

## EW Denkleminin Radial Basis Fonksiyon Collocation Metodu İle Sayısal Çözümü

Ayşe Gül KAPLAN<sup>1\*</sup>, Yılmaz DERELİ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü / ESKİŞEHİR

<sup>2</sup>Anadolu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü / ESKİŞEHİR

Alınış Tarihi:16.08.2011, Kabul Tarihi:06.05.2012

**Özet:** Bu çalışmada lineer olmayan kısmi türevli Equal Width (EW) denkleminin konum ayrıştırması yapılarak radial basis fonksiyon collocation yöntemi ile sayısal çözümü yapılmıştır. Hesaplamalarda farklı standart radial basis fonksiyonlar kullanılmıştır. Metodun geçerliliğini göstermek için tek solitary dalga hareketi, iki ve üç solitary dalga etkileşimi ile Maxwell başlangıç koşulu içeren test problemleri kullanılmış ve her bir test problemi için dalga hareketlerinin grafikleri gösterilmiştir. Analitik sonucu bilinen tek solitary dalga hareketi test problemi için hata normları ile her bir test problemi için kütle, enerji ve momentum korunumlarının değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar analitik sonuçlar ve literatürde yer alan diğer sayısal sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

**Anahtar Kelimeler:** Radial basis fonksiyon, collocation metot, EW denklemi.

### Numerical Solution of the EW Equation with Radial Basis Function Collocation Method

**Abstract:** In this study, the nonlinear Equal Width equation with partial derivative was solved numerically by using radial basis collocation method by space discretization technique. Different type basis functions were used at the calculations. To show the accuracy of the method, test problems which include single solitary wave motion, two and three solitary waves interaction and Maxwell initial condition were used, also for every test problems wave motions were pictured. The single solitary wave motion whose analytical solution was known error norms were calculated also mass, energy and momentum invariants were calculated for every test problems. Obtained results were compared with analytical results and published numerical results.

**Keywords:** Radial basis function, collocation method, EW equation.

#### Giriş

Lineer olmayan dağılık dalgalar, sıg su dalgaları gibi fiziksel olaylarda önemli bir rol oynamaktadır. Equal Width (EW) denklemi lineer olmayan dağılık dalga denklemlerinin önemli bir modelidir (Morrison vd., 1984). EW denklemi, regularized long wave (RLW) ve Korteweg-de Vries (KDV) lineer olmayan dağılık dalga denklemlerine birer alternatiftir. EW denkleminin tek solitary dalga çözümü dışında analitik çözüme sahip olmadığı bilindiğinden sayısal metotlar EW denklemi ile çalışmak için uygundur. Bundan dolayı EW denkleminin çözümü için pek çok sayısal yöntem geliştirilmiştir. Kübik B-spline sonlu elemanlar kullanılarak Galerkin metodu ile EW denkleminin sayısal çözümü elde edilmiştir (Gardner ve Gardner, 1992). EW denkleminin sayısal çözümü için kuadratik B-spline Galerkin sonlu elemanlar metodu ve konum-ayrıştırması tekniği kullanılmıştır (Saka, 2006). Kuadratik B-spline sonlu elemanlar kullanılarak lumped Galerkin metodu ile EW denklemi çözülmüştür (Esen, 2005).

Lineer sonlu elemanlar kullanılarak Galerkin metodu ile EW denkleminin sayısal çözümü yapılmıştır (Doğan, 2005). EW denkleminin sayısal çözümü için kuintik B-spline collocation metodu kullanılmıştır (Raslan, 2004). En küçük kareler metodu kullanılarak EW denkleminin sayısal çözümü elde edilmiştir (Zaki, 2000). Galerkin

kuartik B-spline sonlu elemanlar metodu, diferansiyel quadrature metodu ve radial basis fonksiyonlu meshless metodu kullanılarak EW denkleminin sayısal çözümleri yapılmıştır (Saka vd., 2008). EW denkleminin sayısal çözümü için meshless kernel-based method of lines kullanılmıştır (Dereli ve Schaback 2010).

Bu çalışmada EW denkleminin konum ayrıştırması tekniği kullanılarak başlangıç ve sınır koşulları altında radial basis fonksiyon collocation yöntem ile sayısal çözümü yapılmıştır. Konum ayrıştırılması yapılarak EW denklemi konuma göre daha düşük mertebeden türev içeren bir çiftli denklem sistemi biçimine dönüştürülmüştür. Sistemin sayısal sonuçları pivot seçilerek Gauss eliminasyon yöntemi ile elde edilmiştir.

