*Süleyman Demirel Üniversitesi,
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,
16-1(2012), 116-121*

Klasik Pareto Dağılımının Şekil Parametresi İçin Shrinkage Tahmin Ediciler

Şenay ÖZDEMİR[1*], Meral EBEGİL[2]
[1] *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü / AFYONKARAHİSAR*
[2] *Gazi Üniversitesi Fen Fakültesi İstatistik Bölümü / ANKARA*
Alınış Tarihi:28.10.2011, Kabul Tarihi:28.12.2011

Özet: Bu çalışmada klasik Pareto dağılımının şekil parametresi için shrinkage tahmin yöntemi ile en çok olabilirlik tahmin edicisi ve sapmasız tahmin edici kullanılarak, bu tahmin edicilere göre daha küçük hata kareler ortalamasına sahip sapmalı tahmin ediciler önerilmiştir. Daha sonra, Pareto dağılımının şekil parametresinin sapmasız tahmin edicisi, en çok olabilirlik tahmin edicisi ve elde edilen sapmalı tahmin ediciler simülasyon çalışması yardımıyla karşılaştırılmış ve sonuçlar yorumlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Hata Kareler Ortalaması, Sapma, Pareto Dağılımı, Şekil Parametresi, Shrinkage Tahmin

Shrinkage Estimators for the Shape Parameter of Classical Pareto Distribution

Abstract: In this study, the biased estimators for the shape parameter of classical Pareto distribution by using the maximum likelihood estimator and the unbiased estimator are proposed. Mean square errors of these biased estimators are smaller than mean square errors of maximum likelihood estimator and the unbiased estimator. Then the unbiased estimator and the maximum likelihood estimator are compared with obtained biased estimators by means of simulation study and conclusions are interpreted.

Keywords: Mean Square Error, Bias, Pareto Distribution, Shape Parameter, Shrinkage Estimation

Giriş

Yığına ilişkin bir çıkarım yapabilmek için öncelikle bu yığınının tanımlayıcı parametreleri belirlenmeye çalışılır. Bu amaç doğrultusunda sapmasız tahmin ediciler yaygın olarak kullanılır. Beklenen değeri yığın parametresine eşit olan sapmasız tahmin edicilerin büyük varyansa sahip olmaları durumunda daha küçük hata kareler ortalaması (HKO)'na sahip olan sapmalı tahmin edicilerin kullanılması söz konusu olabilir. Buradan hareketle bilinmeyen yığın parametrelerinin sapmalı ama daha küçük HKO'lı tahminiyle ilgili çeşitli çalışmalar yapılmıştır.

James R. Thompson (1968, a) yığın ortalamasının en iyi doğrusal sapmasız tahmin edici (ENDOST)'sinin HKO değerini daraltma faktörü adı verilen bir çarpan yardımıyla küçülterek daha iyi bir tahmin ediciye ulaşmaya çalışmıştır. Bu konu ile ilgili diğer önemli çalışmalar J.S. Metha ve R.Srinivasan (1971), Govindarajulu ve Sahai (1972), Das (1975), Rao ve Singh(1982), Singh ve Katyar (1988), Srivastava vd. (1980), Bhatnagar (1986) ve Singh(1990), Jani (1991), Kourouklis (1994)),Singh, Singh (1997), Singh ve Singh(1997), Singh ve Shukla (2003), Singh ve Saxena (2003) tarafından yapılmıştır.

