SAU Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
7.Cilt, 1.Sayı (Mart 2003)

GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖRTGENLER

Murat Güzlek, Yılmaz Sarvan, İbrahim Özgür

Özet - Bu çalışmada Genelleştirilmiş Dörtgenler hakkında aksiyomatik bilgilendirmeler yapıldıktan sonra parametreler arası ilişkilerden bahsedildi. Polar uzayların özel bir durumu olan genelleştirilmiş dörtgenlerin bilinen klasik örnekleri üzerinde duruldu. Sintem ve duad üzerine yapılan çalışmalardan bir kaçı incelenip yorumlandı. Özel olarak s ve t parametrelerinin s=3 ve t=3 durumu irdelenmiştir. Genelleştirilmiş dörtgenlerin bazı kombinatöryel özellikleri yanı sıra genelleştirilmiş dörtgenlerde alt uzaylar hakkında çeşitli yorum ve incelemeler yapılmıştır. Genelleştirilmiş dörtgenlerde kolinasyonlar incelenmiş olup tarihi hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler - Genelleştirilmiş Dörtgen, Polar Uzay, Sintem, Duad, Alt Dörtgen, Kolinasyon

***Abstract*-** In this paper, we study the generelited quadrangles and its axiomatic struetures the examples of generalited guadranles which are special case is polar spaccs have been given. Also, we dedicated the propertics on synthem and duads. Further we studied the speacial case t=3 and s=3. Same combinatorial properties of generalited quadrangles and its subbpaces has been invertigted. We also study the collinations on generalited quadrangles and give its brief history.

M. Güzlek, Körfez Anadolu Teknik, Teknik ve Endüstri Meslek Lisesi, Matematik Öğretmeni, Kocaeli,
Y. Sarvan, Doğantepe Pansiyonlu İlköğretim Okulu, Matematik Öğretmeni, Adapazarı,
İbrahim Özgür SA.Ü Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Adapazarı.

I.GİRİŞ

Bu çalışmada M.Lynn Batten'in "Combinatorics (Finite Geometries" kitabı esas alınmıştır. Kullanıla "nokta" ve "doğru" kavramları belirli sayılardadı Verilen tanım ve teoremler parametreler yardımı il açıklanmış örneklerde parametreler yerine sayılar alını güncelleştirilmiştir.
Noktanın doğru üzerinde olması ile doğrunun noktada geçmesinin aynı anlamda kullanıyoruz. Nokta ve doğrular sonlu sayıdadır. Uzay ise verilen aksiyomatik yapının özelliklerini taşıyacağından konuya göre değişiklikler gösterir.
Uzaylar nokta, doğru, düzlem ve birbirine göre durumları esas alınarak kurulur. Yaklaşık lineer uzaylarda bazı noktaların doğruların üzerinde olması şartı aranmazken iki noktadan en çok bir doğru geçer ifadesi de kullanılmıştır. Tek başına bir nokta doğru belirtmez.Uzaylarda çeşitli kural koyarak yeni uzaylar elde edilir. Bu kurallara göre elde edilen uzaylar aksiyomlarla tutarlılık göstermelidir.

II.TEMEL KAVRAMLAR

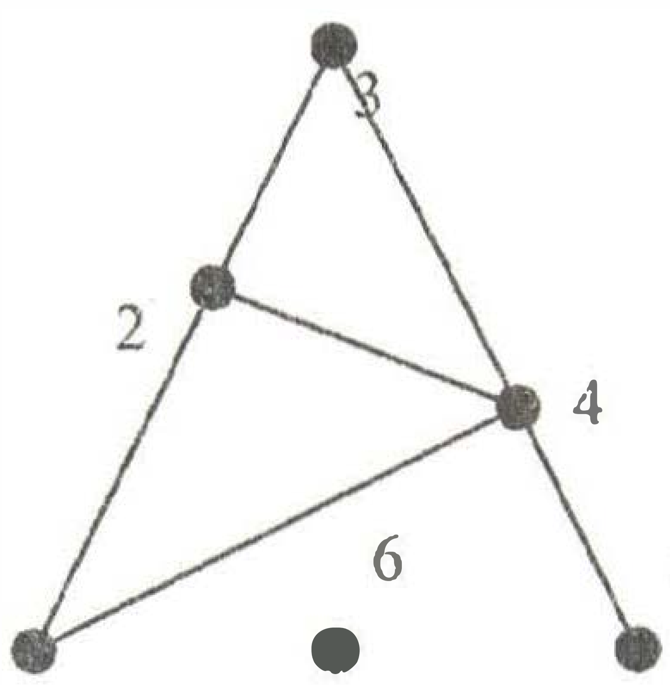
S=(P, L) ikilisine geometrik yapı denir. P herhangi noktalar cümlesi, L, P nin herhangi elemanlarından oluşan alt cümleler cümlesi olarak alınır.

Verilen aksiyom sisteminin tümünü sağlayan bir geometrik yapı bulunabilirse bu aksiyom sistemine tutarlı aksi halde tutarsızdır denir.

S=(P, L) uzayı aşağıdaki iki aksiyomu sağlıyorsa uzaya *kısmi düzlem* veya *yaklaşık lineer uzay* denir.[1]

YL1) Bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.
YL2) Farklı iki noktayı birleştiren en çok bir doğru vardır.
Şekil 1.1 P={1. 2, 3, 4, 5, 6} noktalar kümesi ve L={{1,2,3},{2,4},{1,4},{3,4,5}} doğrular kümesi olan bir yaklaşık lineer uzaydır

Bir yaklaşık lineer uzayın nokta sayısı v = P ve doğru sayısı b= L şeklinde gösterilir.
Şekil 1.1 deki yaklaşık lineer uzayda v= 6, b= 4 dür.



