

## Reel Kuaternionlarla Serret-Frenet Formülleri

S. DEMİR<sup>1\*</sup>, K. ÖZDAŞ<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Fizik Bölümü Eskişehir

**Özet:** Bu çalışmada reel kuaternionların genel tanımı yapıldıktan sonra reel kuaternionlarla Serret-Frenet formülleri arasındaki bağıntılar incelenmiştir. Reel kuaternionların dört baz elemanı ile temsil edilebilmesine karşın, kompleks nitelikte olan üç baz elemanı kullanılarak da vektörler kolaylıkla ifade edilebilmektedir. Diğer yandan, kuaternion çarpımının çok iyi bilinen vektör çarpımlarından farklı olması Serret-Frenet formüllerinin reel kuaternionlarla elde edilmesi için bir engel değildir. Bu çalışmada Serret-Frenet formüllerinin temsili için alternatif bir yöntem geliştirilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Reel kuaternion, Koordinat sistemi, Serret-Frenet formülleri.

## Serret-Frenet Formulas By Real Quaternions

**Abstract:** In this paper, after general definition of quaternions, relations between real quaternions and Serret-Frenet formulas have been investigated. Although real quaternions are represented by four basis elements, vectors can also be expressed by using their three basis elements that have complex nature. On the other hand, the difference of quaternion product than well-known the vector product is not an obstacle to obtain Serret-Frenet formulas by real quaternions. In this study, an alternative formulation has been developed for the representation of Serret-Frenet formulas.

**Keywords:** Real quaternion, Coordinate system, Serret-Frenet formulas.

### Giriş

Kuaternionlar, 1843 yılında İrlandalı matematikçi William Rowan Hamilton'un kompleks sayıları 3-boyutlu uzaya genelleştirmek amacıyla yaptığı çalışmalar sırasında bulunmuştur [1]. Klasik Newton mekaniğinden kuantum fiziğine, robotik uygulamalardan astrofiziğe kadar kendisine uygulama alanı bulan kuaternionlar, zaman içerisinde hem tanımları hem de cebirsel özellikleri bakımından geliştirilmiştir. Bugün reel, kompleks ve dual kuaternion olmak üzere üç farklı tipte kuaternion tanımı mevcuttur.

Reel kuaternionlar yapı bakımından en basittir ve diğer kuaternion türlerinin tanımlanmasında temel rol oynarlar. Bu tür kuaternionlar, iki kompleks sayının bir çeşit genelleştirilmiş biçimi olduklarından 4-boyuta kadar fiziksel nicelikleri başarı ile ifade edebilecek özelliktedirler. Reel kuaternionlar, bir skalar ile imajiner baz elemanlarına sahip bir vektörden oluşan özgün bir yapı olarak düşünülebilir. Bu nedenle skalar ve vektörlere ilişkin özelliklerinin nerede ise tamamı kuaternionlar tarafından sağlanır. Kuaternionlar vektörlerin kullanıldığı fiziksel niceliklerin temsilde önemli derede rol oynamaktadırlar. Ayrıca, özgün yapıları ve işlevsellikleri nedeniyle dönme ve öteleme hareketinin temsilde de oldukça kullanışlıdır. Özellikle dönme hareketi ile ilişkili olan açısal yerdeğiştirme, açısal hız, açısal ivme ve momentum niceliklerinin türetilmesi konusunda Chou

tarafından yapılan çalışma oldukça dikkat çekicidir [2]. Öte yandan Euler parametrelerinin birim kuaternion olarak ele alınması durumunda bir koordinat sisteminin yönelimini belirlemede doğrultman kosinüsleri gibi klasik yöntemlere göre önemli derecede avantajlara sahip olduğu Chou ve Wehage tarafından yapılan çalışmalarda da belirtilmektedir [2-3]. Bu nedenle kuaternionlarla dönme hareketinin temsili bir çok araştırmacı tarafından incelenmiştir [4-8].

Diğer kuaternion tipleri ise iki reel kuaternionun çeşitli kombinasyonları ile tanımlanırlar. Adından anlaşılacağı üzere iki reel kuaternionun kompleks bir kombinasyonu olan kompleks kuaternionlardan fizik yasalarının daha kısa ve öz biçimde ifade edilmesinde yararlanılmaktadır [9]. Lorentz dönüşümleri, rölativistik mekanik ve elektromanyetizma bu tür kuaternionlar yardımıyla daha kolay bir şekilde incelenebilmektedir [10-12]. Ayrıca sekiz bileşene sahip olmaları nedeniyle elektromanyetizma için temel yapı taşı olan Maxwell denklemlerinin tek bir eşitlik ile temsil edilebilmesine olanak da sağlamaktadırlar [13].

Diğer bir kuaternion türü olan dual kuaternionlar, dönme ve öteleme hareketinin yer aldığı tüm sistemlerde başarı ile kullanılmaktadır. Reel kuaternionlar uzaydaki bir noktanın konumunu üç baz elemanı ile belirleyebilirken, bir dual kuaternion altı bileşeni yardımıyla bir doğruyu tanımlayabilir. Öte yandan dönme hareketinin geometrisinin dual kuaternionlar kullanılarak kolaylıkla

\* Email:sudemir@anadolu.edu.tr

ifade edilebilmesi nedeniyle bu kuaternion tipi robotik uygulamalarda kullanılan kinematik ve dinamik ifadelerin elde edilmesinde yaygın olarak kullanılmaktadır [14-20]. Ayrıca dual kuaternionlar kullanılarak elektromanyetik teorinin de incelenmesi mümkündür [21].