#### EW Denkleminin Ayrıştırılması

Lineer olmayan Equal width (EW) denklemi aşağıdaki formdadır:

$$U_t + UU_x - \mu U_{xx} = 0 \quad (1)$$

\*agkaplan@anadolu.edu.tr

Başlangıç ve sınır koşulları ise

$$U(x,0) = f(x)$$

$$U(a,t) = \alpha_1, \quad U(b,t) = \beta_1, \quad (2)$$

$$U_x(a,t) = \alpha_2, \quad U_x(b,t) = \beta_2,$$

$$a \leq x \leq b, \quad t > 0$$

şeklinde verilmiştir. Burada  $\mu$  pozitif bir parametre,  $x$  ve  $t$  alt indisleri ise konuma ve zamana göre türevleri gösterir.

EW denkleminde

$$U_x = V$$

şeklinde konum ayrıştırması yapılırsa

$$U_t - UV - \mu V_{xt} = 0 \quad (3)$$

$$V - U_x = 0$$

şeklinde bir denklem sistemi elde edilir. Başlangıç ve sınır koşulları ise,

$$U(x,0) = f(x), \quad V(x,0) = f'(x)$$

$$U(a,t) = \alpha_1, \quad U(b,t) = \beta_1, \quad (4)$$

$$V(a,t) = \alpha_2, \quad V(b,t) = \beta_2$$

$$a \leq x \leq b, \quad t > 0$$

şeklinde olur. (3) nolu denklem sistemine Crank-Nicolson formülü uygulanırsa,

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{(UV)^{n+1} + (UV)^n}{2} - \mu \frac{V_x^{n+1} - V_x^n}{\Delta t} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{V^{n+1} + V^n}{2} - \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} = 0$$

sistemi elde edilir.

Buradaki lineer olmayan  $(UV)^{n+1}$  terimini lineerleştirmek için aşağıdaki lineerleştirme metodu kullanılırsa (Rubin ve Graves, 1975)

$$(UV)^{n+1} = U^{n+1}V^n + U^nV^{n+1} - U^nV^n$$

(5) nolu denklem sistemi

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U^{n+1}V^n + U^nV^{n+1}}{2} - \mu \frac{V_x^{n+1} - V_x^n}{\Delta t} = 0$$

$$V^{n+1} + V^n - U_x^{n+1} - U_x^n = 0$$

şekline gelir. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(U^{n+1}V^n + U^nV^{n+1}) - \mu V_x^{n+1} = U^n - \mu V_x^n \quad (6)$$

$$V^{n+1} - U_x^{n+1} = U_x^n - V^n$$

sistemi elde edilir.

Bu çalışmada EW denkleminin sayısal çözümünü elde etmek için radial basis fonksiyonlar (RBF) kullanılmıştır. Bir radial basis fonksiyon (RBF), seçilecek bir  $x_j$  noktasının merkez noktaya olan uzaklık fonksiyonudur ve  $\phi(x - x_j) = \phi(r_j)$  şeklindedir. Burada  $r_j = \|x - x_j\|$ ,  $x$  ve  $x_j$  noktaları arasındaki Öklidyen normdur.

Radial basis fonksiyonlar bir  $c$  şekil parametresi de içerebilir. Şekil parametresi içeren RBF ler sonsuz düzgün RBF ler, sadece uzaklığa bağlı olan RBF ler ise parçalı düzgün RBF ler olarak adlandırılır.

Şekil parametresi sayısal sonuçların değerlerinin doğruluğunu etkilediğinden  $c$  nin seçilimi büyük önem taşımaktadır. Literatürde şekil parametresinin seçilimi ile ilgili çeşitli yayınlar vardır ancak şekil parametresinin en iyi değerinin seçilimi hala açık bir problemdir. Bu çalışmada  $c$  şekil parametresi için denklemin çözümünü seçilen aralıkta en iyi yapan değer kullanılmıştır.

Literatürde pek çok radial basis fonksiyon vardır. Ancak bizim algoritmamızda  $c$  şekil parametresi içeren Multiquadric (MQ) (Hardy, 1971), Gaussian (G), Inversemultiquadric (IMQ) ve Inversequadric (IQ) radial basis fonksiyonları kullanılmıştır. Bu fonksiyonlar aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$MQ: \quad \phi(r_j) = \sqrt{r_j^2 + c^2}$$

$$G: \quad \phi(r_j) = e^{-c^2 r_j^2}$$

$$IMQ: \quad \phi(r_j) = \frac{1}{\sqrt{r_j^2 + c^2}}$$

$$IQ: \quad \phi(r_j) = \frac{1}{(r_j^2 + c^2)}$$

### Metodun Uygulanması

Radial basis fonksiyonlar metodu Kansa metodu olarak da bilinir (Kansa, 1990). Bu yöntemdeki ana fikir, bilinmeyen  $U$  fonksiyonuna radial fonksiyonlar ve değerleri daha sonra hesaplanacak olan katsayıların bir cebirsel birleşimi olarak yaklaşılmasıdır.