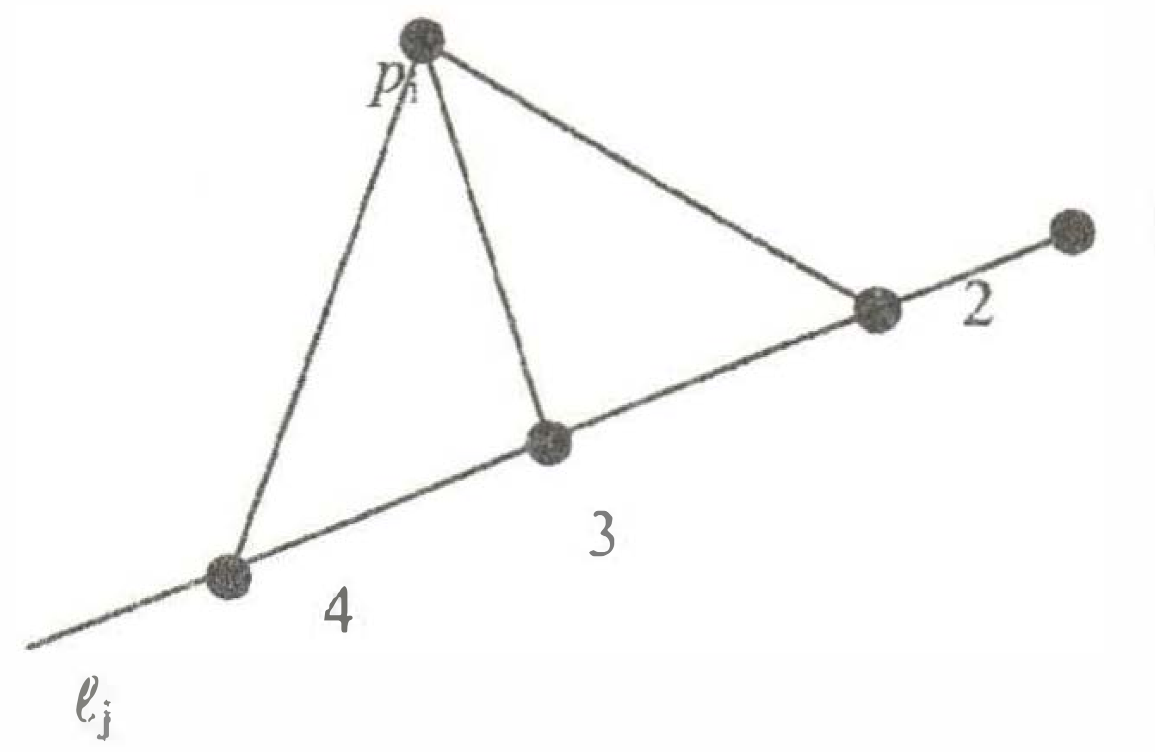
Şekil 2.1

Bir S=(P, L) yaklaşık lineer uzayın duali R=(P', L') ile ifade edilen bir uzaydır. Burada
P'=L ve L'= {{ $p_1, p_2,..., p_m$}: $p_i \in$ P', m≥2, $p_1, p_2,..., p_m$ S nin sabit bir noktasında noktadaş doğrular}dır.

Yaklaşık lineer uzayda boyut kavramını verebilmek için noktalar cümlesinin örtüsünün tanımına ihtiyaç vardır.
S=(P, L) bir yaklaşık lineer uzay, X ⊆ P olsun. Noktalar cümlesini kapsayan en küçük yaklaşık lineer uzaya X in örtüsü denir. <X>, X in örtüsü şeklinde gösterilir. X in örtüsü; X i kapsayan tüm yaklaşık lineer uzayların arakesitidir.

S=(P, L) nin bir bazı, örtüsü S olan bağımsız bir nokta cümlesidir.
En az sayıdaki bazının eleman sayısının bir eksiğine uzayın boyutu denir.
boy S= min { B : B , S için bir bazdır.}-1
şeklinde ifade edilir.

S=(P, L) bir yaklaşık lineer uzay için, $p_i \in$ P, $\ell_j \in$ L p_i ø ℓ_j olsun (p_i noktası ℓ_j doğrusunun üzerinde olmasın), ℓ_j doğrusundaki p_i noktası ile doğrudaş olan noktaların sayısına bağ sayısı denir. Bağ sayısı c_{ij} ile gösterilir. $c_{ij} \leq v_j$ dir (v_j, ℓ_j doğrusu üzerindeki toplam nokta sayısı). Eğer p noktası doğru üzerinde ise bağ sayısı 1 olarak alınır.



Şekil 2.2

Şekil 1.2 de ki p_i noktası ile ℓ_j doğrusu arasındaki bağ sayısı $c_{ij} = c(p_i, \ell_j) = 3$ dür.
S=(P, L), S'=(P', L') herhangi iki yaklaşık lineer uzay için, f : P P' ve her $\ell \in$ L için f(ℓ)∈ L' özelliğinde ise f ye S den S' ye *lineer fonksiyon* denir.
Bu fonksiyon kendi üzerine ise *otomorfizm* veya *kolinasyon* denir.

Aşağıdaki aksiyomlar sağlanıyorsa S=(P, L) uzayı *lineer uzaydır*.
L1) Bir doğru üzerinde en az iki nokta vardır.
L2) Farklı iki nokta bir tek doğru belirtir.

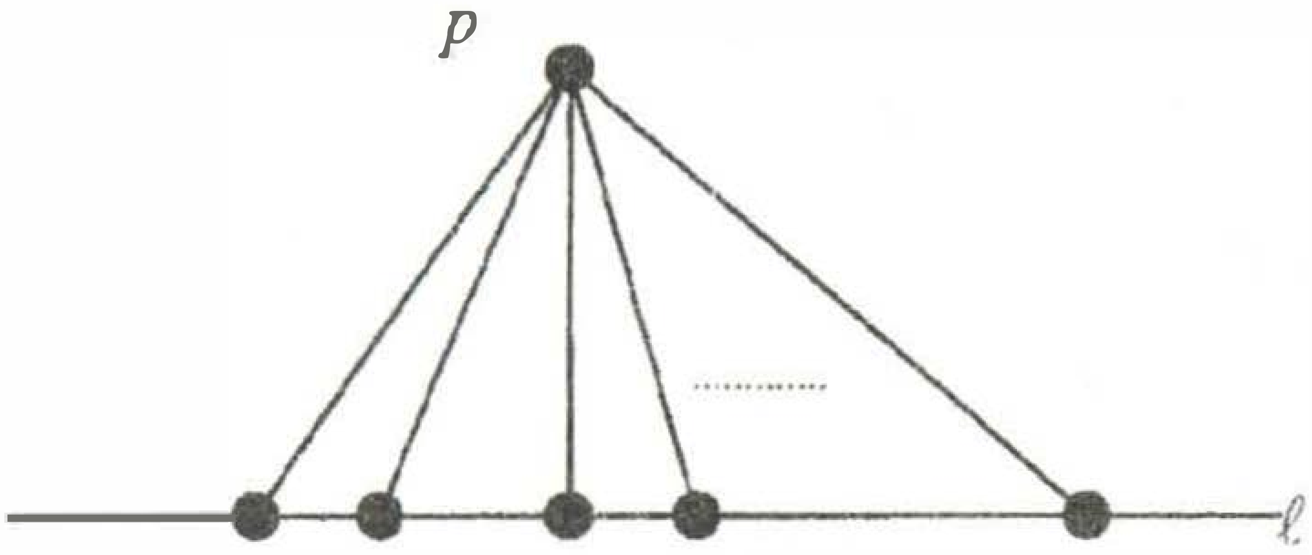
p noktasını L nin noktalarına birleştiren doğruların sayısına bağ sayısı demiştik. Lineer uzaylarda bağ sayısı doğru üzerindeki nokta sayısı kadardır. Ve doğruların dışında kalan noktalar olmayacaktır (L2 aksiyomuna göre).

Bir S lineer uzayı için , S nin maximal bir proper alt uzayına bir *hiperdüzlem* denir. V; S nin bir hiper düzlemi ise V ⊂ S dir ancak V ve S arasında başka alt uzay yok ise. Buradan R^4 de R^3 hiperdüzlemdir. R^3 de R^2 hiperdüzlemdir. R^2 de R hiperdüzlemdir. R de her bir nokta hiperdüzlemdir ve noktada nokta hiperdüzlemdir. ∅ nin hiperdüzlemi de ∅ dir.