Bu çalışmanın amacı; klasik mekanik açısından çok iyi bilinen Serret-Frenet formüllerinin reel kuaternionlarla da çok kolay bir biçimde ifade edilebileceğini göstermektir. Bilimsel literatürde kuaternionlarla Serret-Frenet formülleri ilk olarak Bharathi ve Nagaraj tarafından incelenmiştir [22]. Bununla birlikte daha sonra bu formüllerin Güneş ve Sivridağ tarafından dual kuaternionlar kullanılarak elde edildiği görülmektedir [23]. Tuna ve Çöken tarafından da  $ds^2 = -dx^2 - dy^2 + dz^2 + dw^2$  metrikli  $E_2^4$  yarı-Öklid uzayındaki kuaternionik eğriler için Serret-Frenet formülleri elde edilmiştir [24]. Bu çalışmada ise reel kuaternionlar kullanılarak alternatif bir temsil yöntemi geliştirilmiştir. Kuaternionların ileri cebirsel yapıları, basitlikleri ve en önemlisi matrislerle izomorflukları nedeniyle bu temsillerin matematiksel açıdan oldukça faydalı olacağı düşünülmektedir.

## Reel Kuaternionlar

$q_0, q_1, q_2, q_3$  reel sayılar ve  $e_0=1$  ve  $e_1, e_2, e_3$  imajiner taban elemanları olmak üzere  $\mathbf{q}$  reel kuaternionu;

$$\mathbf{q} = q_0 e_0 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \quad (2.1)$$

şeklinde tanımlanır.  $e_0$  ve imajiner baz elemanları  $e_1, e_2, e_3$  aşağıdaki çarpım kurallarına uyarlar:

$$e_0^2 = 1, \quad e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = -1, \quad (2.2)$$

$$e_1 e_2 = e_3, \quad e_2 e_3 = e_1, \quad e_3 e_1 = e_2, \quad (2.3)$$

$$e_2 e_1 = -e_3, \quad e_3 e_2 = -e_1, \quad e_1 e_3 = -e_2. \quad (2.4)$$

$\mathbf{q}$  reel kuaternionuna taban elemanları  $e_0, e_1, e_2$  ve  $e_3$  olan 4-boyutlu uzaydaki bir vektör gözüyle bakılabilir.  $q_0, q_1, q_2$  ve  $q_3$  reel sayılarına  $\mathbf{q}$  kuaternionunun bileşenleri denir.  $e_1, e_2, e_3$  imajiner taban elemanları, 3-boyutlu kartezyen koordinat sisteminin baz vektörleri olarak da alınabilir. Böylece  $\mathbf{q}$  reel kuaternionu;  $q_0$  skaları ile vektörel kısmı temsil eden  $\mathbf{q} = q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3$ 'ün lineer bir kombinasyonu olarak,

$$\mathbf{q} = q_0 e_0 + \mathbf{q} \quad (2.5)$$

biçiminde de ifade edilebilir.  $\mathbf{q}$  kuaternionu; skalar kısmın yokluğu halinde vektör kuaternion ( $\mathbf{q} = \mathbf{q}$ ), vektörel kısmının olmaması durumunda da skalar kuaternion olarak isimlendirilir.

Reel kuaternionları matris şeklinde ifade etmek mümkündür. Bu amaçla

$$\mathbf{I}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

birim matrisi ile

$$\sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Pauli spin matrisi kullanılarak 4-Boyutlu uzayda kuaternionların taban elemanlarına karşılık gelen matrisler,

$$\Omega_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\Omega_1 = \begin{bmatrix} i\sigma_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -i\sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\Omega_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\Omega_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & i\sigma_2 \\ i\sigma_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

biçiminde tanımlanır.  $\mathbf{q}$  reel kuaternionu ise  $4 \times 4$  matris formunda,

$$\mathbf{Q} = q_0 \Omega_0 + q_1 \Omega_1 + q_2 \Omega_2 + q_3 \Omega_3 = \begin{bmatrix} q_0 & q_1 & q_2 & q_3 \\ -q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ -q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ -q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

şeklinde temsil edilir.  $\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  matrisleri, kuaternion baz elemanları için tanımlanan (2.2)-(2.4) eşitliklerine benzer çarpım bağıntılarını sağlarlar [13]:

$$\Omega_0^2 = \Omega_0, \quad \Omega_1^2 = \Omega_2^2 = \Omega_3^2 = -\Omega_0, \quad (2.13)$$

$$\Omega_1 \Omega_2 = \Omega_3, \quad \Omega_2 \Omega_3 = \Omega_1, \quad \Omega_3 \Omega_1 = \Omega_2, \quad (2.14)$$

$$\Omega_2 \Omega_1 = -\Omega_3, \quad \Omega_3 \Omega_2 = -\Omega_1, \quad \Omega_1 \Omega_3 = -\Omega_2. \quad (2.15)$$

Öte yandan  $\mathbf{q}$  kuaternionunu,

$$\mathbf{Q} = [q_0, q_1, q_2, q_3]^T = [q_0, \mathbf{q}]^T = \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

biçimindeki  $4 \times 1$  matris ile de temsil etmek mümkündür.

Bir  $\mathbf{p}$  kuaternionunun eşleniği, imajiner kısmının diğer bir deyişle vektörel kısmının işaretinin değiştirilmesi ile elde edilir ve  $\mathbf{p}^*$  ile gösterilir. Eşlenik,

$$\mathbf{p}^* = p_0 \mathbf{e}_0 - \mathbf{p} = p_0 \mathbf{e}_0 - p_1 \mathbf{e}_1 - p_2 \mathbf{e}_2 - p_3 \mathbf{e}_3. \quad (2.17)$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlem,  $\mathbf{p}$  kuaternionunu temsil eden matrisin transpozesi alınarak,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^* &= \mathbf{P}^T \\ &= p_0 \mathbf{\Omega}_0 - p_1 \mathbf{\Omega}_1 - p_2 \mathbf{\Omega}_2 - p_3 \mathbf{\Omega}_3 \\ &= \begin{pmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & p_0 & p_1 \\ p_3 & p_2 & -p_1 & p_0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

biçiminde de gerçekleştirilebilir.