(6) nolu denklem sisteminde, bilinmeyen  $U$  ve  $V$  fonksiyonları için radial basis fonksiyon collocation metodu kullanılarak

$$U^n = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(r_j), \quad V^n = \sum_{j=1}^N \xi_j^n \phi(r_j) \quad (7)$$

yaklaşımları yapılmıştır. Burada  $\lambda_j$  ve  $\xi_j$  ler bulunması gereken sabitler,  $\phi(r_j)$  ise radial basis fonksiyondur. O halde  $U$  ve  $V$  fonksiyonlarının  $x$ 'e göre birinci türevleri

$$U_x^n = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi'(r_j), \quad V_x^n = \sum_{j=1}^N \xi_j^n \phi'(r_j) \quad (8)$$

şeklinde olur.

(7) ve (8) de RBF collocation metodu kullanılarak yapılan yaklaşımlar (6) nolu denklem sisteminde yerlerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \left[ \phi(x_{ij}) + \frac{\Delta t}{2} \phi(x_{ij}) \sum_{j=1}^N \xi_j^n \phi(x_{ij}) \right] \lambda_j^{n+1} \\ & + \sum_{j=1}^N \left[ \frac{\Delta t}{2} \phi(x_{ij}) \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(x_{ij}) - \mu \phi'(x_{ij}) \right] \xi_j^{n+1} \\ & = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(x_{ij}) - \mu \sum_{j=1}^N \xi_j^n \phi'(x_{ij}) \\ & \sum_{j=1}^N [-\phi'(x_{ij})] \lambda_j^{n+1} + \sum_{j=1}^N \phi(x_{ij}) \xi_j^{n+1} \\ & = \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi'(x_{ij}) - \sum_{j=1}^N \xi_j^n \phi(x_{ij}), \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

şeklinde  $2N$  bilinmeyenli  $2N$  denklemden oluşan bir çiftli sistem elde edilir. Bu sistem  $\lambda_j^{n+1}$ ,  $\xi_j^{n+1}$  ler bilinmeyen katsayılar ve  $\lambda_j^n$ ,  $\xi_j^n$  ler bilinen katsayılar olmak üzere matris biçiminde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}_{2N \times 2N} \begin{pmatrix} \lambda_j^{n+1} \\ \xi_j^{n+1} \end{pmatrix}_{2N \times 1} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix}_{2N \times 1}$$

Burada

$$A_1 = \phi(x_{ij}) + \frac{\Delta t}{2} \phi(x_{ij}) \sum_{j=1}^N \xi_j^n \phi(x_{ij})$$

$$A_2 = -\phi'(x_{ij})$$

$$B_1 = \frac{\Delta t}{2} \phi(x_{ij}) \sum_{j=1}^N \lambda_j^n \phi(x_{ij}) - \mu \phi'(x_{ij})$$

$$B_2 = \phi(x_{ij})$$

$$F_1 = \lambda_j^n \phi(x_{ij}) - \mu \xi_j^n \phi'(x_{ij})$$

$$F_2 = \lambda_j^n \phi'(x_{ij}) - \xi_j^n \phi(x_{ij})$$

dir. Bu sistem Gauss-Pivot metodu ile çözülmüştür.

### Test Problemleri

Bu bölümde verilen metodun doğruluğunu ve geçerliliğini göstermek için dört test problemi ile çalışılmıştır. Bu test problemleri için  $C_1$ ,  $C_2$  ve  $C_3$  korunum kanunları ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplanarak literatürde yer alan bazı sayısal sonuçlarla karşılaştırılmaları yapılmıştır.

EW denklemi

$$C_1 = \int_a^b U dx, \quad C_2 = \int_a^b (U^2 + \mu U_x^2) dx, \quad C_3 = \int_a^b U^3 dx$$

şeklinde üç korunum kanununa sahiptir (Olver, 1979). Bunlar sırasıyla kütle, momentum ve enerji konumlarına karşılık gelir.

$L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ise analitik ve sayısal çözümler arasındaki farklar kullanılarak hesaplanmıştır ve

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j^{tam} - U_j^{nümerik}|^2}$$

$$L_\infty = \max_j |U_j^{tam} - U_j^{nümerik}|$$

biçimindedir.

### Tek Solitary Dalga Hareketi

EW denkleminin solitary dalga çözümü

$$U(x, t) = 3d \sec h^2(k[x - x_0 - vt])$$

$$k = \frac{1}{2\sqrt{\mu}}, \quad v = d$$

şeklinde dir. Burada  $k$  dalganın genişliğini,  $v$  dalganın hızını,  $3d$  ise dalganın genliğini göstermektedir. Bu çözüm; başlangıçta tepe noktası  $x_0$  üzerinde bulunan,

sağa doğru  $v$  sabit hızıyla hareket eden  $3d$  genişliğinde tek solitary dalgayı temsil eder.