Aşağıdaki iki aksiyomu sağlayan lineer uzaya *projektif düzlem* denir:
PD1) Farklı iki doğru kesişir.
PD2) Uzayda en az bir dörtgen vardır.[1]

Buradan bir projektif düzlemin hiperdüzlemlerinin kesinlikle doğrular olduğu kolayca görülmektedir.
S lineer uzayı ve H ⊆ S bir alt uzayı için S nin her doğrusu H nin en az bir noktasını kapsarsa H, S nin bir *projektif hiperdüzlemidir*. Projektif düzlemlerin boyutu 2 dir.[3]

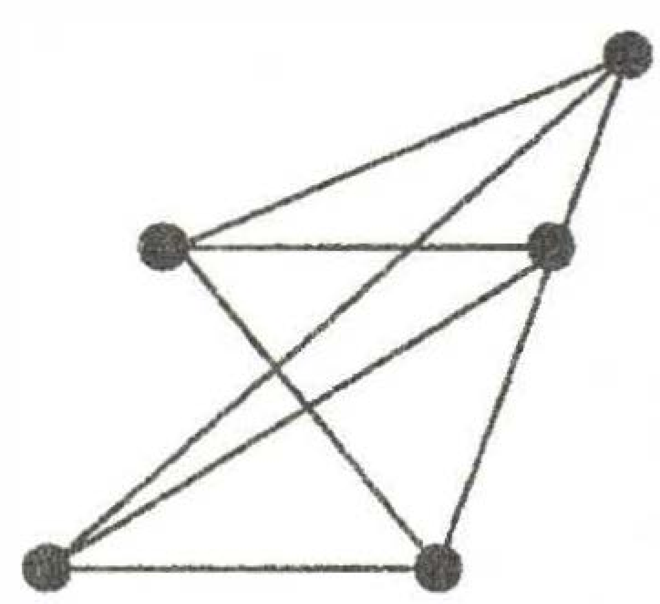
S=(P, L) bir yaklaşık lineer uzay olsun. Eğer $c(p, \ell)=1$ veya $c(p, \ell)= v(\ell)$ ise S ye bir *polar uzay* denir (bağ sayısı 1 veya $v(\ell)$ doğru üzerindeki tam nokta sayısı kadardır).(Şekil 1.3)



Şekil 1.3

S polar uzayının bir noktası diğer tüm noktalara doğrudaş ise uzaya dejenere polar uzay (Şekil 1.4.b) diğer durumda dejenere olmayan polar uzay denir. (Şekil 1.4.a)


Şekil 1.4.a


Şekil 1.4.a

Dolayısıyla lineer uzaylar dejenere polar uzaylardır.

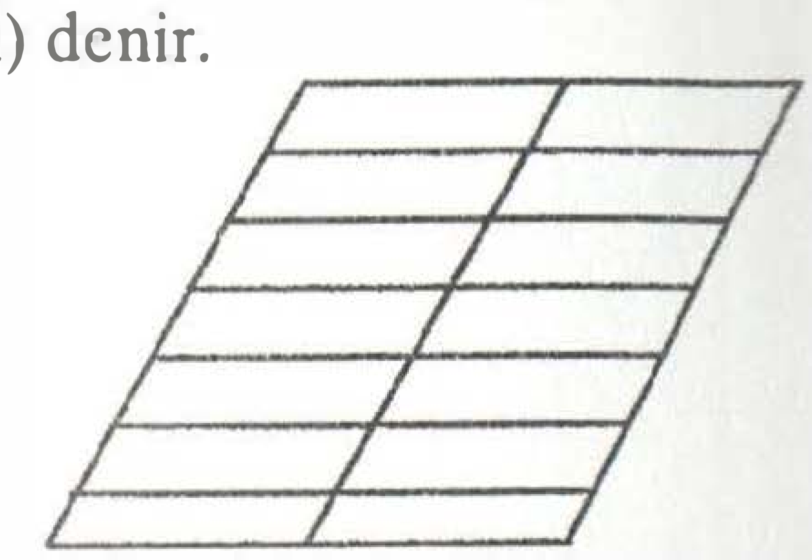
III. GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖRTGENLER

Bu bölümde genelleştirilmiş dörtgenlerin tanımı ve bazı parametrik sonuçları verilecektir.
Aşağıdaki şartları sağlayan S=(P, L) yaklaşık lineer uzaya *genelleştirilmiş dörtgen* denir.

GD1) her p noktası ve ℓ doğrusu için, $p \not\in \ell$ ise $c(p,\ell) = 1$ dir;
GD2) doğrudaş olmayan noktalar ve noktadaş olmayan doğrular vardır;
GD3) P sonlu bir kümedir.

Genelleştirilmiş dörtgen bir polar uzaydır. Polar uzaylarda bilindiği üzere S=(P, L) yaklaşık lineer uzayında $\forall p$, ℓ için $c(p,\ell) = 1$ veya $c(p,\ell) = v(\ell)$ dir. Görülüyor ki genelleştirilmiş dörtgenin $\forall p$, ℓ nokta doğru çifti için $p \not\in \ell$ ise $c(p,\ell) = 1$ olduğundan ve $p \in \ell$ için de $c(p,\ell)=v(\ell)$ olacağından genelleştirilmiş dörtgenler polar uzaylardır.