Pareto dağılımı ilk olarak Pareto V. (1897) tarafından gelir dağılımı üzerine yapılan çalışmada kullanılmıştır. Rytgaard (1990) çalışmasında Pareto dağılımının şekil parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi (maximum likelihood estimator: EÇOB) ve Moment Tahmin edicileri üzerinde çalışmıştır. Elde ettiği EÇOB tahmin edicisini kullanarak şekil parametresi için en küçük varyanslı sapmasız bir tahmin edici önermiştir. Singh vd. (1996) yaptıkları çalışmada Pareto dağılımının dağılış parametresinin EÇOB ve sapmasız tahmin edicileri için shrinkage tahmin yöntemini kullanarak yeni bir tahmin edici ailesi önermiş ve önerilen bu tahmin edici ailesinin bazı durumlarda diğer tahmin edicilerden üstün olduğunu HKO değerlerini karşılaştırarak göstermiştir. Prakash vd. (2006) yaptıkları çalışmada Pareto dağılımının şekil parametresinin önsel bilgisi mevcutken dağılış parametresi için bazı test tahmin edicileri önermiş ve önerilen tahmin ediciler ile sapmasız tahmin edicilerin karşılaştırılmasında hata kare kayıp fonksiyonunu kullanmıştır. Prakash (2009) çalışmasında Pareto dağılımının şekil parametresi için bazı daraltıcı test tahmin edicileri ile Bayes tahmin edicileri ve özellikleri üzerinde çalışmış ve bu tahmin edicileri göreli etkinlikleri yardımıyla karşılaştırmıştır.

Bu çalışmada, tanıtılan tahmin edici yardımıyla Pareto dağılımının şekil parametresi için sapmalı iki farklı tahmin edici elde edilmiştir. Elde edilen bu tahmin ediciler hem sapmasız tahmin edicinin varyansından hem de EÇOB tahmin edicisinin HKO değerinden daha küçük HKO değerine sahip tahmin edicilerdir.

Shrinkage Tahmin Edicisi

Thompson (1968, a) tarafından, c, $0 < c \leq 1$ aralığında bir sabit, $\hat{\theta}$ değeri, θ parametresinin tahmin edicisi ve θ_0 değeri, θ parametresinin önsel değeri olmak üzere θ parametresi için,

$$\hat{\theta}_s = c(\hat{\theta}) + (1-c)\theta_0 \tag{1}$$

şeklinde bir tahmin edici önerilmiştir . Eşitlik (1)'de verilen bu tahmin edicide c sabiti daraltma faktörü olarak isimlendirilir. Bu faktör bir önsel bilgi varlığında ENDOST ile çarpılarak Eşitlik (1)'deki sapmalı tahmin edicinin HKO' nı minimum yapacak şekilde elde edilir.

*senayozdemir@aku.edu.tr

Pareto Dağılımının Şekil Parametresi İçin Önerilen Tahmin Ediciler ve Özellikleri

Bu bölümde Pareto dağılımının şekil parametresi için Rytgaard (1990) tarafından önerilen en küçük varyanslı sapmasız tahmin edici ve çeşitli daraltma faktörleri kullanılarak sapmasız tahmin ediciye göre daha küçük HKO'na sahip sapmalı tahmin ediciler elde edilmiştir. Sonra bu tahmin edicilere ait HKO değerleri hesaplanmış ve teorik olarak karşılaştırılmıştır.
X, klasik Pareto dağılımına sahip rassal bir değişken olsun. α, dağılış parametresi ve β, şekil parametresi olmak üzere X rassal değişkenine ait olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta\alpha^{\beta}}{x^{(\beta+1)}} & ; x > \alpha \\ 0 & ; x \leq \alpha \end{cases} \tag{2}$$

şeklinde tanımlanır.

X rassal değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonu Eşitlik (2)'de verildiği gibi tanımlanmak üzere, Pareto dağılımının şekil parametresi β'nın EÇOB tahmin edicisi,

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} ln\frac{x_i}{\alpha}} \tag{3}$$

şeklindedir.

Rytgaard (1990) çalışmasında, Eşitlik (3)' de verilen tahmin ediciyi kullanarak, Pareto dağılımının şekil parametresi β için aşağıda verilen sapmasız tahmin ediciyi elde etmiştir:

$$\tilde{\beta} = \frac{n-1}{n}\hat{\beta} \tag{4}$$

Eşitlik (4)'de verilen tahmin ediciye ilişkin beklenen değer,

$$E(\tilde{\beta}) = \beta \tag{5}$$

dır. Varyans ise

$$E(\tilde{\beta}^2) = \frac{(n-1)}{(n-2)}\beta^2 \tag{6}$$

olmak üzere

$$Var(\tilde{\beta}) = \frac{1}{(n-2)}\beta^2 \tag{7}$$

şeklinde elde edilir. Burada $\tilde{\beta}$ sapmasız bir tahmin edici olduğu için $HKO(\tilde{\beta}) = Var(\tilde{\beta})$ olduğu bilinmektedir.