Burada  $U(x,0) = 3d \operatorname{sech}^2(k[x-x_0])$  başlangıç koşulu ile  $U(a,t) = \alpha_1$ ,  $U(b,t) = \beta_1$ ,  $V(a,t) = \alpha_2$ ,  $V(b,t) = \beta_2$  sınır koşulları kullanılmıştır. Teorik olarak  $x \rightarrow \pm\infty$  a giderken  $U(x,t)$  değerleri sifira yaklaşmaktadır. Çalışmamızda sonlu bir bölge kullanıldığından dolayı algoritmalarımızda  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_2$  değerleri  $U(x,t)$  nin analitik değerleri kullanılarak hesaplanmıştır. Tek solitary dalga hareketi  $0 \leq t \leq 80$  zaman periyodunda  $0 \leq x \leq 30$  tanım aralığında  $\mu = 1$  ve  $x_0 = 10$  parametreleri için çözülmüştür.

$C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  korunumlarının analitik değerleri

$$C_1 = \frac{6d}{k}, \quad C_2 = \frac{12d^2}{k} + \frac{48kd^2\mu}{5}, \quad C_3 = \frac{144d^3}{5k}$$

şeklinde hesaplanmıştır. (Gardner ve Gardner, 1992). Bu eşitliklerden

$d = 0.1$  için

$$C_1 = 1.2, \quad C_2 = 0.288, \quad C_3 = 0.0576$$

$d = 0.03$  için

$$C_1 = 0.36, \quad C_2 = 0.02592, \quad C_3 = 0.001555$$

elde edilmiştir.

Çizelge 1 ve Çizelge 2 de  $d = 0.1$  ve  $d = 0.03$  için  $t = 80$  zamanında oluşan  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  korunumları ile

$L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları listelenmiştir. Burada MQ, G, IQ ve IMQ radial basis şekil fonksiyonlarının her biri için gerekli hesaplamalar yapılmış ve elde edilen sonuçlar hem birbirleriyle hem de (Doğan, 2005), (Esen, 2005), (Saka, 2006), (Saka vd., 2008) çalışmalarındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. EW denkleminin ayrıştırma yapılmadan radial basis fonksiyon collocation metodu ile sayısal çözümü (Saka vd., 2008) de yapılmıştır. Elde edilen sonuçlar çizelgelere eklenmiştir. Çizelge 1 ve Çizelge 2 den de görüldüğü gibi Gaussian radial basis fonksiyon ile elde edilen sonuçların diğer şekil fonksiyonları ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu görülmüştür. Ayrıca EW denkleminin ayrıştırma yapılarak elde edilen sonuçlarla ayrıştırma yapılmadan elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında korunumların birbirine denk olduğu fakat hata oranının ayrıştırma yapıldığında 0.09 genlikli tek solitary dalga hareketi için Gaussian radial basis fonksiyon kullanılarak elde edilen sonuçlar dışında biraz daha arttığı görülmüştür. EW denkleminin ayrıştırma yapılarak radial basis fonksiyon collocation metodu ile elde edilen sonuçlarındaki hata oranlarının

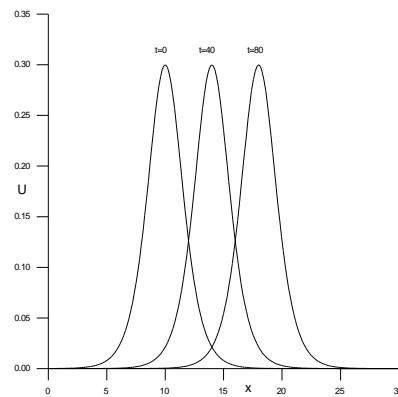
diğer çalışmalarla karşılaştırıldıklarında kabul edilebilir bir düzeyde olduğu gözükülmektedir. Şekil 1 (a) ve (b) de ise 0.3 ve 0.09 genlikli dalgaların  $t = 0$ ,  $t = 40$  ve  $t = 80$  zamanlarında elde edilen çözümlerinin grafikleri verilmiştir.

