Süleyman Demirel Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi

Suleyman Demirel University
Journal of Natural and Applied Science

18(3), 81-89, 2014

Değişim Katsayılarının Eşitliğinin Testi İçin Kullanılan Bazı Yöntemlerin I.Tip Hata Oranları ve Güçleri Bakımından Kıyaslanmaları

Arda UZUNOĞLU, Fikri GÖKPINAR*[1], Esra GÖKPINAR
[1]Gazi Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, 06500, Ankara

Alınış Tarihi: 30.04.2014, Kabul Tarihi: 18.12.2014

Anahtar Kelimeler
Değişim katsayısı
Düzenlenmiş Bennett testi
Olabilirlik oran testi
Merkezi olmayan t testi
Skor testi
Genelleştirilmiş p yaklaşımı

Özet: Değişim katsayısı, bir rastgele değişkenin gözlemlerinin tutarlılığını ya da tekdüzeliğini ölçer. Değişim katsayısı, ortalama başına standart sapma olduğundan göreceli değişkenliğin bir ölçüsüdür. Bu sebepten dolayı guruplar arasındaki değişkenliği karşılaştırmak için kullanılmaktadır. Literatürde k sayıda normal yığının DK'larını karşılaştırmak için bazı testler önerilmiştir. Bu çalışmada k normal yığının değişim katsayılarının eşitliğinin test edilmesinde kullanılan düzenlenmiş Bennett testi, skor testi, merkezi olmayan t testi, olabilirlik oran testi, genelleştirilmiş p yaklaşımı incelenmiştir. Ayrıca bu testler, farklı örnek çapı ve gurup sayısı durumları altında deneysel I.tip hata oranları ve güçleri bakımından simülasyon yoluyla karşılaştırılmış ve sonuçları yorumlanmıştır. Simülasyon çalışmasından elde edilen sonuçlara göre, özellikle örnek çapları eşit ve grup sayısı küçük iken düzenlenmiş Bennett testi, grup sayısı arttıkça ise skor testi diğer testlere göre daha iyi olduğu gözlenmiştir.

Comparison of Some Tests for the Equality of the Coefficient of Variations in Terms of Type One Error and Power of Test

Keywords
Coefficients of variation
Modified Bennett's test
Likelihood ratio test
Non central t test
Score test
Generalized p approach

Abstract: Coefficient of variation measures the uniformity or the consistency of the observations of a random variable. Since coefficient of variation is standard deviance per mean, it is a measurement of relative variability. For this reason coefficient of variation is used to determine the variability of the groups. In literature, some tests are given to compare the coefficients of variations k groups. In this study, the modified Bennett's test, Score test, Non-central t test, Likelihood ratio test, Generalized p value are investigated. Also, these test statistics are compared according to their type I-error rates and powers under different of sample sizes and different number of groups. From the results obtained from simulation studies, the power of the Modified Bennett test is greater than the other tests when sample size are equal and group size is small. The power of the Score test is greater than the other tests when sample size are equal and group size is getting larger.

1. Giriş

Değişim katsayısı (DK), dağılışın ölçü biriminden bağımsız göreceli bir ölçüsüdür. DK, kısaca standart sapmanın ortalamaya oranı olarak ifade edilir. Birçok fiziksel, biyolojik ve tıbbi bilimlerin yanı sıra iklim bilimi, iş ve mühendislik gibi bilimsel alanlarda da yaygın olarak kullanılmıştır. Örneğin; iklim biliminde, Ananthakrishnan ve Soman (1989), yağış verilerinin analizinde normal yağış eğrisi (NYE) için, bir model geliştirilmiş, ve yağış serisini DK'ya bağlı olarak incelemiştir. İş ve mühendislik biliminde, Hillier ve So (1991) DK'yı kullanarak depolama alanının paylaşımına ilişkin işlem etkisini incelemiştir.

DK'ların eşitliğinin testi için literatürde çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Miller ve Karson(1977), iki DK'nın eşitliğinin testi için bir test geliştirmişlerdir.