Eşitlik (3)'de verilen tahmin ediciye ilişkin HKO değeri,

$$HKO(\hat{\beta}) = \frac{(n+2)}{(n-1)(n-2)}\beta^2$$

olarak elde edilir. Böylece Eşitlik (3) ve Eşitlik (4)'te verilen tahmin edicilere ait HKO değerleri karşılaştırıldığında,

$$\frac{HKO(\hat{\beta})}{Var(\tilde{\beta})} = \frac{(n+2)}{(n-1)} > 1$$

ifadesinden, $n > 1$ olduğu sürece $Var(\tilde{\beta}) < HKO(\hat{\beta})$ olacağı sonucuna ulaşılır.

Önerme 1: Pareto dağılımının şekil parametresi β için, sapmasız tahmin edici kullanılarak, Eşitlik(1)'de verilen tahmin edici yardımıyla oluşturulan shrinkage tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{ss} = \frac{(\beta-\beta_0)^2}{Var(\tilde{\beta}) + (\beta-\beta_0)^2}(\tilde{\beta}-\beta_0) + \beta_0 \tag{8}$$

olarak elde edilir. Bu tahmin ediciye ait HKO,

$$HKO(\hat{\beta}_{ss}) = \frac{\beta^2(\beta-\beta_0)^2}{(n-2)(\beta-\beta_0)^2 + \beta^2} \tag{9}$$

şeklinde elde edilir.

Kanıt 1: β parametresi için Eşitlik (1)'de verilen tahmin edici yardımıyla elde edilen $\hat{\beta}_{ss} = c\tilde{\beta} + (1-c)\beta_0$ formundaki tahmin edici, $\tilde{\beta}$; β parametresi için sapmasız bir tahmin edici, β_0; β parametresi için önsel tahmin değeri ve c; $HKO(\hat{\beta}_{ss})$ değerini minimum yapacak bir sabit olmak üzere,

$$\hat{\beta}_{ss} = c(\tilde{\beta}-\beta_0) + \beta_0 \tag{10}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $HKO(\hat{\beta}_{ss})$ değeri,

$$HKO(\hat{\beta}_{ss}) = E\left[c(\tilde{\beta}-\beta_0) + \beta_0 - \beta\right]^2 \tag{11}$$

şeklindedir. Eşitlik (11)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$HKO(\hat{\beta}_{ss}) = \frac{c^2\beta^2}{n-2} + (c-1)^2(\beta-\beta_0)^2 \tag{12}$$

elde edilir. Eşitlik (11)'deki ifadenin c' ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlenerek HKO değerini minimum yapacak daraltma faktörü c,

$$c = \frac{(\beta-\beta_0)^2}{\frac{\beta^2}{n-2} + (\beta-\beta_0)^2}$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$$c = \frac{(\beta-\beta_0)^2}{Var(\tilde{\beta}) + (\beta-\beta_0)^2} \tag{13}$$

olarak elde edilir.

Sonuç olarak, Pareto dağılımının şekil parametresi β için Eşitlik(1)'de verilen tahmin edici yardımıyla elde edilen shrinkage tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{ss}=\frac{(\beta-\beta_0)^2}{Var(\tilde{\beta})+(\beta-\beta_0)^2}\left(\tilde{\beta}-\beta_0\right)+\beta_0 \tag{14}$$

dir. Böylece bu tahmin ediciye ait Eşitlik (12)' de verilen HKO ifadesinde Eşitlik (13)' deki c daraltma faktörü yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$HKO(\hat{\beta}_{ss})=\frac{\beta^2(\beta-\beta_0)^2}{(n-2)(\beta-\beta_0)^2+\beta^2} \tag{15}$$