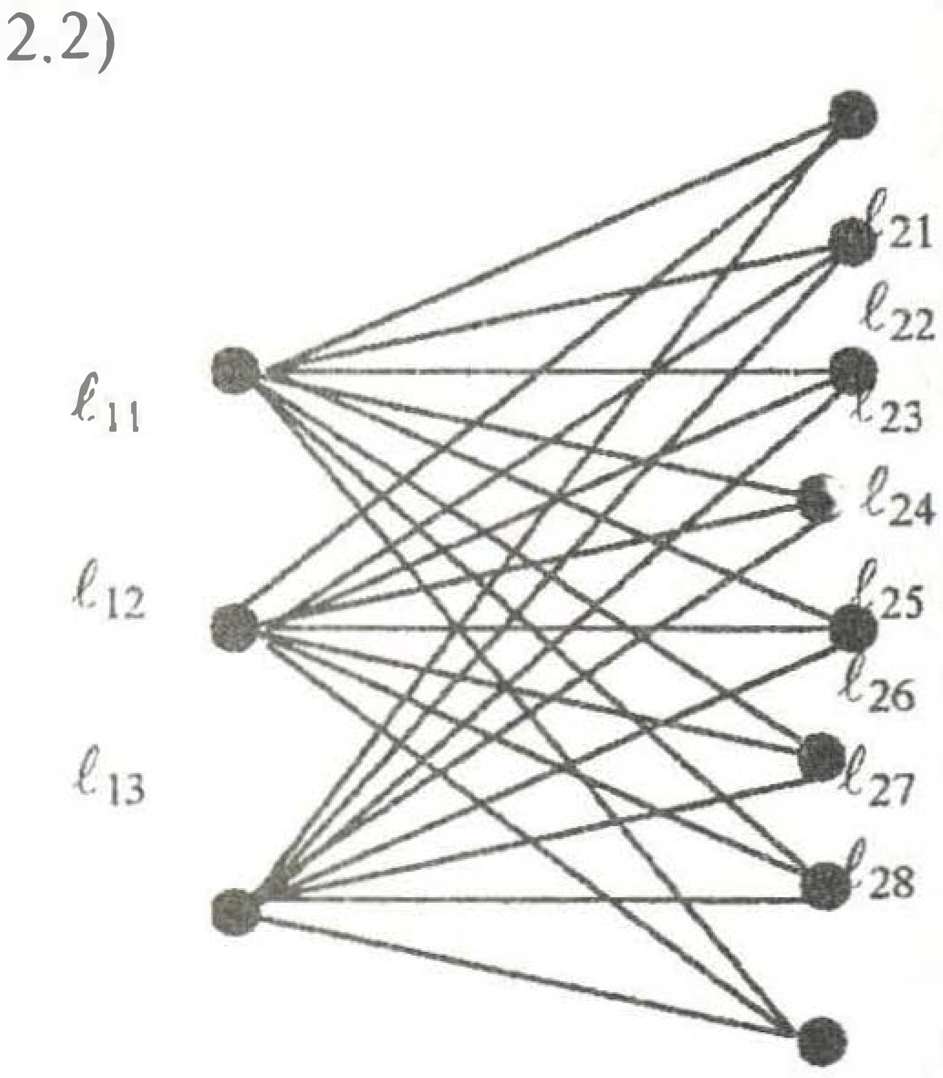
Projektif uzay aksiyomlarında olduğu gibi, genelleştirilmiş dörtgen aksiyomlarında da duallik vardır. Yani genelleştirilmiş dörtgenin dual uzayı genelleştirilmiş dörtgendir.
Her noktanın iki doğru üzerinde olduğu genelleştiril dörtgene *grid* (ızgara) denir.


Şekil 2.1

Eğer her nokta iki doğru üstündeyse, genelleştiril dörtgen Şekil 2.1 deki gibi olup, doğrular L_1 ve L_2 ola iki kümeye ayrılmıştır. L_1 deki her doğruda sabit s_1 sayı kadar nokta ve L_2 deki her doğruda da sabit s_2 sayı kadar nokta vardır.

$L_1=\{\ell_{11}, \ell_{12}, \ell_{13}\}$ve $L_2=\{\ell_{21}, \ell_{22}, \ell_{23}, \ell_{24}, \ell_{25}, \ell_{26}, \ell_{27}, \ell_{2}$
L_1 doğruları üzerindeki noktalar sayısı $v(\ell_{1j})=$,(j=1,2,3) L_2 doğruları üzerindeki noktalar sayı $v(\ell_{2j})=s_2$, (j=1,2,...,8)

P nokta kümesi P_1 ve P_2 kümelerine bölünür ve P_1 in b elemanı P_2 nin her elemanıyla birleştirilirken P_i n hiçbir elemanı P_i ile birleştirilmezse (i=1,2), bu b genelleştirilmiş bir dörtgendir ve *dual grid* denir. (Şekil 2.2)



Şekil 2.2

A={1,2,3,4,5,6} olsun. i j için A kümesinin (i,j) ik elemanlı alt kümelerine *duad* denir. Birbirinden ayrık duad bir *sintem* (syntheme) ifade eder. On beş duad on beş sintem olduğuna dikkat edilmelidir.
A kümesine ait duadlar;
(1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6)
(2,3) (2,4) (2,5) (2,6)
(3,4) (3,5) (3,6)
(4,5) (4,6)
(5,6)
dır.

Verilen kümenin duad sayısı; 15 tanedir.
Bu kümeye ait sintemler;
{(1,2) , (3,4) , (5,6)}
{(1,2) , (3,5) , (4,6)}
{(1,2) , (3,6) , (4,5)}
{(1,3) , (2,4) , (5,6)}
{(1,3) , (2,5) , (4,6)}
{(1,3) , (2,6) , (4,5)}
{(1,4) , (2,3) , (5,6)}
{(1,4) , (2,5) , (3,6)}
{(1,4) , (2,6) , (3,5)}
{(1,5) , (2,3) , (4,6)}
{(1,5) , (2,4) , (3,6)}
{(1,5) , (2,6) , (3,4)}
{(1,6) , (2,3) , (4,5)}
{(1,6) , (2,4) , (3,5)}
{(1,6) , (2,5) , (3,4)}
dür.

Sintem sayısı 15 tanedir.

S = (P, L) olsun ve P duadlar kümesini, L de sintemler kümesini ifade etsin. GD1 ve GD2 nin sağlandığı kolayca görülebilir. Örneğin;
Eğer $p=\{1,2\}$ ve $\ell=\{\{1,3\},\{2,4\},\{5,6\}\}$ ise p nin ℓ ile buluştuğu tek sintem {{1,2}, {3,4}, {5,6}} olur.

Duad ve sintem kelimeleri bu geometriyi ilk tanıtan kişi olan Sylvester (1864,1884) tarafından kullanılmıştır. Yukarıdaki örneğin on beş nokta ve on beş doğru üzerindeki genelleştirilmiş dörtgene tek örnek olduğunu göstereceğiz. Bir sonraki açıklamaların bunu görmede yararı olacaktır.

1* S = (P, L) genelleştirilmiş dörtgen olsun. O halde aşağıdakilerden biri doğru olmalıdır:

i) S bir grid olup, ($P \neq \emptyset$) her nokta iki doğru üzerindedir, doğruların kümesi L_1 ve L_2 olarak iki kümeye ayrılmıştır ve her doğru diğer kümedeki bütün doğrularla kesişirken kendi kümesindeki hiçbir doğru ile kesişmez. Ayrıca, L_i deki doğruların nokta sayıları sabit olup s_i dir. (i=1,2)

ii) S bir dual griddir.

iii) S, s ve t parametrelerine sahip olup, her bir doğru üzerinde (s+1) sayıda nokta ve her noktadan (t+1) sayıda doğru geçecek şekilde $s \geq 1$ ve $t \geq 1$ tam sayıları vardır.
2* p ve q doğrudaş olmayan noktalar olsun. O halde hem p hem de q ile doğrudaş olan t+1 sayıda nokta vardır.

3* s ve t parametreleri olan herhangi bir genelleştirilmiş dörtgende toplam nokta sayısı v=(s+1).(st+1) ve toplam doğru sayısı b=(t+1).(st+1) dir.

Yukarıdaki sonuçlardan sağladığımız bilgilerle artık sintem-duad örneğindeki genelleştirilmiş dörtgenin eşsiz olduğunu kolayca gösterebiliriz.