Doombos ve Dijkstra (1983), k normal yığın için olabilirlik oran testi ve merkezi olmayan t testine dayalı iki farklı test geliştirmişlerdir. Buna göre ikiden fazla yığın olduğunda olabilirlik oran testi cebirsel olarak çözümlenemeyen parametre tahmin denklemlerini içermektedir. Bu denklemlerin çözümü iterasyon yöntemi kullanılarak Doornbos ve Dijkstra (1983) tarafından verilmiştir. Ayrıca Gupta ve Ma (1996) tarafından bu denklemlerin daha iyi bir çözümünü elde etmek için farklı bir yöntem de önerilmiştir. Bennett (1976), k normal yığının DK'larının eşitliği için dönüştürülmüş örnek DK'yı kullanarak bir test önermiştir. Daha sonra bu test, Shafer ve Sullivan (1986) tarafından geliştirilmiştir. Rao ve Vidya(1992), örnek çapı eşitken iki yığının DK'ların eşitliğinin testi için Wald testi geliştirmişlerdir. Son yıllarda ise Forkman (2009) ve Liu vd. (2011) bu konuda çalışmalar yapmışlardır. Ayrıca Liu vd. (2011) k normal yığının DK'larının eşitliği için genelleştirilmiş p yaklaşımına dayalı bir test önermişlerdir.

Bu çalışmada k normal yığının DK'larının eşitliğinin testi için kullanılan en önemli testlerden düzenlenmiş Bennett testi (Shafer ve Sullivan, 1986), olabilirlik oran testi (Gupta ve Ma, 1996), merkezi olmayan t testi (Doornbos ve Dijkstra, 1983), skor testi (Lawless, 1982), genelleştirilmiş p yaklaşımı (Liu vd., 2011) incelenmiştir. Ayrıca bu testler deneysel 1.tip hata oranları ve güçleri bakımından karşılaştırılmış ve hangi durumlarda birbirlerine üstünlük sağladıkları belirlenmeye çalışılmıştır. Bu amaçla çalışmanın 2. bölümünde yukarıda bahsedilen testler kısaca tanıtılmıştır. Çalışmanın 3. bölümünde ise testler deneysel 1.tip hata oranları ve güçleri bakımından farklı örnek çapı ve gurup sayısı durumları altında karşılaştırılmıştır. Çalışmanın 4. bölümünde ise sonuca yer verilmiştir.

2.Test İstatistikleri

$X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in_i}$ (i=1,2,…k) rasgele örneği, μ_i ortalamalı ve $\sigma_i^2 = \mu_i^2 R_i^2$ varyanslı normal dağılımdan alınsın. Burada R_i, i'nci grubun DK'sını ifade etmek üzere, ilgilenilen hipotezler aşağıdaki gibidir.

H_0:R_i=R, i=1,2,…,k

H_1:$R_i \neq R_j$, $\exists$ i, j $\in$ {1, 2, … ,k}. (1)

k yığının DK'sının eşitliği hipotezinin testi için bazı varsayımlar sağlanmalıdır. Bu varsayımlar aşağıdaki gibi ifade edilir.

$\overline{X_i} = \frac{\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij}}{n_i}$, i=1,2,…,k olmak üzere

1) μ_i >0;
2) Pr{ μ_i <0} $\cong 0$, $\forall$ i $\in$ {1, 2, … ,k}, diğer bir değişle ortalamanın sıfırdan küçük bir değer alması olasılığı 0'a yakındır.

Bölümün geri kalanında k normal yığının DK'larının eşitliğinin testi için kullanılan düzenlenmiş Bennett testi (Shafer ve Sullivan, 1986), olabilirlik oran testi (Gupta ve Ma, 1996), merkezi olmayan t testi (Doornbos ve Dijkstra, 1983), skor testi (Lawless, 1982), genelleştirilmiş p yaklaşımı (Liu vd., 2011) incelenmiştir.

2.1.Düzenlenmiş Bennett Testi

Bennett (1976) tarafından önerilen ve olabilirlik oran testine dayalı düzenlenmiş Bennett testi (DBT) için gerekli bazı notasyonlar aşağıda verildiği gibidir.

$$S_i^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n_i}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)^2}{n_i}, \quad r_i = \frac{S_i}{\overline{X}_i}, \quad D_i = \frac{\left(R_i^2 + 1\right)}{R_i^2},$$

$$d_i = \frac{n_i r_i^2}{\left(r_i^2 + 1\right)}, \; B_i = D_i d_i. \qquad \text{i=1,2,…,k.}$$

Burada verilen B_i istatistiği, tüm i $\in$ {1, 2, … ,k} için, yaklaşık olarak n_i-1 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahip olduğu McKay (1932) ve Iglewicz ve Myers (1970) tarafından gösterilmiştir. Eşitlik (1)'de verilen hipotezler D_i >0 ve μ_i >0 olmak üzere D_i 'lere bağlı olarak,

$H_0^{'}$:D_1=D_2=…=D_k,

$H_1^{'}$:$D_i \neq D_j$, $\exists$ i, j $\in$ {1, 2, … ,k}.

hipotezlerine denktir. $H_0^{'}$ hipotezine karşı $H_1^{'}$ hipotezini test etmek için λ olabilirlik oran testi;

$$-2ln\lambda = (N-k)\ln\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{d_i}{(N-k)}\right) - \sum_{i=1}^{k}(n_i - 1)\ln\left(\frac{d_i}{(n_i - 1)}\right) \qquad (2)$$

şeklindedir (Silvey, 1970).