şeklinde elde edilir. □

β parametresinin sapmasız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$'e ilişkin varyans ve $\hat{\beta}_{ss}$ tahmin edicisine ilişkin HKO karşılaştırıldığında

$$\frac{HKO(\hat{\beta}_{ss})}{Var(\tilde{\beta})}=\frac{\dfrac{\beta^2(\beta-\beta_0)^2}{(n-2)(\beta-\beta_0)^2+\beta^2}}{\dfrac{\beta^2}{n-2}}$$

$$=\frac{(n-2)(\beta-\beta_0)^2}{(n-2)(\beta-\beta_0)^2+\beta^2} \tag{16}$$

ifadesine ulaşılır. Eşitlik (16)'da verilen ifade $n>2$ olduğu sürece 1' den küçük olacağından $HKO(\hat{\beta}_{ss})<Var(\tilde{\beta})$ sonucuna ulaşılır.

Daraltma faktörü olan c sabiti β parametresinin bir fonksiyonu olarak elde edilmiştir. Ancak uygulamada β parametresine ulaşmak mümkün olamayacağı için β parametresi yerine sapmasız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$ kullanılabilir. Bu durumda daraltma faktörü c için bir tahmin edici,

$$\hat{c}=\frac{\left(\tilde{\beta}-\beta_0\right)^2}{\dfrac{\tilde{\beta}^2}{n-2}+\left(\tilde{\beta}-\beta_0\right)^2} \tag{17}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (17)'de verilen daraltma faktörü kullanılarak elde edilen tahmin edici

$$\hat{\beta}_{ss}=\frac{\left(\tilde{\beta}-\beta_0\right)^2}{\dfrac{\tilde{\beta}^2}{n-2}+\left(\tilde{\beta}-\beta_0\right)^2}\left(\tilde{\beta}-\beta_0\right)+\beta_0 \tag{18}$$

şeklini alır. Eşitlik (18)' de verilen sapmalı tahmin edici ile sapmasız tahmin edicinin etkinlikleri simülasyon çalışması bölümünde 100000 denemelik Monte Carlo çalışması yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Önerme 2: Pareto dağılımının şekil parametresi β için, EÇOB tahmin edicisi kullanılarak, Eşitlik (1)'de verilen tahmin edici yardımıyla oluşturulan shrinkage tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{se}=\frac{(\beta-\beta_0)\left[\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\beta^2+\left(\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right)^2}\left(\hat{\beta}-\beta_0\right)+\beta_0 \tag{19}$$

olarak elde edilir. Bu tahmin ediciye ait HKO;

$$HKO(\hat{\beta}_{se})=\frac{\beta^2(\beta-\beta_0)^2\left(\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right)^2+\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\beta^2} \tag{20}$$

biçiminde oluşturulur.

Kanıt 2: β parametresi için Eşitlik (1)'de verilen tahmin edici yardımıyla elde edilen $\hat{\beta}_{se}=c\hat{\beta}+(1-c)\beta_0$ formundaki tahmin edici, $\hat{\beta}$, β parametresi için EÇOB tahmin edicisi, β_0, β parametresi için önsel tahmin değeri ve c, $OHK(\hat{\beta}_{se})$ değerini minimum yapacak bir sabit olmak üzere,

$$\hat{\beta}_{se}=c\left(\hat{\beta}-\beta_0\right)+\beta_0 \tag{21}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla $HKO(\hat{\beta}_e)$ değeri

$$HKO(\hat{\beta}_{se})=E\left[c\left(\hat{\beta}-\beta_0\right)+\beta_0-\beta\right]^2 \tag{22}$$

dir. Eşitlik (22)'de gerekli düzenlemeler yapıldığında,

$$HKO(\hat{\beta}_{se})=c^2\beta^2\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}+\left[c\left(\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right)-(\beta-\beta_0)^2\right]^2 \tag{23}$$

elde edilir. Bu ifadenin c' ye göre türevi alınıp sıfıra eşitlendiğinde HKO değerini minimum yapacak daraltma faktörü c,

$$c=\frac{(\beta-\beta_0)\left[\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\beta^2+\left(\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right)^2} \tag{24}$$

şeklinde elde edilir.

