frac{F_2}{\omega_2(\lambda)},$$

$$D_2=\frac{1}{\omega_1(y,\lambda)}\int_a^c \phi_1(y,\lambda)F_1(y)dy$$

elde edilir. C_i, D_i sabitleri için bulduğumuz değerle (III.15) ve (III.16) ifadelerinde yerine yazarak gerek düzenlemeleri yaparsak, (III.2)-(III.6) problemin çözümü için bütün $[a,c)\cup(c,b]$ delinmiş aralığında

$$U_1=\chi(x,\lambda)\int_a^x \frac{\phi(y,\lambda)}{\omega(y,\lambda)}F_1(y)dy+$$

$$+\phi(x,\lambda)\int_a^x \frac{\chi(y,\lambda)}{\omega(y,\lambda)}F_1(y)dy+\frac{F_2}{\omega_2(\lambda)}\phi(x,\lambda)$$

formülünü elde ederiz.

TeoremIII.1. Özdeğer olmayan her $\lambda\in\mathbb{C}$ sayısı (II.4) (II.5) eşitlikleri ile tanımlı olan A operatörünün regüle değeridir ve ayrıca $R(\lambda,A):H_\rho\to H_\rho$ rezolvent operatörü kompakt operatördür.

İspat.

$$G_1(x,y;\lambda):=\begin{cases}\dfrac{\chi(x,\lambda)\phi(y,\lambda)}{\omega(y,\lambda)} & a\le y\le x\le b\ ,x,y\neq c \\ \dfrac{\phi(x,\lambda)\chi(y,\lambda)}{\omega(y,\lambda)} & a\le x\le y\le b\ ,x,y\neq c\end{cases}$$

gösteriminden yararlanarak sonuncu formülü

$$U_1(x,\lambda)=\int_a^b G_1(x,y;\lambda)F_1(y)dy+\frac{F_2}{\omega_2(\lambda)}\phi(x,\lambda)$$

biçiminde ifade edebiliriz. Buradan $R(\lambda,A)$ rezolvent operatörü için

$$R(\lambda,A)F=\begin{pmatrix}\displaystyle\int_a^b G_1(x,y;\lambda)F_1(y)dy+\frac{F_2}{\omega_2(\lambda)}\phi(x,\lambda) \\ \displaystyle\int_a^b \left(G_1(\bullet,y;\lambda)\right)'_b F_1(y)dy+\frac{F_2}{\omega_2(\lambda)}\left(\phi(\bullet,\lambda)\right)'_b\end{pmatrix}$$

formülü elde edilir.

Şimdi $B_\lambda : L_2[a,b] \to L_2[a,b]$, $\widetilde{B}_\lambda : H_\rho \to H_\rho$ ve $C_\lambda : H_\rho \to H_\rho$ operatörlerini

$$B_\lambda F_1 := \int_a^b G_1(x,y;\lambda) F_1(y)dy$$

$$\widetilde{B}_\lambda F := \begin{pmatrix} B_\lambda F_1 \\ (B_\lambda F_1)'_b \end{pmatrix}$$

$$C_\lambda F := \begin{pmatrix} \dfrac{F_2}{\omega_2(\lambda)} \phi(x,\lambda) \\ \dfrac{F_2}{\omega_2(\lambda)} (\phi(\bullet,\lambda))'_b \end{pmatrix}$$

eşitlikleri ile tanımlarsak, $R(\lambda,A)$ rezolvent operatörünü $R(\lambda,A) = \widetilde{B}_\lambda + C_\lambda$ biçiminde ifade edebiliriz. B_λ operatörü $L_2[a,b]$ Hilbert uzayında kompakt olduğu için (bak örneğin[2 chapter 10]), $\widetilde{B}_\lambda$ operatörü H_ρ Hilbert uzayında kompaktdır. C_λ operatörünün H_ρ Hilbert uzayında kompakt olduğu açıktır. Dolayısıyla özdeğer olmayan her $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R(\lambda,A)$ operatörü de H_ρ uzayında kompakt olacaktır.

IV. ÖZFONKSİYONLAR SİSTEMİNİN SERİSİNE AÇILIM

Önce aşağıdaki teoremi ispat edelim.

TeoremIV.1. (II.4) ve (II.5) eşitlikleri ile tanımlı A operatörü H_ρ Hilbert uzayında kendine eşleniktir.

İspat. A operatörünün (II.4) eşitliği ile verilmiş D(A) tanım bölgesinin H_ρ Hilbert uzayında her yerde yoğun olduğu açıktır. Ayrıca, TeoremIII.1. gereği A operatörün en az bir regüler değeri mevcut olduğu için, kapalı operatördür. Yine TeoremIII.1 gereği $\mathrm{Im}\lambda \neq 0$ olacak şekilde her $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı için $A - \lambda I$ ve $A + \bar{\lambda} I$ operatörlerinin her birinin değer bölgeleri bütün H_ρ Hilbert uzayı ile çakışmaktadır, yani $(A - \lambda I)D(A) = H_\rho$ ve $(A - \bar{\lambda} I)D(A) = H_\rho$ eşitlikleri sağlanır. Ayrıca LemmaII.1 gereği A operatörü simetriktir. O halde simetrik operatörlerin genişlemesi hakkında Fonksiyonel Analizden iyi bilinen teorem gereği (bak, örneğin [2, Chapter8, Theorem2.2]) A operatörü kendine eşlenik olacak.