N= $\sum_{i=1}^{k} n_i$ olmak üzere Eşitlik (2)'deki istatistik yaklaşık olarak k-1 serbestlik derecesi ile χ^2 dağılımına sahiptir (Silvey, 1970). Eşitlik (2)'deki istatistik ise Shafer ve Sullivan (1986) tarafından oluşturulmuş ve DBT olarak adlandırılmaktadır. α anlamlılık düzeyinde $H_0^{'}$ 'e karşı $H_1^{'}$ 'in testi için

-2ln λ > $\chi^2_{(k-1,\alpha)}$

ise $H_0^{'}$ red edilir.

2.2.Olabilirlik Oran Testi

Olabilirlik oran testi (OOT) ilk defa Doornbos ve Dijkstra (1983) tarafından geliştirilmiştir. Bu tekniği uygulayabilmek için ilk önce H0'ın doğruluğu altında R ve μ_i parametrelerinin E.Ç.O tahmin edicisi elde edilmesi gerekmektedir. Bu amaçla H_0 altında olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$L_0 = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\mu_i R}\right)^{n_i}\exp\left[-\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\left(X_{ij}-\mu_i\right)^2}{2\mu_i^2 R^2}\right]$$

Burada olabilirlik oran denklemleri;

$$\frac{\partial L_0}{\partial R} = -\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{R}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{\left(X_{ij}-\mu_i\right)^2}{\mu_i^2 R^3} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \mu_i} = -\frac{n_i}{\mu_i}+\sum_{j=1}^{n_i}\frac{X_{ij}\left(X_{ij}-\mu_i\right)}{\mu_i^3 R^2} = 0, \quad i=1,2,\ldots,k. \quad (4)$$

şeklinde olur. Buna göre,

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i\left(1+\sqrt{1+4\left(1+r_i^2\right)R^2}\right)}{2\left(1+r_i^2\right)}-\sum_{i=1}^{k}n_i = 0 \quad (5)$$

$$\mu_i = \left[\frac{1+\sqrt{1+4\left(1+r_i^2\right)R^2}}{2\left(1+r_i^2\right)\overline{X}_i}\right]^{-1} \quad (6)$$

eşitlikleri elde edilir.

H_0 hipotezi altında R ve μ_i'nin kısıtlı en çok olabilirlik (E.Ç.O) tahmin edicileri $\hat{R}$ ve $\hat{\mu}_i$ olmak üzere Eşitlik (5) ve Eşitlik (6)'deki denklemlerin çözümlerinden elde edilir. Burada dikkat edilecek önemli bir nokta Eşitlik (5)'in k>2 olduğu zaman cebirsel olarak çözümünün olmamasıdır. Gupta ve Ma (1996), R'nin tahmini $\hat{R}$'yı iteratif bir yöntem olan yarılama yöntemi kullanarak elde etmişlerdir. Buna göre H_0 kısıtı altında E.Ç.O fonksiyonu;

$$\ln L_0 = -\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\sum_{i=1}^{k}n_i\ln(\hat{\mu}_i\hat{R})-\frac{N}{2}$$

şeklinde iken kısıtsız E.Ç.O fonksiyonu lnL ise;

$$\ln L = -\frac{N}{2}\ln(2\pi)-\sum_{i=1}^{k}n_i\ln(S_i)-\frac{N}{2}$$

şeklinde olacaktır. Bu nedenle λ olabilirlik oranı olmak üzere

$$-2\ln\lambda = \sum_{i=1}^{k}n_i\ln\left(\frac{\hat{\mu}_i^2\hat{R}^2}{S_i^2}\right).$$

şeklinde elde edilir. Bu test istatistiği asimptotik olarak k-1 serbestlik dereceli χ^2 dağılımına sahiptir ve

$$-2\ln\lambda > \chi^2_{(k-1,\alpha)}$$

ise H_0 red edilir.