Sonuç olarak, Pareto dağılımının şekil parametresi β için Eşitlik (1)'de verilen tahmin edici yardımıyla elde edilen shrinkage tahmin edicisi,

$$\hat{\beta}_{se}=\frac{(\beta-\beta_0)\left[\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\beta^2+\left(\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right)^2}\left(\hat{\beta}-\beta_0\right)+\beta_0 \tag{25}$$

olarak elde edilir. Böylece bu tahmin ediciye ait Eşitlik (23)' de verilen HKO ifadesinde Eşitlik (24)' deki c daraltma faktörü yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapıldığında;

$$HKO(\hat{\beta}_{se}) = \frac{\beta^2(\beta-\beta_0)^2\left(\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\right)}{\left(\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right)^2+\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\beta^2} \tag{26}$$

şeklinde elde edilir. □

β parametresinin sapmasız tahmin edicisi $\tilde{\beta}$'e ilişkin varyans ve $\hat{\beta}_{se}$ tahmin edicisine ilişkin HKO karşılaştırıldığında

$$\frac{HKO(\hat{\beta}_{se})}{Var(\tilde{\beta})} = \frac{(\beta-\beta_0)^2}{(n-2)\left[\beta^2+\left(\beta-\frac{n-1}{n}\beta_0\right)^2\right]} \tag{27}$$

ifadesine ulaşılır. β ve β_0 ifadeleri 2'den büyük reel değerler alabileceği için $n > 2$ olduğu sürece Eşitlik (27)'deki etkinlik değerinin 1' den küçük olacağı görülmektedir.

Yine, daraltma faktörü olan c sabiti β parametresinin bir fonksiyonu olarak elde edildiği için β parametresi yerine EÇOB tahmin edicisi $\hat{\beta}$ kullanılabilir. Bu durumda daraltma faktörü için bir tahmin;

$$\hat{c} = \frac{(\hat{\beta}-\beta_0)\left[\frac{n}{n-1}\hat{\beta}-\beta_0\right]}{\frac{n^2}{(n-1)^2(n-2)}\hat{\beta}^2+\left(\frac{n}{n-1}\hat{\beta}-\beta_0\right)^2} \tag{28}$$

olarak elde edilir. Eşitlik (28)' de verilen daraltma faktörü kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin edici ile sapmasız tahmin edicinin etkinlikleri simülasyon çalışması bölümünde 100000 denemelik Monte Carlo çalışması yardımıyla karşılaştırılmıştır.

Bununla birlikte, tahmin edicilerin karşılaştırılmasında HKO kriterinin yanı sıra küçük sapmada önemli bir role sahiptir. Eşitlik (8) ve Eşitlik (19)'da verilen $\hat{\beta}_{ss}$ ve $\hat{\beta}_{se}$ tahmin edicilerine ilişkin sapma değerleri sırasıyla,

$$Sapma(\hat{\beta}_{ss}) = \frac{\beta^2(\beta-\beta_0)^2}{\beta^2+(n-2)(\beta-\beta_0)^2}$$