**Çizelge 1.**  $d=0.1$  için  $t=80$  zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları

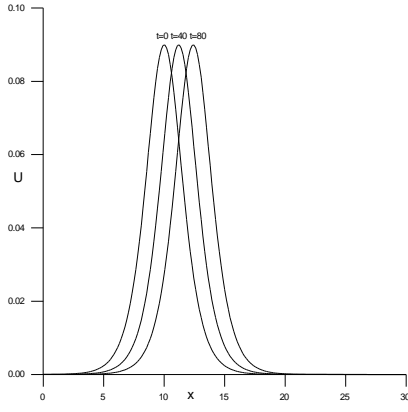
Metot	h	$\Delta t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
MQ	0.15	0.5	1.199991	0.287997	0.057600	4.288575	2.364218
G	0.15	0.5	1.199990	0.287991	0.057597	4.224255	2.318174
IQ	0.15	0.5	1.200205	0.288002	0.057602	4.611262	2.436191
IMQ	0.15	0.5	1.200844	0.287999	0.057599	8.376011	9.359041
Doğan(2005)	0.03	0.05	1.233870	0.299150	0.060970	246.9700	164.2500
Esen(2005)	0.03	0.05	1.199950	0.287980	0.057590	0.290000	0.210000
Saka(2006)	0.03	0.05	1.199990	0.288010	0.057600	0.030640	0.017040
Saka(2008)	0.15	0.05	1.200030	0.288010	0.057610	0.311980	0.202960

**Çizelge 2.**  $d=0.03$  için  $t=80$  zamanında tek solitary dalga hareketi için korunumlar ve hata normları

Metot	h	$\Delta t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$	$L_2 \times 10^4$	$L_\infty \times 10^4$
MQ	0.15	0.5	0.359971	0.025921	0.001555	0.356630	0.191852
G	0.15	0.5	0.360016	0.025921	0.001555	0.040186	0.015199
IQ	0.15	0.5	0.359976	0.025920	0.001555	0.651065	0.705682
IMQ	0.15	0.5	0.360385	0.025920	0.001555	1.871769	1.689644
Doğan(2005)	0.05	0.05	0.366650	0.026580	0.001620	26.83000	18.36000
Esen(2005)	0.05	0.05	0.360000	0.025920	0.001560	0.130000	0.070000
Saka(2006)	0.05	0.05	0.360000	0.025920	0.001560	0.010250	0.014830
Saka(2008)	0.15	0.05	0.360000	0.025920	0.001560	0.075980	0.049110



(a)  $d=0.1$



(b)  $d=0.03$

Şekil 1. 0.3 ve 0.09 genlikli solitary dalgaların farklı zamanlarda konumları (a-b)

### İki Solitary Dalga Etkileşimi

İki solitary dalga etkileşimi

$$U(x,0) = U_1 + U_2$$

$$U_j = 3A_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - \tilde{x}_j - A_j))$$

$$A_j = \frac{4k_j^2}{1 - 4k_j^2}, j = 1, 2$$

başlangıç koşulu ve  $U(0,t) = U(80,t) = 0$ ,  $V(0,t) = V(80,t) = 0$  sınır koşulları kullanılarak çalışılmıştır.  $\mu = 1$ ,  $k_1 = 0.5$ ,  $k_2 = 0.5$ ,  $\tilde{x}_1 = 10$ ,  $\tilde{x}_2 = 25$ ,  $A_1 = 1.5$ ,  $A_2 = 0.75$  parametre değerleri seçilmiştir (Esen, 2005). Bu test probleminde genliği büyük olan dalganın tepe noktası  $x = 15$ , genliği küçük olan dalganın tepe noktası ise  $x = 25$  noktasına yerleştirilmiş ve program  $t = 30$  zamanına kadar çalıştırılmıştır.

Korunumların analitik değerleri

$$C_1 = 12(A_1 + A_2) = 27$$

$$C_2 = 28.8(A_1^2 + A_2^2) = 81$$

$$C_3 = 57.6(A_1^3 + A_2^3) = 218.7$$

şeklindedir.

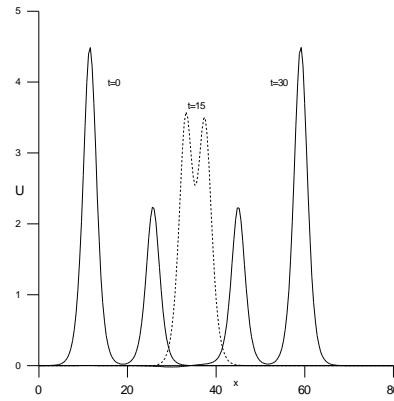
Çizelge 3 te  $t = 30$  zamanında oluşan  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  korunumları listelenmiş ve elde edilen sonuçlar (Esen, 2005), (Saka, 2006) ve (Saka vd., 2008) çalışmalarındaki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelge 3 ten korunumların sayısal sonuçlarının hem literatürde yer alan diğer çalışmalarla hem de analitik sonuçlarla uyumlu olduğu görülmüştür.

Şekil 2 (a), (b), (c) de  $t = 0$ ,  $t = 15$  ve  $t = 30$  zamanlarında elde edilen çözümlerin grafikleri verilmiştir.