2.3.Merkezi Olmayan t Testi

Merkezi olmayan t dağılımına dayalı olan bu test istatistiği Doornbos ve Dijkstra (1983) tarafından önerilmiştir. Merkezi olmayan t testi (MOT) için gerekli ifadeler aşağıdaki gibi verilmiştir. $b_i = r_{(i)}^{-1}$,

$\overline{b} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{k}n_i b_i$ ve $T = \sum_{i=1}^{k}n_i\left(b_i-\overline{b}\right)^2$ olsun. T istatistiği, H_0 hipotezinden sapmalara duyarlıdır. b_i ifadesinin beklenen değeri aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

$$E(b_i) = \left(\frac{n_i-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n_i-2)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n_i-1)\right]}\frac{1}{R} \quad (7)$$

ve b_i ifadesinin varyansı ise Stirling formülünden faydalanarak;

$$Var(b_i) = \frac{1}{n_i}\left(1+\frac{1}{2R^2}\right)+o\left(\frac{1}{n_i^2}\right) \quad (8)$$

elde edilir.

b_i'ler asimptotik normal dağılıma sahip olduğundan T istatistiği, $\left(1+\frac{1}{R^2}\right)\chi^2_{(k-1)}$ asimptotik dağılıma sahiptir. Dolayısıyla;

$$E\left(\sum_{i=1}^{k}n_i b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{k}\frac{n_i-1}{n_i-3}+\frac{1}{R^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i\left(n_i-1\right)}{n_i-3} \quad (9)$$

olarak elde edilir.

R-2 nin yansız tahmin edicisi olan $\widehat{R^{-2}}$ aşağıdaki Eşitlik (10)'de ifade edilmiştir.

$$\widehat{R^{-2}} = \frac{\sum_{i=1}^{k}n_i b_i^2-\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i-1}{n_i-3}}{\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i\left(n_i-1\right)}{n_i-3}} \quad (10)$$

T istatistiğinin dağılımının daha uygun yaklaşımını elde etmek üzere, sonlu n_i değeri için $E(T)$ ifadesi aşağıdaki gibi bulunur.

$$E(T) = E\left[\sum_{i=1}^{k} n_i b_i^2 - N\overline{b}^2\right] = \sum_{i=1}^{k} \frac{(N-n_i)(n_i-1)}{N(n_i-3)}$$

$$+\frac{1}{R^2}\left\{\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i(N-n_i)(n_i-1)}{N(n_i-3)} + \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{k} n_i^2\varepsilon_i^2 - (n_i\varepsilon_i)^2\right]\right\}$$

Burada

$$\varepsilon_i = \left(\frac{n_i-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n_i-2)\right]}{\Gamma\left[\frac{1}{2}(n_i-1)\right]}$$ i=1,2,…,k şeklindedir.

R^2 yerine tahmini olan $\widehat{R}^2$ yazıldığında $E(T)$ ifadesi $\overline{E(T)}$ olmak üzere, Doornbos ve Dijkstra(1983) test istatistiğini aşağıdaki şekilde tanımlamışlardır.

$$D = (k-1)\frac{T}{\overline{E(T)}}$$

$\overline{E(T)} \approx E(T) \approx \left(1+\frac{1}{R^2}\right)(k-1)$ olduğundan D istatistiği, asimptotik olarak $\chi^2_{(k-1)}$ dağılımına sahiptir ve $D > \chi^2_{(k-1)}$ ise H_0 red edilir.

2.4.Skor Testi

Bu test, Lawless (1982) tarafından geliştirilmiştir. Buna göre, k normal yığınının DK eşitliğinin testi için Skor testinde (ST) kullanılan parametre vektörü θ ve log-olabilirlik fonksiyonunun kısmi türevler vektörü $U(\theta)$ olmak üzere aşağıdaki gibi verilmiştir.

$$\theta = (R_1, R_2, \ldots, R_k, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_k)$$

$$U(\theta) = \left(\frac{\partial \ln L}{\partial R_1}, \frac{\partial \ln L}{\partial R_2}, \ldots, \frac{\partial \ln L}{\partial R_k}, \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_1}, \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_2}, \ldots, \frac{\partial \ln L}{\partial \mu_k}\right)$$

Buradan;

$$\frac{\partial \ln L}{\partial R_i} = -\frac{n_i}{R_i} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij}-\mu_i)^2}{\mu_i^2 R_i^3}, \qquad \text{i=1,2,…,k.}$$

ve

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu_i} = -\frac{n_i}{\mu_i} + \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \frac{(X_{ij}-\mu_i)}{\mu_i^3 R_i^2}, \qquad \text{i=1,2,…,k.}$$

elde edilir.