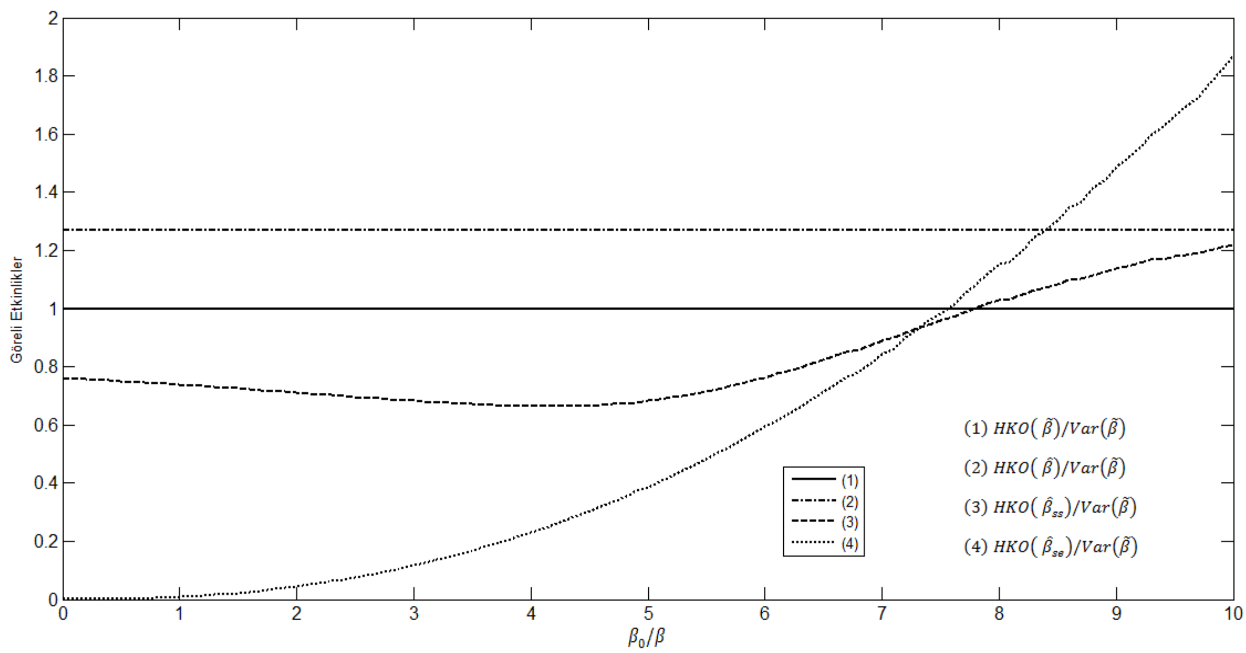
ve

$$Sapma(\hat{\beta}_{se}) = \frac{n^2\beta^2(\beta-\beta_0)^2}{n^2\beta^2+(n-1)^2(n-2)\left(\frac{n}{n-1}\beta-\beta_0\right)^2}$$

şeklindedir. Buradan $Sapma(\hat{\beta}_{ss})/Sapma(\hat{\beta}_{se}) < 1$ olduğu görülmektedir. $\hat{\beta}_{ss}$ tahmin edicisine ilişkin sapmanın $\hat{\beta}_{se}$ tahmin edicilerine ilişkin sapmadan daha küçük olduğu sonucuna ulaşılır.

Simülasyon Çalışması

Simülasyon çalışmasında, $\alpha = 1, 1.5, 2, \ldots$ değerleri için yapılan denemelerde aynı değerler elde edilmiştir. Bu yüzden basit Pareto dağılımında da olduğu gibi dağılış parametresi $\alpha = 1$ olarak alınmıştır. Pareto dağılımına sahip bir veri setinin varyansının hesaplanabilmesi için şekil parametresinin 2'den büyük olması gerekmektedir. Ayrıca Thompson (1968,a) çalışmasında, önerdiği tahmin edicinin üstünlüğünü kanıtlamak için yaptığı uygulamada normal dağılıma sahip bir yığının tanımlayıcı iki parametresi arasındaki oranı 1/5 olarak almıştır. Buradan hareketle, bu simülasyon çalışmasında $\alpha = 1$ ve $\beta = 5$ parametrelerine sahip Pareto dağılımından gelen veri setlerinden yararlanılmıştır.



Şekil 1: *EÇOB ve önerilen sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye göre göreli etkinlikleri*