Kuaternion çarpımı vektörlerin çarpımından daha farklıdır. Alışlagelen vektör çarpımından daha fazla nicelik içerirler.  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  kuaternionlarının çarpımı;

$$\begin{aligned} \mathbf{pq} &= (p_0 + \mathbf{p})(q_0 + \mathbf{q}) \\ &= p_0 q_0 + p_0 \mathbf{q} + q_0 \mathbf{p} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \end{aligned} \quad (2.19)$$

şeklinde tanımlanır. Görüldüğü gibi kuaternion çarpımı iki skalar çarpımı, skalar vektörle çarpımı, skalar ve vektörel çarpım gibi vektör cebirinin tüm çarpımlarını içerir. Burada “ $\cdot$ ” ve “ $\times$ ” üç boyutlu vektör uzayında skalar ve vektörel çarpımları göstermektedir. Kuaternion çarpımını matris ifadeleri ile de elde etmek mümkündür. Bu çarpım,

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T & p_0 \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ \mathbf{q} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} p_0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & p_0 & p_3 & -p_2 \\ p_2 & p_3 & p_0 & -p_1 \\ p_3 & -p_2 & p_1 & p_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.20)$$

veya

$$\begin{aligned} \mathbf{PQ} &= \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q} \\ \mathbf{q}^T & q_0 \mathbf{I}_3 - \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & q_3 & -q_2 \\ q_2 & -q_3 & q_0 & q_1 \\ q_3 & q_2 & -q_1 & q_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki ifadelerde  $\mathbf{I}_3$ ,  $3 \times 3$  birim matris olup  $\tilde{\mathbf{p}}$  ve  $\tilde{\mathbf{q}}$  matrisleri ise

$$\tilde{\mathbf{p}} = \begin{bmatrix} 0 & -p_3 & p_2 \\ p_3 & 0 & -p_1 \\ -p_2 & p_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

$$\tilde{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} 0 & -q_3 & q_2 \\ q_3 & 0 & -q_1 \\ -q_2 & q_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

şeklinde tanımlanan antisimetrik matrislerdir. Kuaternion çarpımı değişme özelliğine sahip değildir. Fakat (2.20) ve (2.21) eşitlikleri için

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_0 & -\mathbf{p} \\ \mathbf{p}^T & p_0 \mathbf{I}_3 + \tilde{\mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

ve

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q_0 & -\mathbf{q} \\ \mathbf{q}^T & q_0 \mathbf{I}_3 - \tilde{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

matrisleri tanımlandığı takdirde bu ifadeleri,

$$\mathbf{PQ} = \tilde{\mathbf{P}}\mathbf{Q} \quad (2.26)$$

ve

$$\mathbf{PQ} = \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{P} \quad (2.27)$$

şeklindeki kompakt formda yeniden yazmak mümkün olacaktır. Böylece değişme özelliği matrisler yardımıyla kolaylıkla elde edilebilir [2]:

$$\tilde{\mathbf{P}}\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{P}. \quad (2.28)$$

Öte yandan fiziksel uygulamalarda kullanılmak üzere kuaternion çarpımı skalar ve vektörel çarpımla ilişkilendirilebilir.  $\mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q}$  kuaternionları  $\mathbf{p} = p_0 + \mathbf{p}$  ve  $\mathbf{q} = q_0 + \mathbf{q}$  ile verilen vektör kuaternionlar olarak tanımlansın. Bu takdirde  $\mathbf{pq}$  ve  $\mathbf{qp}$  çarpımları;

$$\mathbf{pq} = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (2.29)$$

$$\mathbf{qp} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{q} \times \mathbf{p} \quad (2.30)$$

olacaktır.  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}$  ve  $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = -\mathbf{q} \times \mathbf{p}$  olduğundan;

$$\mathbf{qp} = -\mathbf{q} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (2.31)$$

şeklinde yazılabilir. Bu iki eşitlikten yararlanarak  $\mathbf{pq}$  ile  $\mathbf{qp}$  'nin toplamı için,

$$\mathbf{pq} + \mathbf{qp} = -2 \mathbf{q} \cdot \mathbf{p} \quad (2.32)$$

yazılabilir. Elde edilen nicelik skalar kuaterniondur. Daha açık bir ifade ile skalar çarpım-kuaternion çarpımı ilişkisi,

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} \equiv \bar{\mathbf{p}} \cdot \bar{\mathbf{q}} = -\frac{1}{2}(\mathbf{pq} + (\mathbf{pq})^*) \quad (2.33)$$

şeklinde olmalıdır.  $\mathbf{pq}$  ile  $\mathbf{qp}$  'nin farkı ise;

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = 2 \mathbf{p} \times \mathbf{q} \quad (2.34)$$

ile verilen vektör kuaterniondur. Benzer şekilde vektörel çarpım-kuaternion çarpımı ilişkisi için de;

$$\mathbf{p} \times \mathbf{q} \equiv \bar{\mathbf{p}} \times \bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}(\mathbf{pq} - \mathbf{qp}) = \frac{1}{2}(\mathbf{pq} - (\mathbf{pq})^*) \quad (2.35)$$

eşitliği yazılabilir [26].

Bir  $\mathbf{q}$  reel kuaternionun normu kendisi ile eşleniğinin çarpımına eşittir ve  $N(\mathbf{q})$  ile gösterilir. Norm,

$$N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^* \mathbf{q} = q_0^2 + q_1^2 + q_2^2 + q_3^2 \quad (2.36)$$

şeklinde tanımlanır. Normu bir olan kuaterniona ise birim kuaternion denir. Matrislerle ifade edildiğinde  $\mathbf{q}$  kuaternionun normunu,

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^* = \mathbf{Q}^*\mathbf{Q} = N(\mathbf{q}) \Omega_0 \quad (2.37)$$

biçiminde veya "Tr" matrisin izini göstermek üzere

$$N(\mathbf{q}) = \frac{1}{4} \text{Tr}(\mathbf{Q}\mathbf{Q}^*) \quad (2.38)$$

şeklinde de elde etmek mümkündür. Norm tanımı kuaternionları alternatif biçimde ifade etme olanağı da sunar. Her kuaternionu polar formda yazmak mümkündür.  $\mathbf{u}$  birim kuaternion olmak üzere  $\mathbf{q}$  reel kuaternionu,

$$\mathbf{q} = \sqrt{N(\mathbf{q})} (\cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta) \quad (2.39)$$

şeklinde ifade edilir. Burada;

$$\cos \theta = \frac{q_0}{\sqrt{N(\mathbf{q})}} \quad (2.40)$$

ve

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{q_1^2 + q_2^2 + q_3^2}}{\sqrt{N(\mathbf{q})}} \quad (2.41)$$

olmak üzere,  $-1 \leq \cos \theta \leq +1$ ,  $-1 \leq \sin \theta \leq +1$  aralığında değişirler ve  $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$  koşulunu sağlarlar.