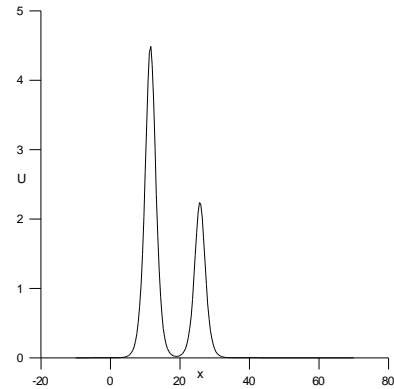
Şekil 2 den de görüldüğü gibi iki solitary dalga etkileşiminde, başlangıç anında büyük dalganın küçük dalganın solunda yer aldığı, zaman ilerledikçe büyük dalganın hızının daha büyük olmasından dolayı küçük dalgaya yaklaştığı, daha sonra küçük dalgayı yakalayarak etkileşimi başlattığı görülmüştür. Sonuçta ise dalgaların birbirinden tamamen ayrılarak büyük dalganın küçük dalgayı geçtiği ve her iki dalganın da ilk genliklerine tekrar döndükleri gözlenmiştir.

Çizelge 3.  $t=30$  zamanında solitary dalga etkileşimi için korunumlar

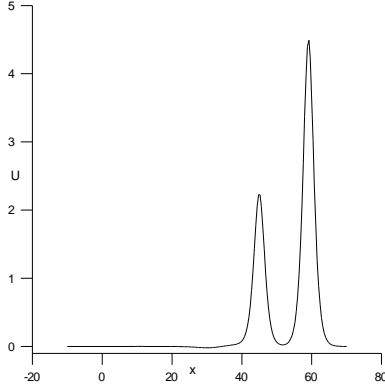
Metot	h	$\Delta t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
MQ	0.4	0.1	26.973979	80.980621	218.701472
G	0.4	0.1	27.000582	81.001095	218.726082
IQ	0.4	0.1	27.001522	81.552327	231.109818
IMQ	0.4	0.1	26.959415	81.003358	218.998981
Esen(2005)	0.1	0.1	27.000030	81.017190	218.706500
Saka(2006)	0.1	0.1	27.000680	81.024070	218.736730
Saka(2008)	0.1	0.1	27.000240	81.001400	218.706940



(a)  $t=0, t=15, t=30$



(b)  $t=0$



(c) t=30

**Şekil 2.** İki solitary dalğanın farklı zamanlarda etkileşimi(a-b-c)

### Üç Solitary Dalga Etkileşimi

Bu bölümde farklı genliklerde üç solitary dalga etkileşimi incelenmiştir. Üç solitary dalga etkileşimi

$$U(x,0) = U_1 + U_2 + U_3$$

$$U_j = 3A_j \operatorname{sech}^2(k_j(x - \tilde{x}_j))$$

$$k_j = \sqrt{\frac{A_j}{4\mu(1 + A_j)}}, j = 1,2,3$$

başlangıç koşulu ile verilmiştir (Raslan, 2004).

$A_1 = 4.5$ ,  $A_2 = 1.5$ ,  $A_3 = 0.5$ ,  $\mu = 1$ ,  $h = 0.1$ ,  $\tilde{x}_1 = 10$ ,  $\tilde{x}_2 = 25$ ,  $\tilde{x}_3 = 35$  değerleri ve  $U(0,t) = U(100,t) = 0$ ,  $V(0,t) = V(100,t) = 0$  sınır koşulları kullanılmıştır. Bu parametrelerin kullanılmasıyla genliği en büyük olan dalga en sola, genliği en küçük olan dalga ise en sağa yerleştirilmiş ve program  $[0,100]$  tanım aralığında  $t = 15$  zamanına kadar çalıştırılmıştır.

Korunumların analitik değerleri

$$C_1 = 12(A_1 + A_2 + A_3) = 78$$

$$C_2 = 28.8(A_1^2 + A_2^2 + A_3^2) = 655.2$$

$$C_3 = 57.6(A_1^3 + A_2^3 + A_3^3) = 545$$

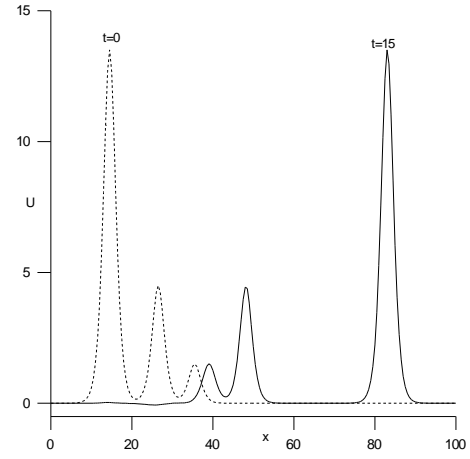
şeklinde hesaplanmış ve bu değerler metodun uygulanmasıyla elde edilen değerlerle karşılaştırılmıştır.

Çizelge 4 te  $t = 15$  zamanında oluşan  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  korunumları listelenmiştir. Sayısal olarak elde edilen bu korunum kanunlarının zaman ilerledikçe korunduğu ve analitik korunum kanunları ile uyumlu olduğu görülmüştür.