Şekil 1'de n=10 durumunda değişik β_0/β değerleri için yukarıda sözü geçen dört tahmin edicinin sapmasız tahmin ediciye göre göreli etkinlikleri yer almaktadır. Şekil 1'e bakıldığında sapmasız tahmin edicinin EÇOB tahmin edicisinden daha küçük HKO değerlerine sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca sapmasız tahmin edici ve EÇOB tahmin edicisi kullanılarak elde edilen her iki sapmalı tahmin edicinin de belli bir β_0/β değerine kadar sapmasız tahmin ediciden daha üstün olduğu görülmektedir. Bununla birlikte küçük β_0/β değerleri için EÇOB tahmin edicisi kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin edicinin, sapmasız tahmin edici kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin ediciden daha küçük HKO değerlerine sahiptir. Ancak β_0/β değeri büyüdükçe sapmasız tahmin edici kullanılarak elde edilen tahmin edicinin HKO değerindeki artış hızının, EÇOB tahmin edicisi kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin edicinin HKO değerindeki artış hızına göre daha az olduğu gözlenmektedir. Şekil 1'de sabit bir n değerine karşılık değişen β_0/β değerleri ele alınmıştır. Sabit bir β_0/β değeri ele alındığında değişen n değerleri için etkinlik değerlerinin nasıl etkilendiğini gözlemlemek için yapılan simülasyon çalışması sonuçları Çizelge 1'de özetlenmiştir.

Çizelge 1: $\beta_0/\beta = 2.5$ *durumunda farklı n değerleri için EÇOB ve önerilen sapmalı tahmin edicilerin sapmasız tahmin ediciye göre göreli etkinlik değerleri*

Tahmin Ediciler	n				
	5	10	15	25	50
$\tilde{\beta}$	1	1	1	1	1
$\hat{\beta}$	1.6477	1.2710	1.1707	1.0982	1.0475
$\hat{\beta}_{ss}$	0.4687	0.6959	0.7887	0.8686	0.9328
$\hat{\beta}_{se}$	0.1283	0.0767	0.0660	0.0600	0.0557

Çizelge 1'e bakıldığında, n artarken $\hat{\beta}_{ss}$ ve $\hat{\beta}$ tahmin edicilerinin HKO değerlerinin $\tilde{\beta}$ tahmin edicisinin HKO değerine yakınsadığı görülmektedir. Bununla birlikte $\hat{\beta}_{se}$ tahmin edicisine ait göreli etkinlik değerlerine bakıldığında n artarken, bu tahmin edicinin $\tilde{\beta}$ sapmasız tahmin edicisine göre üstünlüğünün de arttığı görülmektedir. Çizelge 1'de verilen göreli etkinlik değerlerine bakıldığında önerilen sapmalı tahmin edicilerin EÇOB ve sapmasız tahmin edicilere göre daha küçük HKO'na sahip olduğu gözlemlenmiştir.

Sonuç

Bazı durumlarda sapmalı tahmin ediciler sapmasız tahmin edicilere göre daha küçük HKO değerlerine sahiptirler. Bu durumda sapmalı tahmin ediciler sapmasız tahmin edicilere tercih edilebilirler. Thompson (1968,a) yapmış olduğu çalışmada parametre tahmini için önerdiği tahmin edicinin sapmasız tahmin ediciye göre daha küçük HKO değerine sahip olduğunu göstermiştir. Jani (1991) çalışmasında üstel dağılımın dağılış parametresi için sapmalı bir tahmin edici sınıfı önermiş ve bu tahmin edici sınıfının sapmasız tahmin ediciden daha üstün oluğu durumları göstermiştir. Singh ve Singh (1997) ile Singh ve Saxena (2003) yaptıkları çalışmalarda normal dağılıma sahip bir yığının varyansı için tahmin edici aileleri önermiş ve diğer tahmin edicilerden daha küçük HKO değerine sahip olduğu durumları belirtmişlerdir. Prakash (2006, 2009) ise Pareto dağılımının dağılış parametresi için çeşitli sapmalı tahmin ediciler önermiş ve bu tahmin edicilerin diğer tahmin edicilerden üstün olduğu durumları incelemiştir. Bu çalışmada, Thompson (1968,a)'nın önermiş olduğu tahmin ediciden yola çıkılarak Pareto dağılımının şekil parametresine ilişkin iki tane sapmalı tahmin edici önerilmiştir. Bu tahmin ediciler HKO'nı minimum yapacak şekilde oluşturulmuştur.