$\mathbf{q} = q_0 \mathbf{e}_0 + q_1 \mathbf{e}_1 + q_2 \mathbf{e}_2 + q_3 \mathbf{e}_3$  reel kuaternionu,

$$\mathbf{q} = \sqrt{N(\mathbf{q})} e^{u\theta} \quad (2.42)$$

biçimindeki eksponansiyel ifade ile de temsil etmek mümkündür. Bu ifadede  $\mathbf{u}^2 = -1$  olmak üzere,

$$e^{u\theta} = \cos \theta + \mathbf{u} \sin \theta \quad (2.43)$$

ile verilir.

3-Boyutlu uzayın vektörleri üzerine bölme işlemi tanımlı değildir. Diğer bir deyişle iki vektörün bölümünden bahsedilemez. Vektörlerin tersine, kuaternionlar bölüm cebiri oluşturdukları için bir kuaternionun tersi tanımlıdır.  $\mathbf{q}$  sıfır kuaternion olmamak şartıyla;

$$\mathbf{q}\mathbf{q}^{-1} = \mathbf{q}^{-1}\mathbf{q} = 1 \quad (2.44)$$

koşulunu sağlayan  $\mathbf{q}^{-1}$  kuaternionuna  $\mathbf{q}$  kuaternionunun tersi denir. Öte yandan  $N(\mathbf{q}) = \mathbf{q}\mathbf{q}^* = \mathbf{q}^*\mathbf{q}$  ile verildiğine göre;

$$\frac{\mathbf{q}\mathbf{q}^*}{N(\mathbf{q})} = 1 \quad (2.45)$$

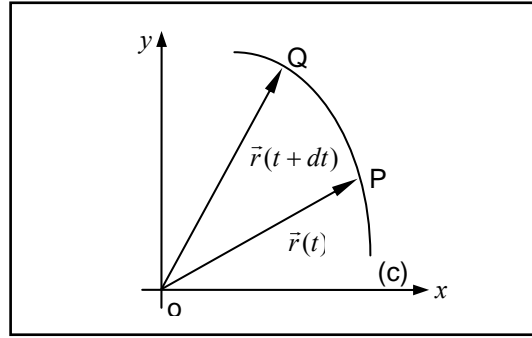
bağıntısı yazılabilir. Bundan dolayı  $\mathbf{q}$  kuaternionunun tersi;

$$\mathbf{q}^{-1} = \frac{\mathbf{q}^*}{N(\mathbf{q})} \quad (2.46)$$

olmalıdır.

## Doğal Koordinat Sisteminin (Serret-Frenet Üçüzlüsü) Reel Kuaternionlarla Temsili

Şekil 3.1'de görüldüğü gibi sürekli bir (c) eğrisi üzerinde hareket eden bir parçacık ele alınsın.



Şekil 3.1 Eğri üzerinde hareket

Parçacığın  $\vec{r}$  konum vektörü zamanın fonksiyonu olarak kuaternion formunda,

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{e}_1 + y(t)\mathbf{e}_2 + z(t)\mathbf{e}_3 \quad (3.1)$$

şeklinde gösterilir ve (2.12) tanımı gereğince,

$$\mathbf{R} = x(t)\Omega_1 + y(t)\Omega_2 + z(t)\Omega_3 \quad (3.2)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & x(t) & y(t) & z(t) \\ -x(t) & 0 & -z(t) & y(t) \\ -y(t) & z(t) & 0 & -x(t) \\ -z(t) & -y(t) & x(t) & 0 \end{bmatrix}$$

matrisi ile temsil edilir.  $\mathbf{r}$  kuaternionu eğri üzerinde alınan bir başlangıçtan itibaren ölçülen (s) yay uzunluğunun fonksiyonu olarak yazılıp zamana göre türevi alınabilir. Bu durumda

$$\mathbf{v} = \frac{d}{dt} \mathbf{r} \quad (3.3)$$

$$= \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_0 \right] [x(s)\mathbf{e}_1 + y(s)\mathbf{e}_2 + z(s)\mathbf{e}_3]$$

$$= \frac{dx(s)}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dy(s)}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dz(s)}{dt} \mathbf{e}_3$$

vektör kuaternionu elde edilir.  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$  imajiner baz elemanlarının zamana göre türevleri sıfır olduğuna göre artık bunları kartezyen koordinat sisteminin baz vektörleri  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  ile eşleştirmek mümkündür. Öte yandan yukarıdaki ifade tekrar düzenlenirse,

$$\mathbf{v} = \frac{dx(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_1 + \frac{dy(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_2 + \frac{dz(s)}{ds} \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_3 \quad (3.4)$$

$$= \left[ \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_0 \right] \left[ \frac{dx(s)}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{e}_2 + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{e}_3 \right]$$

biçimini alacaktır. (3.3) eşitliği aslında iki kuaternionun çarpımından oluşmaktadır.  $\frac{ds}{dt} \mathbf{e}_0$  skalar kuaternionu ile  $\frac{dx(s)}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{e}_2 + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{e}_3$  vektör kuaternionlarının çarpımı ile  $\mathbf{v}$  kuaternionu elde edilmektedir. Burada;