Dolayısıyla Fisher'ın bilgi matrisi;

$$I(\theta) = E(B(\theta))$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca $B(\theta)$ her bir hücresi $\left(-\frac{\partial \ln L}{\partial\theta_i \partial\theta_j}\right)$ şeklinde olan 2k×2k boyutlu bir matristir.

Buna göre Fisher'ın bilgi matrisi $I(\theta)$;

$$\begin{pmatrix}
\frac{2n_1}{R_1^2} & 0 & \cdots & 0 & \frac{2n_1}{R_1\mu_1} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \frac{2n_2}{R_2^2} & \cdots & 0 & 0 & \frac{2n_2}{R_2\mu_2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{2n_k}{R_k^2} & 0 & 0 & \cdots & \frac{2n_k}{R_k\mu_k} \\
\frac{2n_1}{R_1\mu_1} & 0 & \cdots & 0 & \frac{n_1(2R_1^2+1)}{\mu_1^2 R_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \frac{2n_2}{R_2\mu_2} & \cdots & 0 & 0 & \frac{n_2(2R_2^2+1)}{\mu_2^2 R_2^2} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \frac{2n_k}{R_k\mu_k} & 0 & 0 & 0 & \frac{n_k(2R_k^2+1)}{\mu_k^2 R_k^2}
\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

H_0 hipotezinin doğruluğu altında

$$S = \left[U(\tilde{\theta})\right]' I^{-1}(\tilde{\theta}) U(\tilde{\theta})$$

olarak elde edilir. S ifadesi asimptotik $\chi^2_{(p)}$ dağılımına sahiptir. Burada p kısıtlarının sayısını ifade eder ve $U(\tilde{\theta}) = (a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_k)'$ şeklindedir. Ayrıca a_i ve b_i ifadeleri aşağıdaki gibidir.

$$a_i = -\frac{n_i}{\tilde{R}} + \sum_{j=1}^{n_i} \frac{(X_{ij}-\tilde{\mu}_i)^2}{\tilde{\mu}_i^2 \tilde{R}^3}, \qquad \text{i=1,2,…,k.} \quad (11)$$

$$b_i = -\frac{n_i}{\tilde{\mu}_i} + \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \frac{(X_{ij}-\tilde{\mu}_i)}{\tilde{\mu}_i^3 \tilde{R}^2} = 0, \qquad \text{i=1,2,…,k.} \quad (12)$$

Buna göre S istatistiği daha açık olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$S = \left[U(\tilde{\theta})\right]' I^{-1}(\tilde{\theta}) U(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{R}^2(\tilde{R}^2+1)}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{a_i^2}{n_i}$$

Buna göre S istatistiği $\chi^2_{(k-1,\alpha)}$ dağılımına sahiptir veS> $\chi^2_{(k-1,\alpha)}$ H_0 red edilir.

2.5.Genelleştirilmiş p Yaklaşımı

İstatistiksel hipotez testinde yaygın olarak kullanılan genelleştirilmiş test değişkeni ve p değeri kavramları ilk olarak Tsui ve Weerahandi (1989) tarafından geliştirilmiştir. Bu yaklaşım genelde istenmeyen parametrelerin varlığı söz konusu olduğundaki problemlere uygulanmıştır.

DK'nın eşitliği hipotezinin testi için Liu vd.(2011) tarafından genelleştirilmiş p yaklaşımı (GPY) önerilmiştir. Buna göre, genelleştirilmiş test değişkeni oluşturmak için Eşitlik (1)'de verilen hipotezler aşağıdaki gibi tekrar ifade edilebilir:

$$H_{10}: \frac{\mu_i}{\sigma_i} = \frac{\mu_k}{\sigma_k} \quad \forall i=1,2,\ldots,k-1.$$

$$H_{11}: \frac{\mu_i}{\sigma_i} \neq \frac{\mu_k}{\sigma_k} \quad \exists\, i \in \{1,2,\ldots,k-1\}. \tag{13}$$

Bu hipotezler $C = \left(\frac{\mu_1}{\sigma_1}, \frac{\mu_2}{\sigma_2}, \ldots, \frac{\mu_k}{\sigma_k}\right)'$ ve