Şekil 1 ve Çizelge 1'de verilen göreli etkinlik değerlerine bakıldığında önerilen sapmalı tahmin edicilerin EÇOB ve sapmasız tahmin edicilere göre daha küçük HKO'ye sahip olduğu gözlemlenmiştir. Bununla birlikte, küçük β_0/β değerleri için EÇOB tahmin edicisi kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin ediciye ait HKO değerleri, sapmasız tahmin edici kullanılarak elde edilen sapmalı tahmin edicinin HKO değerlerinden daha küçüktür. Ancak tahmin edicilerin tanıtıldığı bölümde $Sapma(\hat{\beta}_{ss})$ değerinin $Sapma(\hat{\beta}_{se})$ değerinden küçük olduğu belirtilmişti. Eğer araştırmacı, sapmasız tahmin ediciye göre daha küçük HKO değeri ile birlikte parametreden sapma değerinin de küçük olmasını istiyorsa bu durumda $\hat{\beta}_{ss}$ tahmin edicisini kullanması daha uygun olacaktır.

Kaynaklar

Bhatnagar, S. 1986. On the use of population variance in estimating mean. Jour. Ind. Soc. Agril. Statist., 38, 403-409.

Das, B. 1975. Estimation of μ^2 in normal population. Cal. Statist. Assoc. Bull. 24,135-140.

Govindarajulu, Z. and Sahai, H. 1972. Estimation of a normal distribution with known coefficient of variation. Statist. Appl. Res., JUSE, (A), 91, 85-98.

Jani, P.N. 1991. A class of shrinkage estimators for the scale parameter of the exponential distribution. IEEE Trans. Reliability, 40, 68-70.

Kourouklis, S. 1994. Estimation in the two-parameter exponential distribution with prior information. IEEE Trans. Reliability., 43, (3), 446-450.

Mehta, J.S. and Srinivasan, S.R. 1971. Estimation of the mean by shrinkage to a point. Jour. Amer. Statist. Assoc., 66, (233), 86-90.

Pareto V. 1897. Cours'd Economia Politique. Roge and Cie, Lassanne and Paris, Vol.II

Prakash G. 2009. Some estimators for the Pareto Distribution. Journal of Scientific Research, 1, (2)

Prakash G., Singh D.C. and Singh R.D. 2006. Some test estimators for the scale parameter of classical Pareto Distribution . Journal of Statistical Research, 40, (2), 41-54

Rao, V.N. and Singh, J. 1982. A note on estimation of μ^2 in normal density. Jour. Ind. Soc. Agril. Statist., 34, (1), 82-84.

Rytgaard M. 1990. Estimation in Pareto Distribution. ASTIN Bulletin , 20(2), 201-216

Singh D.C., Singh P.and Singh, P.R. 1996. Shrunken estimators for the scale parameter of classical Pareto Distribution. Microelectronand Reliability, 36, (3), 435-439

Singh H.P. 1990. Estimation of parameters in normal parent. Jour. Ind. Soc. Agril. Statist., XL11, (1), 98-107.

Singh H.P. and Katyar, N.P. 1988. A generalized class of estimators for common parameters of two normal distribution with known coefficient of variation. Jour. Ind. Soc. Agril. Statist., 40, 2, 127-149.

Singh H.P. and Saxena S. 2003. A class of shrinkage estimators for variance of a normal Population. Brazilian Journal of Probability and Statistics, 17, 41–56.

Singh H.P. and Shukla S. K. 2003. A family of shrinkage estimators for the square of mean in normal distribution. Statistical Papers, 44, 433-442

Singh H.P. and Singh, R. 1997. A class of shrinkage estimators for the variance of a normal population. Microelectronand Reliability, 37, (5), 863-867.

Srivastava, V.K., Dwivedi, T.D. and Bhatnagar, S. 1980. Estimation of the square of mean in normal population. Statistica, anno XL, n.4, 455-466.

Thompson, J.R. 1968a. Some shrinkage techniques for estimating the mean. Jour. Amer. Statist. Assoc., 63, 113-122.

Thompson, J.R. 1968b. Accuracy borrowing in the estimation of the mean by shrinkage to an interval. Jour. Amer. Statist. Assoc., 63, 953-963.