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{dx(s)}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{e}_2 + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{e}_3 \\ &= t_1 \mathbf{e}_1 + t_2 \mathbf{e}_2 + t_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.5)$$

tanımı yapılsın ve  $\mathbf{t}$  kuaternionu (2.12) ifadesinden yararlanılarak,

$$\mathbf{T} = t_1 \mathbf{\Omega}_1 + t_2 \mathbf{\Omega}_2 + t_3 \mathbf{\Omega}_3 = \begin{bmatrix} 0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ -t_1 & 0 & -t_3 & t_2 \\ -t_2 & t_3 & 0 & -t_1 \\ -t_3 & -t_2 & t_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

matrisi ile temsil edilsin. Bu taktirde (3.4) eşitliğini,

$$\mathbf{v} = \left[ \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{t} \quad (3.7)$$

şeklinde yazmak mümkün olacaktır.  $\mathbf{t}$  vektör kuaternionunun normu;

$$\begin{aligned} N(\mathbf{t}) &= \mathbf{t} \mathbf{t}^* = \mathbf{t}^* \mathbf{t} = -\vec{t} \cdot (-\vec{t}) + \vec{t} \times (-\vec{t}) \\ &= \left( \frac{dx(s)}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dy(s)}{ds} \right)^2 + \left( \frac{dz(s)}{ds} \right)^2 \\ &= 1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

olduğuna göre  $\mathbf{t}$  kuaternionu birim kuaterniondur.

$\mathbf{v}$  reel vektör kuaternionunun normu;

$$N(\mathbf{v}) = \mathbf{v} \mathbf{v}^* = \mathbf{v}^* \mathbf{v} = N \left( \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_0 \right) N(\mathbf{t}) = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \quad (3.9)$$

ise (3.4) ifadesi,

$$\mathbf{v} = \sqrt{N(\mathbf{v})} \mathbf{t} \quad (3.10)$$

şeklinde yeniden yazılabilir.  $\mathbf{v}$  kuaternionu parçacığın hızına karşı gelen vektörü temsil ederken,  $\mathbf{t}$  birim kuaternionu da yöreğe teğet birim vektöre karşılık gelir.

Parçacığın  $\mathbf{P}$  noktasındaki ivmesi ise  $\mathbf{v}$  kuaternionuna türev operatörünün uygulanması ile elde edilir. Buna göre  $\mathbf{a}$ , parçacığın ivme vektörüne karşı gelen kuaternion olmak üzere;

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= d_t \mathbf{v} = \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_0 \right] \left( \left[ \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{t} \right) \\ &= \left[ \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{e}_0 \right] \left[ \frac{dx(s)}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{e}_2 + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{e}_3 \right] \\ &\quad + \left[ \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_0 \right] \left[ \frac{d}{dt} \mathbf{e}_0 \right] \left[ \frac{dx(s)}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{e}_2 + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left[ \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{e}_0 \right] \left[ \frac{dx(s)}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{dy(s)}{ds} \mathbf{e}_2 + \frac{dz(s)}{ds} \mathbf{e}_3 \right] \\ &\quad + \left[ \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_0 \right] \left[ \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \mathbf{e}_1 + \frac{d^2 y(s)}{ds^2} \mathbf{e}_2 + \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \mathbf{e}_3 \right] \left[ \frac{ds}{dt} \mathbf{e}_0 \right] \end{aligned}$$

ile verilmelidir. Yukarıdaki eşitlik yeniden düzenlenirse;

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{t} + \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{t} \quad (3.11)$$

elde edilir. Öte yandan  $\mathbf{t}$  birim vektör kuaternionunun normunun  $N(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \mathbf{t}^*$  yay uzunluğuna göre türevi için;

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \right] N(\mathbf{t}) &= \left( \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{t} \right) \mathbf{t}^* + \mathbf{t} \left( \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{t}^* \right) \\ &= \left[ \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \mathbf{e}_1 + \frac{d^2 y(s)}{ds^2} \mathbf{e}_2 + \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \mathbf{e}_3 \right] \mathbf{t}^* \\ &\quad + \mathbf{t} \left[ -\frac{d^2 x(s)}{ds^2} \mathbf{e}_1 - \frac{d^2 y(s)}{ds^2} \mathbf{e}_2 - \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \mathbf{e}_3 \right] \end{aligned}$$

bağıntısı elde edilir. Yukarıdaki ifadeye;

$$\left[ \frac{d^2 x(s)}{ds^2} \mathbf{e}_1 + \frac{d^2 y(s)}{ds^2} \mathbf{e}_2 + \frac{d^2 z(s)}{ds^2} \mathbf{e}_3 \right] = k \mathbf{n} = \frac{1}{\rho} \mathbf{n} \quad (3.12)$$

vektör kuaternionu tanımı yapılsa bu eşitlik,

$$0 = k \mathbf{n} \mathbf{t}^* + \mathbf{t} k \mathbf{n}^* \quad (3.13)$$

şeklindeki kısa forma indirgenir.  $\mathbf{t}^* = -\mathbf{t}$  olduğundan kuaternion çarpımlarını içeren bu ifade daha açık formda tekrar yazılırsa,

$$\begin{aligned} 0 &= -k \vec{n} \cdot (-\vec{t}) + k \vec{n} \times (-\vec{t}) - \vec{t} \cdot (-k \vec{n}) + \vec{t} \times (-k \vec{n}) \\ &= 2k \vec{n} \cdot \vec{t} \end{aligned} \quad (3.14)$$

bağıntısı elde edilir. Skalar çarpımın özellikleri dikkate alınarak (3.14) eşitliği ile elde edilen sonuç,  $\mathbf{n}$  kuaternionu ile temsil edilen  $\vec{n}$  vektörü ile  $\mathbf{t}$  kuaternionu ile temsil edilen  $\vec{t}$  vektörünün arasındaki açının  $90^\circ$ , diğer bir ifade ile bu iki vektörün birbirlerine dik olduğunu göstermektedir:

$$\vec{n} \perp \vec{t} \quad (3.15)$$

$\mathbf{P}$  noktasında  $\mathbf{t}$  kuaternionuna karşı gelen vektöre dik birim vektör  $\mathbf{n}$  birim kuaternionu ile temsil edilirse (3.11) ile verilen ivme ifadesi;

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2 s}{dt^2} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{t} + \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 k \mathbf{n} \quad (3.16)$$

şeklini alır.  $k'$  ya (c) eğrisinin  $\mathbf{P}$  noktasındaki eğriliği denir [27].