P={1,2,3,...,15} ve v=b=15 olsun. 3* a göre s>1 ve t>1 dir. Buna göre, S, 1* daki (iii) nolu kategoriye girer. Aslında 3* ın sonuçlarına göre s=t=2 dir. 2* dan,
s+1=2+1=3
t+1=2+1=3 dür.

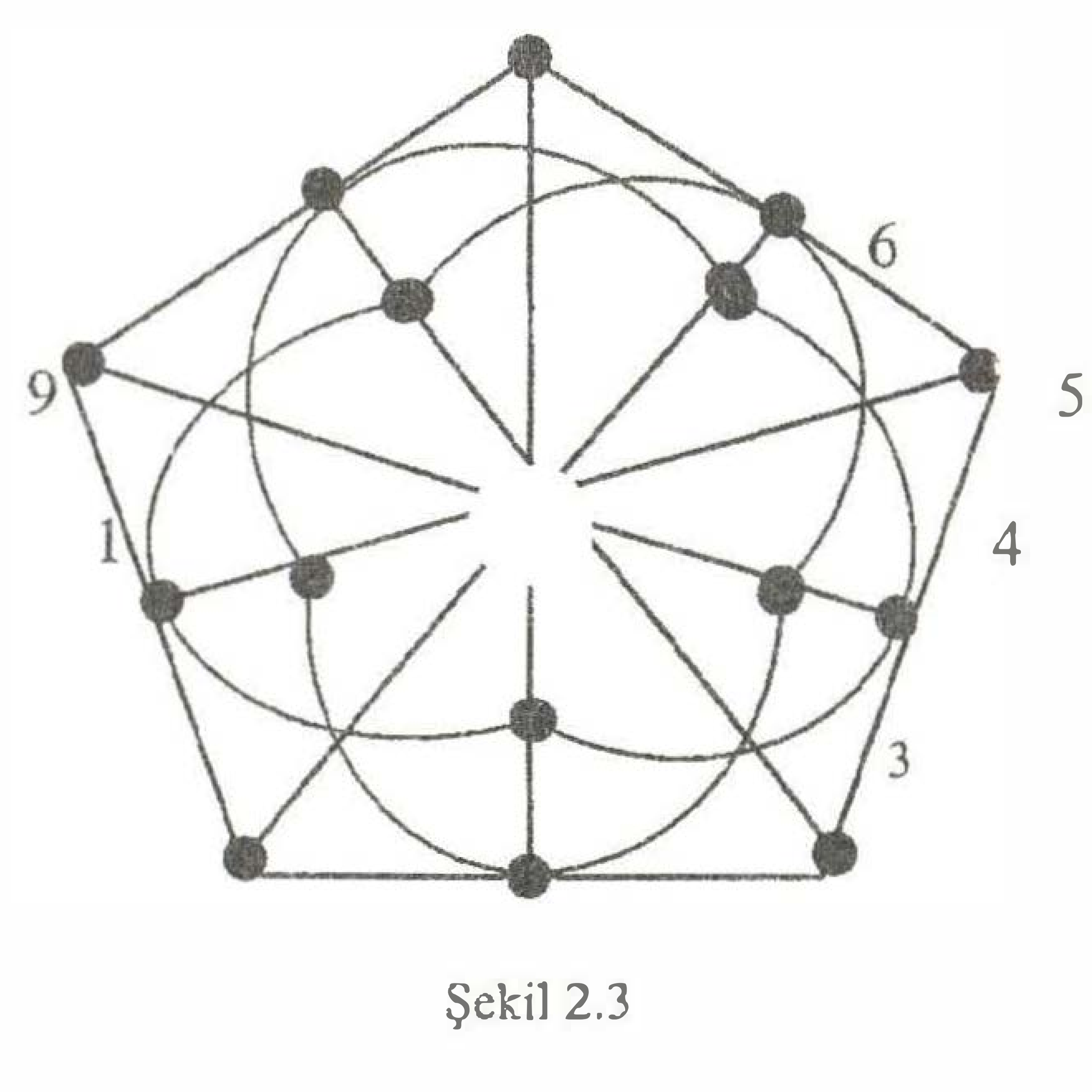
Böylece her doğruda üç nokta vardır ve her nokta üç doğru üzerindedir. Genelliği kaybetmeden, {1,2,3} ün bir doğru olduğunu düşünebiliriz.

Her 1 ve 3 noktası GD1 ile sağlanamayan diğer doğrular üzerinde olmalıdır. {3,4,5} ve {1,9,10} böyle doğrular olsun.

GD1 e göre, 9 noktası {3,4,5} ile karşılaşan bir doğru üzerindedir ama 9 üzerinde şimdiye kadar verilen doğruların hiçbirini sağlamayan üçüncü bir doğru vardır. Bu doğru {7,8,9} olsun.

Şimdi 5 noktası bir doğruda {7,8,9} ile karşılaşmalıdır. Yine, genelliği kaybetmeden, bu doğrunun {5,6,7} olduğunu varsayabiliriz.

GD1 nedeniyle {1,6}, {3,8}, {5,10}, {7,2} ve {9,4} üzerinde doğrular olmalıdır. GD1 e göre, şimdiye kadar sadece iki doğru üzerinde bulunan 2 noktası {4,9} ve {5,10} üzerindeki doğrularla buluşan doğruların üstünde olmalıdır.



Şekil 2.3

2 tam olarak üç doğru üzerinde olduğu için, 2 üzerindeki aynı doğru hem {4,9} hem de {5,10} doğrularıyla karşılaşmalıdır. Bunun anlamı da, GD1 e göre, {4,9} ve {5,10} üzerindeki doğrulardaki üçüncü noktaları bulduğumuzdur. Bunlar sırasıyla 11 ve 12 olsun.

Böylece {2,11,12}, {4,9,11} ve {5,10,12} doğrulardır. {1,6} ve {2,7} üstündeki doğrular bakımından 4 nolu nokta için benzeri bir argüman da bizi {4,13,14}, {1,6,3} ve {2,7,14} doğrularına götürür.

Aynı şekilde 6, 8 ve 10 nolu noktaları değerlendirirsek {3,8,15} ve {6,11,15} in birer doğru olduğunu görürüz. Artık elimizde on beş doğru var ve GD1, GD2 ve GD3 kanıtlandı. (Şekil 2.3)

Bu yapıyı genelliğimizi kaybetmeden tamamladık, öyleyse bu v=b=15 olan tek genelleştirilmiş dörtgendir. Şekil 2.3 ile daha önce verilen duadlar ve sintemler sistemi arasındaki izomorfizmi kolayca bulunabilir.

4* Herhangi bir S genelleştirilmiş dörtgeninde s ve t parametreleri ile,
(s+1) s.t.(s+1).(t+1) dir.

5* Eğer $s > 1$ ise $t \leq s^2$ dir. Dualide eğer $t > 1$ ise $s \leq t^2$ dir.