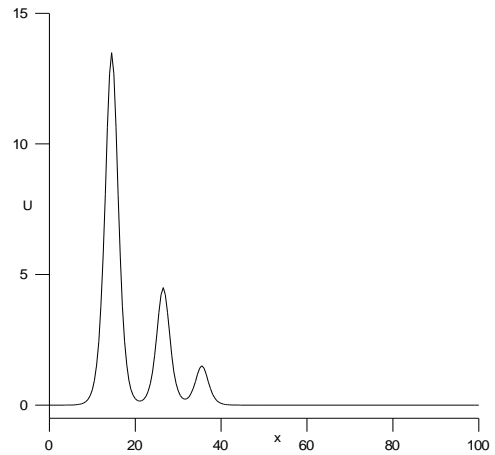
Şekil 3 te ise üç solitary dalğanın farklı zamanlarda birbirleriyle etkileşimlerini gösteren grafikler verilmiştir. Bir solitary dalğanın hızı genliği ile doğru orantılı olduğundan en soldaki dalga diğer iki dalgaya göre daha hızlı ilerler. Bu yüzden zaman ilerledikçe en soldaki dalga diğer iki dalgayı, ortadaki dalga ise en sağdaki dalgayı geçmiştir ve sonuçta bütün dalgalar başlangıçtaki konumlarının tam ters sıralamasıyla görülmüştür.

**Çizelge 4.**  $t=15$  zamanında üç solitary dalga etkileşimi için korunumlar

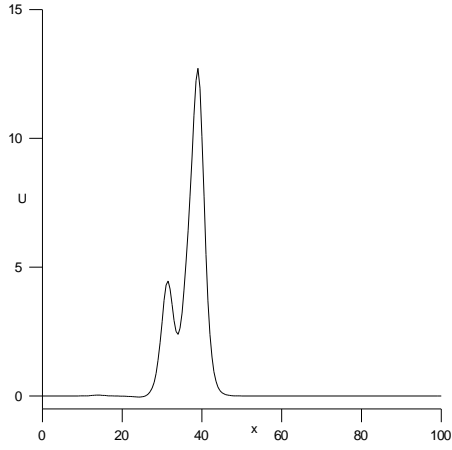
Metot	h	$\Delta t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
MQ	0.5	0.1	78.059272	655.828529	5465.163764
G	0.5	0.1	78.000222	655.341909	5452.481409
IQ	0.5	0.1	78.009096	655.359052	5452.857092
IMQ	0.5	0.1	78.026694	655.323090	5451.996150



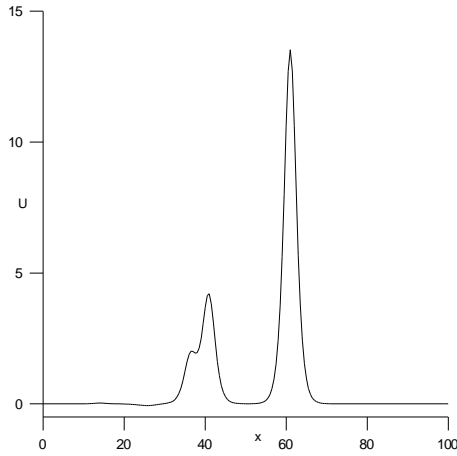
(a) t=0, t=15



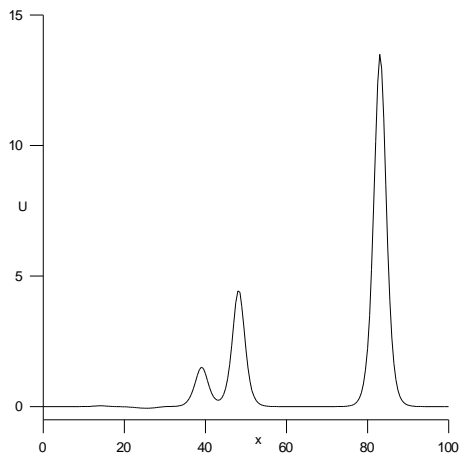
(b) t=0



(c) t=5



(d) t=10



(e) t=15

Şekil 3. Üç solitary dalganın farklı zamanlarda Etkileşimi (a-b-c-d)

### Maxwell Başlangıç Koşulu

Bu bölümde EW denkleminin

$$U(x,0) = 0.05 \exp(-(x - x_0)^2 / 25)$$

Maxwell başlangıç koşulu altında dalga oluşumu çözümü çalışılmıştır. Sınır koşulları  $U(0,t) = U(50,t) = 0$ ,  $V(0,t) = V(50,t) = 0$  (Dereli ve Schaback, 2010) ile uyumlu olarak seçilerek  $[0,50]$  tanım aralığında  $t = 500$  zamanında dalganın oluşumu izlenmiştir. Bu verilere göre korunumların  $t = 500$  anındaki değerleri Çizelge 5 de gösterilmiş ve Şekil 4 te  $t = 500$  anında elde edilen çözümün grafiği verilmiştir. Burada zaman ilerledikçe başlangıçtaki dalganın orjinal formunu bozarak ardışık dalgalar ürettiği gözlenmiştir.