$\mathbf{t}$  vektör kuaternionu ile  $\mathbf{n}$  vektör kuaternionunun çarpımı yine bir vektör kuaternion olacağına göre, bu işlem sonucunda elde edilecek reel kuaternion  $\mathbf{b}$  ile gösterilsin. Bu çarpım açıkça yazılırsa,

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \mathbf{n} = -\vec{t} \cdot \vec{n} + \vec{t} \times \vec{n} \quad (3.17)$$

ifadesine ulaşılır. Bu bağıntı (2.20) ve (2.21) tanımları gereğince,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \tilde{\mathbf{T}} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\vec{t} \\ \mathbf{t}^\top & \vec{t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \\ &= \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{n} \\ \mathbf{n}^\top & -\vec{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.18)$$

matris eşitliği ile de kolayca temsil edilebilir. (3.17) ifadesinde  $t$  ve  $n$  reel kuaternionlarının temsil ettiği vektörlerin hem skalar çarpımı hem de vektörel çarpımı olduğu görülmektedir. Öte yandan (3.15) ifadesi ile vurgulandığı üzere  $t$  ve  $n$  reel kuaternionlarının temsil ettikleri vektörler birbirlerine diktir. Bu nedenle (3.17) eşitliğindeki skalar çarpım sıfırdır. Dolayısı ile bu eşitlik,

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \mathbf{n} = \vec{t} \times \vec{n} \quad (3.19)$$

şeklinde ifade edilmelidir. Bu gösterimden anlaşılacağı üzere  $\mathbf{b}$  reel kuaternionunun temsil ettiği vektör hem  $\vec{t}$  'ye hem de  $\vec{n}$  'ye diktir.  $\mathbf{b}$  vektör kuaternionu,

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\tau} \left( \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \mathbf{n} \right) + \frac{1}{\rho \tau} \mathbf{t} \quad (3.20)$$

şeklinde tanımlansın.  $\tau$  'ya burulma ve  $\rho$  'ya ise burulma yarıçapı denir [27].

$\mathbf{b}$  ile  $\mathbf{t}$  arasındaki ilişki (3.19) denklemi ile belirlenmiştir. Benzer şekilde  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{t}$  ve  $\mathbf{n}$  kuaternionları arasındaki diklik bağıntıları (2.33) eşitliğinden yararlanarak elde edilebilir.  $\vec{b}$  ve  $\vec{n}$  vektörleri arasındaki skalar çarpım bağıntısı kuaternion formunda,

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = \frac{1}{2} [\mathbf{b} \mathbf{n} + \mathbf{n} \mathbf{b}] = \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{n} + \frac{1}{\rho \tau} \vec{t} \cdot \vec{n} \quad (3.21)$$

ile verilir. (2.26) ve (2.27) eşitlikleri gereğince bu ifadeyi matris formunda,

$$\begin{bmatrix} \vec{b} \cdot \vec{n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\check{\mathbf{B}} \mathbf{N} + \check{\mathbf{N}} \mathbf{B}] \quad (3.22)$$

şeklinde temsil etmek mümkündür. Bununla birlikte (2.28) tanımı kullanılarak,

$$\check{\mathbf{B}} \mathbf{N} = \check{\mathbf{N}} \mathbf{B} \quad (3.23)$$

ifadesi yazılabilir. Böylece (3.22) eşitliği,

$$\begin{bmatrix} \vec{b} \cdot \vec{n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \check{\mathbf{B}} \mathbf{N} = \check{\mathbf{N}} \mathbf{B} \quad (3.24)$$

ile verilen basit bir ifadeye dönüşür. Öte yandan  $\mathbf{n}$  kuaternionunun normu,

$$N(\mathbf{n}) = \mathbf{n} \mathbf{n}^* = \mathbf{n}^* \mathbf{n} = 1 \quad (3.25)$$

olduğuna göre,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \right] N(\mathbf{n}) &= \left( \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{n} \right) \mathbf{n}^* + \mathbf{n} \left( \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \right] \mathbf{n}^* \right) \\ &= \left[ \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right] (-\mathbf{n}) + \mathbf{n} \left[ -\frac{d\mathbf{n}}{ds} \right] \\ &= - \left( \left[ \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right] \mathbf{n} + \mathbf{n} \left[ \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right] \right) \\ &= \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{n} - \frac{d\vec{n}}{ds} \times \vec{n} + \vec{n} \cdot \frac{d\vec{n}}{ds} - \vec{n} \times \frac{d\vec{n}}{ds} \\ 0 &= 2 \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{n} \end{aligned} \quad (3.26)$$

skalar çarpım bağıntısı yazılabilir. Bu takdirde (3.21) eşitliğindeki ilk terim sıfırdır. Aynı eşitlikteki ikinci terim daha önce elde edilen (3.19) ifadesi gereği sıfır olacağından,