Hepsinden çıkaracağımız sonuçla, $s \geq 1$, $t \geq 1$ parametreleri için,
t=1 ise t+1=2 olur (her noktadan iki doğru geçer). Buradan genelleştirilmiş dörtgenimiz griddir. Genelleştirilmiş dörtgenin grid olması halinde doğrulardaki noktaların sayısı farklı olabilir. Doğrular kümesi L iki kümeye ayrılır. L_1 deki doğrulardaki noktaların sayısı sabit olup s_1 ile gösterilirken L_2 deki doğruların noktaları sayısı sabit ve s_2 dir. (şekil 2.1)

s=1 ise s+1=2 olur (her doğru üzerinde iki nokta vardır). Burada genelleştirilmiş dörtgenimiz dual griddir. Noktalardan geçen doğruların sayısı farklıdır. Noktalar kümesi P iki kümeye ayrılır. P_1 deki noktalardan sabit sayıda doğru geçer ve t_1 ile gösterilir. P_2 deki noktalardan da sabit sayıda nokta geçerken ve t_2 dir. (şekil 2.2)

s>1 ise $t \leq s^2$ ve (s+1) s.t.(s+1).(t+1) için,
s=2 ise $t \leq s^2 = 4$ olur ki t=1, 2 ve 4 değerleri olabilir.
s=3 ise $t \leq s^2 = 9$ olur ki t=1, 3, 5 ve 9 değerleri olabilir.
s=4 ise $t \leq s^2 = 16$ olur ki t=1,2,4,6,8,11,12 ve 16 değerleri olabilir....

Biz s=2, t=2 durumu 15 noktalı 15 doğru genelleştirilmiş dörtgeni şekil 2.3 de vermiştik.

IV. KOMBİNATÖRYELÖZELİKLER

S=(P, L) bir genelleştirilmiş dörtgen olsun. *p* noktasının *diki* (*p* perp),

p∈P için *p* ={x∈P x~*p*} olarak tanımlanır Genelleştirilmiş dörtgenlerde daha sık kullanıla gösterme biçimi *p* = st(*p*) dir. (*p nin yıldızı*)

Doğrularda, duallik olma özelliğini korumak için, ℓ ve kesişiyorsa ℓ~*k* şeklinde tanımlarız. Buna gör ℓ ={*k*∈L *k* ~ ℓ} biçiminde tanımlanır.

Dikkat edilmelidir ki *p*∈*p* ve ℓ∈ℓ dir.

Örneğin *p* noktası şekil 2.3 deki {4} noktası olsun.
p ={3,4,5,9,11,13,14} dür.

Bir *p* ve *q* ayrık nokta çiftinin *izi* (trace),
iz(*p*,*q*)={*p*,*q*} ={x∈P x ~ *p* ve x ~ *q*} olarak tanımlanır Böylece eğer *p* ~ *q* ise iz(*p*,*q*) pq doğrusunda noktaların kümesidir. Daha genel olarak, P deki (ya d L deki) her X alt kümesi için,
X ={x∈P(ya da L) x~a bütün a∈X için} dir. O halde ve ℓ nin sadece L nin bir elemanı olarak görünmesine y da bir noktalar kümesi olarak görünmesine göre iki ayrı anlam kazanır. Bu bağlam önceden belirlenmelidir.

p ve *q* doğrudaş olmayan noktalarımızı yine şekil 2.3 de 9 ve 6 olarak alalım,
iz(9,6)={9,6} ={1,7,11} dır.
Doğrudaş 2 ve 3 noktaları için,
iz(2,3)={2,3} ={1,2,3} dür.

Bu bölümün sonuçları noktalar için belirtecek ve sc dual olma özelliğinden yararlanarak doğrular için karşılık gelen sonuçlar bildirilecek. Bu nedenle aşağıdak tanımları sadece noktalar için veriyoruz ama duallerid varsayılacaktır.

p ve *q* ayrık noktaları için *p* ve *q* nun *üreteci* (span),
sp(*p*,*q*) = {{*p*,*q*} } = {x∈P x ~ y bütün y ∈ iz(*p*,*q*)} şeklinde tanımlanır.

Kesinlikle *p*,*q* ∈sp(*p*,*q*) ve eğer *p*~*q* ise sp(*p*,*q*) = pq dur *p* noktası için 9 ve *q* noktası için 6 yı şekil 2.3 de seçersek, 9 ve 6 noktasının üreteci;
sp(9,6)={2,6,9} noktalarıdır.

Eğer S bir genelleştirilmiş dörtgense ve s ve t parametreleri varsa, her $p \in P$ için p =st +s+1 olur.
Eğer S bir genelleştirilmiş dörtgense ve s ve t parametreleri varsa, P deki her $p \aleph q$ için iz(p,q) =t +1 olur.Her $p \aleph q$ için sp(p,q) $\leq$ t+1 olur.
Eğer sp(p,q) = t+1 ise ayrık noktalar çifti (p,q) *düzenli* (reguler) *dir*.

Elbette eğer $p \sim q$ ise ve s = t ise (p,q) çifti düzenlidir.
Her $q \neq p$ için eğer (p,q) çifti düzenliyse p noktası düzenlidir.

Her $x \in P \setminus \{p,q\}$ ve $p \aleph q$ için, eğer x $\cap$iz(p,q) ≤ 2 ise (p,q) çifti *düzensiz* (anti regüler) *dir*.

Her $q \neq p$ için, eğer (p,q) düzensizse p noktası düzensizdir.

Üzerindeki her doğru düzenliyse p noktası *eşdüzenli* (coreguler) *dir*.

(p,q,r) üçlü terimi üç adet çiftli doğrudaş olmayan noktaları ifade eder. Belli bir üçlü, T=(p,q,r) için, T nin *merkezi* T nün bir noktasıdır.
T = 0 ise T *merkezsiz* (acentric),
T = 1 ise T *eş merkezli* (unicentric),
T $\geq$ 1 ise T *merkezi* (centric) *dir* .

Eğer S bir genelleştirilmiş dörtgense ve s=t parametreleri varsa ve eğer (p,q) düzenli bir çiftse, her x,y$\in$iz(p,q) için (x,y) düzenli bir çifttir.

S bir genelleştirilmiş dörtgen olsun, s ve t parametrelerini alalım. Eğer $p \aleph q$ ise, (p,q) çifti s^2t – st – s + t üçlüsüne aittir.

Eğer S bir genelleştirilmiş dörtgense ve s=t ise, her düzensiz çift (p,q) için her (p,q,r) üçlüsünün sıfır ya da iki merkezli olduğunu göstermek mümkündür.

Eğer S bir genelleştirilmiş dörtgense ve s=t ise, ve eğer S de bir düzensiz (p,q) çifti varsa her (p,q,r) üçlüsünün sıfır ya da iki merkezi vardır.

Eğer (p,q,r) bir eş merkezli üçlü ise, p,q,r içinden herhangi ikisi düzensiz olmayan bir çift oluşturur.

Eğer S bir genelleştirilmiş dörtgense ve 1 < s < t şeklinde s ve t parametreleri varsa, hiçbir (p,q) çifti düzenli değildir (bu nedenle de hiçbir nokta düzenli değildir).