Sonuç olarak, TeoremIII.1 , TeoremIV.1 ve İntegral Denklemler teorisinden iyi bilinen Hilbert-Schmidt Teoremi (bak örneğin[7, Theorem 6.41-A]) gereği aşağıdaki teoremi elde ederiz.

TeoremIV.2. H_ρ Hilbert uzayında (II.4), (II.5) eşitlikleri ile tanımlı A operatörünün sayılabilir sayıda reel özdeğeri mevcuttur, her özdeğerin cebirsel katı sonludur, özdeğerler dizisi alttan sınırlıdır ve sonlu yığılma noktası yoktur. Her özdeğer cebirsel katı sayıda yazılmak kaydı ile, özdeğerler dizisini $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ biçiminde sıralayarak, uygun normlandırılmış özelementler

$$\phi_n := \begin{pmatrix} \varphi_n(x) \\ (\varphi_n)'_b \end{pmatrix}, \quad \left(\|\phi_n\|_{H_\rho} = 1\right) \quad n = 1,2,\ldots$$

biçiminde gösterilmek üzere, her $F \in H_\rho$ elemanı için

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n \;, \quad c_n = \langle F, \phi_n \rangle_{H_\rho}$$

Fourier serisi H_ρ Hilbert uzayında F elemanına yakınsak olacaktır;

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} \langle F, \phi_n \rangle_{H_\rho} \phi_n \,. \qquad \text{(IV.1)}$$

Bu teoremden aşağıdaki önemli sonuçlar elde edilir.

SonuçIV.1. Her $f \in L_2[a,b]$ fonksiyonu $L_2[a,b]$ Hilbert uzayında (I.1)-(I.5) sınır-değer- geçiş probleminin $\{\varphi_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ özfonksiyonlar sisteminin

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b f(y)\varphi_n(y)dy \right) \varphi_n(x)$$

serisine açılır.

İspat. Bu sonucun ispatı için (IV.1) formülünde $F \in H_\rho$ elemanını özel olarak $F\begin{pmatrix} f(x) \\ 0 \end{pmatrix}$ almak yeterlidir.

SonuçIV.2. Her $f \in L_2[a,b]$ fonksiyonu için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\varphi_n\right)'_b\right]^2=\rho \qquad \text{(IV.2)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n\right)'_b\varphi_n(x)=0 \qquad \text{(IV.3)}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (IV.1) formülünü

$$\begin{pmatrix}F_1(x)\\F_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}<F,\phi_n>_{H_\rho}.\varphi_n(x)\\ \sum_{n=0}^{\infty}<F,\phi_n>_{H_\rho}.\left(\varphi_n\right)'_b\end{pmatrix} \qquad \text{(IV.4)}$$

biçiminde yazalım. Bu formülde özel olarak $F=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ alırsak,

$$\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho}\left(\varphi_n\right)'_b.\varphi_n(x)\\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho}\left[\left(\varphi_n\right)'_b\right]^2\end{pmatrix}$$

eşitliği, yani (IV.2) ve (IV.3) eşitliklerini elde ederiz.

Sonuç4.3. Her $\in L_2[a,b]$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_a^b f(y)\varphi_n(y)dy\right).\left(\varphi_n\right)'_b=0$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Bu sonucun ispatı için (IV.4) formülünü $F=\begin{pmatrix}f(x)\\0\end{pmatrix}$ elemanı için yazmak yeterlidir.

TEŞEKKÜR

O. Ş. Muhtarov bu çalışmanın yapılmasında NATO-PC-B programı çerçevesinde kendisine sağlanan destek için TÜBİTAK'a teşekkür eder.

KAYNAKLAR

1 Fulton, C. T., 'Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions', Proc. Roy. Soc. Edin. 77A, 293-308, 1977.
2 Lang, S., 'Real Analysis' Addison-Wesley, Reading Mass. 1983.
3 Langer, R.E., 'A problem in diffusion or in the flow of heat for a solid in contact with a fluid' Tohoku Math.J.35 (1932), 360-375.
4 Mukhtarov, O, Sh and Demir, H., 'Coerciveness of the discontinuous initial-boundary value problem for parabolic equations' İ srael Journal of Mathematics 114 (1999), 239-252
5 Naimark,M.N., 'Linear Differential Operators', Ungar New York, 1967.
6 Rasulov, M. L., 'Methods of Contour Integration North-Holland Pub. Comp. Amsterdam 1967.
7 Taylor, A.E., 'Introduction to Functional Analysis John Wiley, 1958.
8 Tikhonov, A. N and Samarskii, A.A., 'Equations of Mathematical Physics' Oxford and New York, Pergamon (1963).
9 Titchmarsh, E. C.,'Eigenfunctions Expansion Associated With Second Order Differential Equations I 2nd edn, Oxford Univ. Press, London.
10 Titeux, I and Yakubov, Y., 'Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients' Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. Vol. 7, No 7 (1997) 1035-1050.
11 Walter, J., 'Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary conditions', Math Z. 133, 301-312. (1973)