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.27)$$

ifadesi yazılabilir. Diğer bir gösterimle,

$$\check{\mathbf{B}} \mathbf{N} = \check{\mathbf{N}} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3.28)$$

olmalıdır. Aynı yol  $\vec{b}$  ve  $\vec{t}$  vektörleri için de izlenirse,

$$\vec{b} \cdot \vec{t} = \frac{1}{2} [\mathbf{b} \mathbf{t} + \mathbf{t} \mathbf{b}] = \frac{1}{\tau} \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} + \frac{1}{\rho \tau} \vec{t} \cdot \vec{t} \quad (3.29)$$

elde edilir. Yine kuaternionik matrisler kullanılarak,

$$\begin{bmatrix} \vec{b} \cdot \vec{t} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\check{\mathbf{B}} \mathbf{T} + \check{\mathbf{T}} \mathbf{B}] = \check{\mathbf{B}} \mathbf{T} = \check{\mathbf{T}} \mathbf{B} \quad (3.30)$$

bağıntısına ulaşılır. Öte yandan (2.33) ve (3.14) eşitliklerinden yararlanarak,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \mathbf{e}_0 \left( \frac{1}{2} [\mathbf{n} \mathbf{t} + \mathbf{t} \mathbf{n}] \right) &= \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} + \vec{n} \cdot \frac{d\vec{t}}{ds} \\ 0 &= \frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} + \frac{1}{\rho} \end{aligned} \quad (3.31)$$

ve

$$\frac{d\vec{n}}{ds} \cdot \vec{t} = -\frac{1}{\rho} \quad (3.32)$$

ifadesine ulaşılır. Bu takdirde (3.29) ifadesi,

$$\vec{b} \cdot \vec{t} = \frac{1}{2} [\mathbf{b} \mathbf{t} + \mathbf{t} \mathbf{b}] = -\frac{1}{\rho \tau} + \frac{1}{\rho \tau} = 0 \quad (3.33)$$

olur. Diğer bir gösterimle,

$$\check{\mathbf{B}} \mathbf{T} = \check{\mathbf{T}} \mathbf{B} = \mathbf{0} \quad (3.34)$$

matris eşitliği yazılabilir.  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$  ve  $\mathbf{b}$  birim kuaternionları doğal olarak

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \mathbf{t} = -\vec{b} \cdot \vec{t} + \vec{b} \times \vec{t} = \vec{b} \times \vec{t} \quad (3.35)$$

ve

$$\mathbf{t} = \mathbf{n} \mathbf{b} = -\vec{n} \cdot \vec{b} + \vec{n} \times \vec{b} = \vec{n} \times \vec{b} \quad (3.36)$$

bağıntıları ile

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \check{\mathbf{B}} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\top & \check{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \\ &= \check{\mathbf{T}} \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{t} \\ \mathbf{t}^\top & -\check{\mathbf{t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{T} = \check{\mathbf{N}} \mathbf{B} &= \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{n} \\ \mathbf{n}^\top & \check{\mathbf{n}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} \\ &= \check{\mathbf{B}} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathbf{b} \\ \mathbf{b}^\top & -\check{\mathbf{b}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.38)$$

matris ifadelerini sağlarlar. (3.20) eşitliği ile tanımlanan

$\mathbf{b}$  kuaternionunun yay uzunluğuna göre türevi alınırsa,

$$\begin{aligned} \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_o \right] \mathbf{b} &= \left( \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_o \right] \mathbf{t} \right) \mathbf{n} + \mathbf{t} \left[ \frac{d}{ds} \mathbf{e}_o \right] \mathbf{n} \\ &= -\frac{d\bar{\mathbf{t}}}{ds} \cdot \bar{\mathbf{n}} + \frac{d\bar{\mathbf{t}}}{ds} \times \bar{\mathbf{n}} - \bar{\mathbf{t}} \cdot \frac{d\bar{\mathbf{n}}}{ds} + \bar{\mathbf{t}} \times \frac{d\bar{\mathbf{n}}}{ds} \\ &= -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho} (\bar{\mathbf{n}} \times \bar{\mathbf{n}}) - \left( -\frac{1}{\rho} \right) + \bar{\mathbf{t}} \times \left( \tau \bar{\mathbf{b}} - \frac{1}{\rho} \bar{\mathbf{t}} \right) \\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\tau \mathbf{n} \end{aligned} \quad (3.39)$$

elde edilir. Diğer bir ifadeyle,

$$\frac{d}{ds} \mathbf{B} = \tau \mathbf{N}^* = \tau \mathbf{N}^T \quad (3.40)$$

matris bağıntısı yazılabilir. Bu sonuçlar, klasik yöntemlerle edilen sonuçlarla uyum içerisinde.

### Tartışma ve Sonuç

Bu çalışmada klasik mekanik açısından çok iyi bilinen Serret-Frenet formüllerinin reel kuaternionlarla temsili amaçlanmıştır. Reel kuaternionların kompleks sayılardan yola çıkılarak keşfedildiği düşünüldüğünde, ortaya konulan formülasyonun hem klasik vektör cebirinin özelliklerinden hem de kompleks sayıların özelliklerinden yararlanmaya imkan verdiği görülmektedir. Nitekim, (2.33) ve (2.35) eşitliklerinde tanımladığı üzere vektörlerin skalar ve vektörel çarpım bağıntıları kuaternionlarla da çok kolay bir şekilde ifade edilebilmektedir. Kuaternion çarpımının alışlagelen vektör çarpımlarından farklı olarak hem skalar hem de vektörel çarpımı içermesi Serret-Frenet formüllerinin reel kuaternionlarla temsili açısından bir sorun teşkil etmediği açıkça ortaya konmuştur. Öte yandan Serret-Frenet formüllerinin kuaternion formunda elde edilen biçimlerini; polar formu, eksponansiyel formu gibi farklı ifadelerle de yazmanın mümkün olduğu görülmektedir. Böylece kompleks sayıların sahip olduğu avantajlardan da yararlanabilme olanağı da doğmaktadır. Benzer şekilde bu çalışmada Serret-Frenet formüllerinin  $4 \times 1$ ,  $4 \times 4$  matrislerle temsili ve bunlar arasındaki matris bağıntıları da ayrıntılı olarak tanımlanmıştır. Dolayısı ile reel kuaternionların kullanımı formülasyon açısından diğer yöntemler göre daha yaratıcı özelliklerin ortaya çıkmasına olanak vermektedir. Kuaternionların yaygın olarak kullanıldığı alanlardan birisi de dönme ve öteleme hareketinin tanımlandığı sistemlerdir. Bu özellikleri nedeniyle robotik uygulamaların yanında animasyonlarda ve bilgisayar dünyasında popüler olarak oynanan oyunlarda kuaternionlardan yararlanıldığı bilinmektedir [20, 28-29]. Serret-Frenet formüllerinin reel kuaternionlarla temsili, bu koordinat sisteminin kullanılabilirliği olan alanlar için de alternatif bir bakış açısı getirebilir. Reel kuaternionların hem  $2 \times 2$  kompleks matrislerle hem de  $4 \times 1$  ve  $4 \times 4$  reel matrislerle temsili mümkündür. Kuaternionların gelişmiş cebir yapıları, basitlikleri ve en önemlisi matrislerle izomorflukları nedeniyle Serret-Frenet formülleri için elde edilen temsillerin matematiksel açıdan oldukça faydalı olacağı düşünülmektedir.