S bir genelleştirilmiş dörtgen olsun ve s ve t parametreleri olsun. O halde, ancak ve ancak her merkezi (p,q,r) üçlüsünün tam olarak 1 ya da t+1 merkezi olması şartıyla, s=1 ise veya s $\geq$ t ise, (p,q) çifti düzenlidir.

V. s=t=3 OLAN GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖRTGENLER

Bu bölümde S nin bir genelleştirilmiş dörtgen olduğunu ve s = t = 3 olduğunu varsayıyoruz. Bu tür bütün dörtgenleri noktalar ve doğrular üzerindeki düzenlilik koşullarına göre sınıflandıracağız. Bu bölümdeki bütün sonuçlar Payne (1975) tarafından verilmiştir.

3* a göre s = t = 3 olan her dörtgende
v=(s+1).(st+1)= (3+1).(3.3+1)= 40 nokta ve
b=(t+1).(st+1)= (3+1).(3.3+1)= 40 doğru vardır.
Her nokta (doğru) çifti düzenlidir ya da düzensizdir.

Eğer (p,q,r) bir üçlü ise,

i) Eğer (p,q,r) de bir ya da dört merkez varsa, p,q,r içinden herhangi ikisi düzenli bir çift oluşturur.

ii) Eğer (p,q,r) de sıfır ya da iki merkez varsa, p,q,r içinden herhangi ikisi düzensiz bir çift oluşturur.

iii) Hiçbir üçlünün tam olarak üç merkezi yoktur.

iv) Ya (p,q,r) nin bütün çiftleri düzenlidir ya da bütün çiftler düzensizdir.

Ya bütün nokta çiftleri düzenlidir ya da doğrudaş olmayan bütün nokta çiftleri düzensizdir. Aynı durum doğrular için de geçerlidir.

s=t=3 olan bütün genelleştirilmiş dörtgenlerde doğrudaş olmayan noktalardan oluşan bütün çiftler düzensizdir ve bütün doğru çiftleri düzenlidir, ya da böyle bir dörtgenin dualidir.

VI. ALT DÖRTGENLER

Eğer S', S nin bir kısıtlaması ise ve bir genelleştirilmiş dörtgense, yaklaşık lineer uzay S'=(P', L') ye S=(P, L) genelleştirilmiş dörtgenin *alt dörtgeni* (subquadrangle) denir. S'$\neq$S ise S' ye *öz alt uzay* (proper) denir. Eğer S ve S' için s, t ve s', t' parametreleri varsa, s = s', L' $\subseteq$ L olduğunu gösterir.

Örneğin S, doğrularında s_1 ya da s_2 sayıda nokta olan bir grid olsun. O halde, t = 1 dir ve $1 \leq s'_1 \leq s_1$ ve $1 \leq s'_2 \leq s_2$ olması şartıyla her s'_1, s'_2 sayıda nokta için S daima, kendisi de grid olan bir alt dörtgen içerir.Benzer şekilde, bir gridin duali olan genelleştirilmiş bir dörtgende her zaman $s = s' = 1$ ve $1 \leq t'_1 \leq t_1$, $1 \leq t'_2 \leq t_2$ şartını sağlayan alt dörtgenler vardır.

Şimdi dörtgenlerin alt dörtgenlerine ait parametrelerle ilgili bazı genel sonuçlara geçiyoruz. Eğer S', S nin bir öz alt dörtgeniyse $v' < v$ ve $b' < b$ olduğunu göstermek zor olmaz.

Eğer s', t' parametreli S'=(P', L') genelleştirilmiş dörtgeni, s ve t parametreli S=(P, L) genelleştirilmiş dörtgeninin bir alt dörtgeniyse, s=s' ya da $s \geq s't'$ olur ve benzer şekilde duali t=t' ya da $t \geq s't'$ olur.

S', S nin bir öz alt dörtgeni olsun ve s, t' ve s, t parametreleri olsun. O zaman $t \geq s$ dir. Ve $t = s$ de, $t' = 1$ olduğunu gösterir.

S', S nin bir öz alt dörtgeni olsun ve s, t' ve s, t parametreleri olsun. Eğer $s > t$ ise $t' \leq s$ olur ve $t' = s$ olması da $t = s^2$ olduğunu gösterir.

S', S nin bir öz alt dörtgeni olsun ve sırasıyla s, t' ve s, t parametreleri olsun. O halde $s > 1$ ve $t' > 1$ durumunda $s^{1/2} \leq t' \leq s$ ve $s^{3/2} \leq t \leq s^2$ olur.

S', S nin bir öz alt dörtgeni ve S'' de S' nün bir öz alt dörtgeni olsun S'', S' ve S için parametreler sırasıyla s,t'', s,t' ve s,t olsun öyle ki; $s > 1$. O halde $t'' = 1$, $t' = s$ ve $t = s^2$ olur.

Buna göre $s > 1$ şartını sağlayan ve her doğrudaki nokta sayısı sabit olan her öz alt dörtgenler zincirinde $S \supseteq S' \supseteq S'' \supseteq \ldots$ en çok üç eleman vardır. Ancak $s = 1$ ise bu doğru değildir.

Sıradaki ifade bize genelleştirilmiş bir dörtgenin alt kümesinin ne zaman aynı s parametreleri olan bir alt dörtgen olduğunu belirleme yöntemini gösteriyor.

S=(P, L) bir genelleştirilmiş dörtgen ve parametreler de s ve t olsun. $P' \subseteq P$ ve $L' \subseteq L$ ise, S' = (P', L') olur. Varsayalım ki;

i) $p,q \in P'$, $p \neq q$ ve $p,q \in \ell \in L$ gösterir ki $\ell \in L'$.

ii) her $\ell' \in L'$ için ℓ', P' de s+1 sayıda eleman içerir.

O halde aşağıdakilerden biri doğrudur.

(a) L' deki bütün doğrular bir p noktası üzerindedir öyle ki P', P de bulunan ve p ile doğrudaş olan noktaların kümesidir.

(b) $L' = \varnothing$ dir.

(c) S', S nin bir alt dörtgenidir ve s ve t' parametreler vardır.

Eğer $s = 1$ değilse yukarıdaki ifade geçerli olmayacaktır. s ve t parametreleri olan bir S genelleştirilmiş dörtgenin *ovaloidini*, S üzerinde olan ve herhangi ikisi doğrudaş olmayan st+1 sayıda nokta kümesi olarak tanımlayalım.

Genelleştirilmiş dörtgende mümkün olan en büyük küme bu tiptedir. Genelleştirilmiş dörtgenlerdeki dualliği özelliği nedeniyle, sıradaki tanımı da vermemiz gerekir.

s ve t parametreleri olan S genelleştirilmiş dörtgenin *spread* i, S üzerinde olan ve herhangi ikisi eş zamanlı olmayan st+1 sayıda doğru kümesidir.