Maxwellian başlangıç koşulu için korunumların  $t = 0$  anındaki değerleri

$$C_1 = 0.443112$$

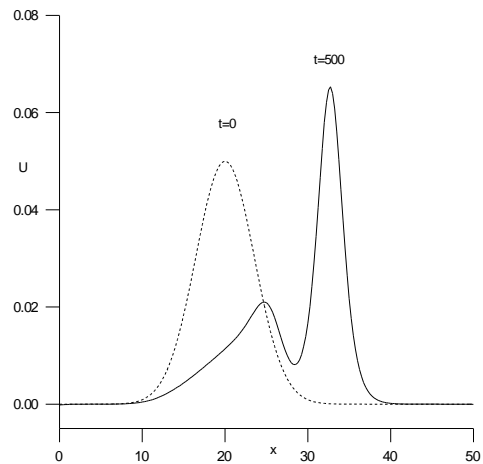
$$C_2 = 0.016347$$

$$C_3 = 0.000640$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Çizelge 5. Maxwell başlangıç koşulu için korunumlar

Metot	h	$\Delta t$	$C_1$	$C_2$	$C_3$
MQ	0.25	1	0.442844	0.016293	0.000640
G	0.25	1	0.442933	0.016301	0.000645
IQ	0.25	1	0.443169	0.016295	0.000640
IMQ	0.25	1	0.443371	0.016294	0.000640



Şekil 4. Maxwell başlangıç koşulu ile dalga oluşumu

## Sonuç

Bu çalışmada lineer olmayan Equal Width (EW) denkleminin radial basis fonksiyon collocation metodu kullanılarak çeşitli test problemleri için sayısal çözümleri yapılmıştır. Hesaplamalarda konum ayrıştırması kullanılarak Equal Width denklemini için konuma göre daha düşük mertebeden bir çiftli denklem sistemi elde edilmiştir. Sistemi çözmek için radial basis fonksiyon collocation metodu kullanılmıştır.

Yöntemin geçerliliğini ve doğruluğunu göstermek için farklı test problemleri ile çalışılmıştır. Her bir test problemi için elde edilen sayısal sonuçların karşılaştırılmaları çizelgeler ile verilmiştir. Elde edilen sonuçlarla Equal Width denkleminin sayısal çözümünü hesaplamada kullanılan metodun yüksek doğruluklu bir metot olduğu görülmüştür.

## Kaynaklar

- Dereli, Y., Schaback, R. 2010. The Meshless Kernel-Based Method of Lines for Solving the Equal Width Equation. Georg-August Göttingen University Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Preprint-Serie, Number: 2010-27.
- Doğan, A. 2005. Application of Galerkin's method to equal width wave equation. *Appl. Math. and Comput.*, 160, 65-76.
- Esen, A. 2005. A numerical solution of the equal width wave equation by a lumped Galerkin method. *Appl. Math. and Comput.*, 168, 270-282.
- Gardner, L.R.T., Gardner, G.A. 1992. Solitary waves of the equal width wave equation. *J. Comput. Phys.*, 101, 218-223.
- Hardy, R.L. 1971. Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces. *J. Geophys. Res.*, 76, 1905-1915.
- Kansa, E.J. 1990. Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-I surface approximations and partial derivative estimates. *Comput. Math. Appl.*, 19, 127-145.
- Kansa, E.J. 1990. Multiquadrics-A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-II solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations. *Comput. Math. Appl.*, 19, 146-161.
- Morrison, P.J., Meiss, J.D., Carey, J.R. 1984. Scattering of RLW solitary waves. *Physica*, 11D, 324-336.
- Olver, P.J. 1979. Euler operators and conservation laws of the BBM equation. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 85, 143-159.
- Raslan, K.R. 2004. A computational method for the equal width equation. *Int. J. Comp. Math.*, 81, 63-72.
- Rubin, S.G., Graves, R.A. 1975. Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics. Nasa TR R-436, Washington, DC.
- Saka, B. 2006. A finite element method for equal width equation. *Appl. Math. and Comput.*, 175, 730-747.
- Saka, B., Dağ, İ., Dereli, Y., Korkmaz, A. 2008. Three different methods for numerical solution of the EW equation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 32, 556-566.
- Zaki, S.I. 2000. A least-squares finite element scheme for the EW equation. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 189, 587-594.