### Kaynaklar

- [1]. W. R. Hamilton "Elements of Quaternions" Vol.I, II and III, Chelsea, New York (1899)
- [2]. J. C. K. Chou, "Quaternion Kinematic and Dynamic Differential Equations" IEEE Transaction on Robotics and Automation, **8**(1) (1992) 53-64
- [3]. R. A. Wehage, "Quaternion and Euler Parameters-A Brief Expansion" Computer Aided Analysis and Optimization of Mechanical System Dynamics E.J. Haug ed. (1984) 147-180
- [4]. P. Du Val, "Homographies, Quaternions and Rotations" Clarendon Press, Oxford, (1964)
- [5]. G. Harauz, "Representation of Rotations by Unit Quaternions" Ultramicroscopy **33** (1990) 209-213
- [6]. F. R. Spina, "A Note on Quaternion Algebra and Finite Rotations" Nuovo Cimento **108B**(6) (1993) 689-698
- [7]. J. M. R. Martinez, J. G. Alvarado, "A Simple Method for the Determination of Angular Velocity and Acceleration of a Spherical Motion Through Quaternions" Meccanica **35** (2000) 111-118
- [8]. C. Gramkow, "On Averaging Rotations" Journal of Math. Imaging and Vision **15** (2001) 7-16
- [9]. J. Lambek, "If Hamilton Had Prevailed: Quaternions in Physics" The Mathematical Intelligencer **17**(4) (1995) 7-15
- [10]. L. Silberstein, "Quaternionic Form of Relativity" Philosophical Magazine **23** (1912) 790-809
- [11]. S. De Leo, "Quaternions and Special Relativity" Journal of Mathematical Physics **37**(6) (1996) 2955-2968
- [12]. A. Gsponer, J. P. Hurni, "Comment on Formulating and Generalizing Dirac's, Proca's, and Maxwell's Equations with Biquaternions or Clifford Numbers" Foundations of Physics Letters **14**(1) (2001) 77-85
- [13]. O. P. S. Negi, et al., "Revisiting Quaternion Formulation and Electromagnetism" Nuovo Cimento **113B** (12) (1998) 1449-1467
- [14]. O. P. Agrawal, "Hamilton Operators and Dual Number Quaternions in Spatial Kinematics" Mech. Mach. Theory **22** (1987) 569-575
- [15]. M. W. Walker, L. Shao, R. A. Volz, "Estimating 3-D Location Parameters Using Dual Number Quaternions" CVGIP: Image Understanding **54**(3) 1991 358-367
- [16]. L. Losco, et al., "Modelling of a Chain of Rigid Bodies by Biquaternions" European Journal of Mechanics A/Solids **10**(4) (1991) 433-451
- [17]. D. P. Chevallier, "Lie Algebras, Modules, Dual Quater

- [18].nions and Algebraic Methods in Kinematics” Mechanism and Machine Theory, **26**(6) (1991) 613-627
- [19].B. Jüttler, “Visualization of Moving Objects Using Dual Quaternion Curves” Computers and Graphics **18**(3) (1994) 315-326
- [20].S. Demir, K. Özdaş, M. Tanışlı “Dönme ve Öteleme Hareketinin Dual Kuaternionlarla Temsili” Marmara Ü. Fen Bilimleri Dergisi, **16** (2000) 55-64
- [21].P.Azariadis, N. Aspragathos, “Computer Graphics Representation and Transformation of Geometric Entities Using Dual Unit Vectors and Line Transformations” Computers and Graphics **25**, (2001) 195-209
- [22].S. Demir, K. Özdaş, “Dual Quaternionic Reformulation of Electromagnetism”, Acta Physica Slovaca **53**(6) (2003) 429-436
- [23].K. Bharathi, M. Nagaraj, “Quaternion Valued Function of a Real Variable Serret-Frenet Formulae” Indian J. Pure Appl. Math. **16** (1985) 741-756
- [24].A. İ. Sivridağ, R. Güneş, S. Keleş, “The Serret-Frenet Formulae for Dual Quaternion-Valued Functions of a Single Real Variable” Mech. Mach. Theory **29**(5) (1994) 749-754
- [25].A. Tuna, A. C. Çöken, “ $E_2^4$  yarı-öklid Uzayındaki Kuaterniyonik Eğriler İçin Serret-Frenet Formülleri” S. Demirel Ü. Fen Bilimleri. Enst. Dergisi **7**(1) (2003) 92-99
- [26].C. C. Silva, R. A. Martins, “Polar and Axial Vectors Versus Quaternions” American Journal of Physics **70**(9) (2002) 958-964
- [27].K. Özdaş, “Bölüm Cebirleri ve Bunların Fiziksel Uygulamaları” Anadolu Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları, Eskişehir (1995)
- [28].T. C. Bradbury, “Theoretical Mechanics” John Wiley and Sons, New York (1968)
- [29].H. Cheng, “Programming with Dual Numbers and its Applications in Mechanisms Design” Engineering with Computers **10**(4) (1994) 212-229
- [30].K. Shoemake, “Animating Rotations with Quaternion Curves” Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH’85) **19** (1985) 245-254