Örneğin $t = 1$ olsun. Buna göre S bir griddir. O halde st+1=s+1 olur. Birçok ovaloid olduğu kolayca görülebilir.

$S = Q(4,k) \subseteq P(4,k)$ olsun. Burada $st+1 = k^2+1$. P(3,k), P(4,k) nın bir hiperdüzlemi olsun ve $P(3,k) \cap S = Q'$ de P(3,k) nın eliptik kuadriği olsun. Buradan Q' doğrudaş olmayan çiftli noktalar kümesidir ve k^2+1 mertebesindedir.

k nın çift sayı olması halinde Q(4,k) daima yarı-dualdir ve spreadi vardır. Ancak k tek sayı ise hiçbir spread olmaz.

Bir genelleştirilmiş dörtgende ovaloidlerin mi spreadlerin mi olduğuna karar vermek çoğu zaman zor olur. Alt dörtgenlerdeki ovaloidler hakkında bu yönde genel bir sonuç ve bunu aşağıda sunuyoruz.

s, t' parametreleri olan S'=(P', L'), s, t, $t' < t$ parametreleri olan S=(P, L) genelleştirilmiş dörtgeninin bir alt dörtgeni olsun. O halde S' bir ovaloid içerir.

VI. GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖRTGENLERDE KOLİNASYONLAR

f, S =(P, L) genelleştirilmiş dörtgeninin bir *kolinasyonu* olsun.

$P_f = \{p \in P \;\; f(p) = p\}$ dir.

$S_f = (P_f, L_f)$, S nin Pf ye kısıtlaması olsun.

Bu bölümde S nin S_f alt yapısının olasılıklarını araştıracağız.

f, S =(P, L) genelleştirilmiş dörtgeninin bir kolinasyonu olsun. S_f, S nin f da ki sabit noktalara kısıtlaması olsun. O halde aşağıdakilerden biri doğrudur.

a) S_f bir genelleştirilmiş dörtgendir.

b) S_f herhangi ikisi doğrudaş olmayan noktalar kümesidir.
c) S_f herhangi ikisi kesişmeyen (noktadaş olmayan) doğrular kümesidir.
d) S_f ortak bir noktada kesişen doğrular kümesidir.

f nin S de p den geçen her doğruyu sabitlemesi şartıyla, f kolinasyonu S deki p noktası çevresinde *sarmal* (whorl) *dır*.
f, p nin çevresinde bir sarmal olsun. Eğer f birim fonksiyonsa veya eğer bütün x ≉ p noktaları için $f(x) \neq x$ ise, f, p çevresinde bir *elasyon* (elation) *dur*. (Burada bu elasyon tanımı ile projektif düzlemlerde kullanılan tanım arasında biraz benzerlik vardır.)

Ayrıca, eğer f, p nin bütün noktalarını sabitleyen bir kolinasyonsa, f, p çevresinde bir *simetridir*.

Önemli bulduğumuz bir sonucu aşağıda ifade edeceğiz. Bir p noktası çevresindeki simetriler kümesi bir grup oluşturur. $s > 1$ için bir p noktası çevresindeki her simetri o p noktası çevresinde bir elasyondur.

Projektif düzlemlerde kolinasyon türleri ile genelleştirilmiş dörtgenlerdeki kolinasyon türleri arasındaki bağlantıyı tamamlamak için aşağıdaki tanımı yapıyoruz.

f, p noktasının çevresinde bir sarmal olsun ve $f(q) = q$ şartını sağlayan bir q ≉ p noktası olsun. Eğer f birim kolinasyonsa ya da eğer q bir tekse (yegane), o zaman f, p çevresinde bir *homolojidir*. Bu tanımı projektif düzlemler için yapılanla karşılaştırmada fayda vardır.

VII. GENELLEŞTİRİLMİŞ DÖRTGENLERİN KISA TARİHİ

Genelleştirilmiş dörtgenler iki ayrı alanda ve iki farklı teorinin özel durumları olarak ortaya çıkar. Bunlar "genelleştirilmiş n-genler" denen yapıların özel bir hali olarak Tits tarafından ortaya atılmıştır (1959). Genelleştirilmiş n-gen tanımı, pek karmaşık olmamakla beraber iyi motive edilmesi gerekir. Bu konunun gruplar teorisindeki bazı sorunlarla ilişkili olarak ortaya çıktığın söylemek yeterli olur.

Genelleştirilmiş dörtgenler Bose' un çalışmasında yine ortaya çıkmıştır(1963). Bose kısmi geometri adını verdiği sistemlerle ilgilenmiştir. Genel olarak, bunların ortaya çıktığı teorinin asıl kaynağı istatistiksel sorunlardı.

Bu yapılarla ilgili önemli çalışmalar son yirmi beş yılda ve daha çok Thas, Payne ve Tallini tarafından yapılmıştır. Okuyucu kaynakçadaki makalelere bakabilir. Belirtildiği gibi, klasik örneklerin tümü Tits' tendir. Ahrens ve Szekeres k–1 , k+1 parametreleri olan ve k nın başlıca asal kuvvetler olduğu yeni bir dörtgenler sınıfı keşfetmişti (1969). M. Hall (1971) bunu bağımsız olarak k için vermiştir. Payne (1972–1974) bunu genelleştirerek daha fazla örnek üretmiştir. En yeni örnekler ise Kantor' dan alınmıştır (1980). Bu 1979 yılında keşfedilmiştir ve parametreler de k^2, k dır, $k \equiv 2$ (mod 3).

En önemli sorunlardan biri bir genelleştirilmiş dörtgenler sınıflandırması yapmaktır. Klasik örneklerin bilinen sınıflandırmalarını çoğu Thas'dan alınmıştır (1975, 1977, 1978). Payne genelleştirilmiş dörtgenleri kolineasyon grupları açısından sınıflandıran en önemli araştırmacıdır. Okuyucu Payne'e bakabilir (1982). Ancak M. Walker (1977), Thas (1979) ve Tits (1974) de çok sayıda çalışma yapmıştır.

VIII. SONUÇ

Bu çalışmada yaklaşık lineer uzaylarda genelleştirilmiş dörtgenler, geometrik yorumları ve parametrik açıklamaları ile incelenmeye çalışıldı. Genelleştirilmiş dörtgenlerin çeşitli kombinatöryel özellikleri verildi. Sintem ve duad yapıları kurulup incelendi. Genelleştirilmiş dörtgenlerde kolinasyonlar ifade edildi. Alt dörtgenler hakkında bilgiler verildi. Genelleştirilmiş dörtgenler hakkında belirli kısıtlamalarla yeni özellikler elde edileceği ve varolan kavramların etraflıca incelendiğinde daha verimli açıklamaların ortaya çıkabileceği gözlendi.

KAYNAKLAR

[1] Batten, L. Margaret, Combinatoric Of Finite Geometries, Cambridge University Press, (1976) Cambridge.
[2] Kaya ,R. Projektif Geometri, (1992), Eskişehir.
[3] Seidenberg, L. Lectures in Projective Geometry, D. Van Nostrand Company, İnc. (1962), New York