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}_{(k-1)\times k}$$

şeklinde olmak üzere yeniden aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$H_{20}: AC = 0$$

$$H_{21}: AC \neq 0 \tag{14}$$

$\bar{X} = \left(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \ldots, \bar{X}_k\right)'$ ve $S = \left(S_1, S_2, \ldots, S_k\right)'$ olmak üzere $\left(\bar{X}, S\right)$ 'in gözlenen değerleri; $\bar{x} = \left(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\right)'$ ve $s = \left(s_1, s_2, \ldots, s_k\right)'$ olsun. μ_i ve σ_i 'nın genelleştirilmiş pivotları $\Re_{\mu_i}$ ve $\Re_{\sigma_i}$ olmak üzere aşağıdaki gibidir:

$$\Re_{\mu_i} = \bar{x}_i - \frac{s_i}{S_i}\left(\bar{X}_i - \mu_i\right) = \bar{x}_i - \frac{s_i}{\sqrt{n_i - 1}} T_i$$

$$\Re_{\sigma_i} = \frac{s_i}{S_i}\sigma_i = \frac{\sqrt{n_i}}{U_i} s_i$$

Burada;

$$T_i = \frac{\left(\bar{X}_i - \mu_i\right)}{S_i}\sqrt{n_i - 1} \sim t_{n_i - 1}$$

ve

$$U_i^2 = \frac{n_i S_i^2}{\sigma_i^2} \sim \chi^2_{n_i - 1} \quad i=1,2,\ldots,k.$$

şeklindedir. Ayrıca T_i'ler ve U_i^2'ler birbirlerinden bağımsızdır.

$\left(\bar{X}_i, S_i^2\right) = \left(\bar{x}_i, s_i^2\right)$ bilindiğinde $\Re_{\mu_i} = \mu_i$ ve $\Re_{\sigma_i} = \sigma_i$ olarak elde edilir. $\Re_{\mu_i}$ ve $\Re_{\sigma_i}$ dağılımları, $\left(\bar{x}_i, s_i^2\right)$ bilindiğinde herhangi bir bilinmeyen parametreden bağımsızdır. Böylece μ_i ve σ_i için genelleştirilmiş pivotları sırasıyla $\Re_{\mu_i}$ ve $\Re_{\sigma_i}$ 'dir. O halde AC ifadesi için genelleştirilmiş pivot aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\Re_{Ac} = A\Re_c = A\left(\frac{\Re_{\mu_1}}{\Re_{\sigma_1}}, \frac{\Re_{\mu_2}}{\Re_{\sigma_2}}, \ldots, \frac{\Re_{\mu_k}}{\Re_{\sigma_k}}\right).$$

Burada;

$$\frac{\Re_{\mu_i}}{\Re_{\sigma_i}} = \left[\frac{\bar{x}_i - \frac{s_i}{S_i}\left(\bar{X}_i - \mu_i\right)}{\frac{s_i}{S_i}\sigma_i}\right] = \frac{\bar{x}_i}{s_i}\frac{S_i}{\sigma_i} - \frac{\left(\bar{X}_i - \mu_i\right)}{\sigma_i} = \frac{\bar{x}_i}{s_i\sqrt{n_i}}U_i - \frac{1}{\sqrt{n_i}}Z_i$$

ve

$U_i^2 \sim \chi^2_{n_i - 1}$ ve $Z_i \sim$ N(0,1)'dir (i=1,2,…,k).

şeklindedir. $\left(\bar{x}, s\right)$ bilindiğinde $\Re_{Ac}$ ifadesinin koşullu beklenen değeri;

$$\mu_{\Re} = E\left(\Re_{Ac} \mid \left(\bar{x}, s\right)\right) = AE\left(\Re_c \mid \left(\bar{x}, s\right)\right)$$

$$= A\left(E\left(\frac{\Re_{\mu_1}}{\Re_{\sigma_1}} \mid \left(\bar{x}, s\right)\right), E\left(\frac{\Re_{\mu_2}}{\Re_{\sigma_2}} \mid \left(\bar{x}, s\right)\right), \ldots, E\left(\frac{\Re_{\mu_k}}{\Re_{\sigma_k}} \mid \left(\bar{x}, s\right)\right)\right)'$$

ve $\left(\bar{x}, s\right)$ bilindiğinde $\Re_{Ac}$ nin koşullu kovaryans matrisi

$$\Sigma_{\Re} = Cov\left(\Re_{Ac} \mid \left(\bar{x}, s\right)\right) = ACov\left(\Re_c \mid \left(\bar{x}, s\right)\right)A'$$

$$= Aköş\left(Var\left(\frac{\Re_{\mu_1}}{\Re_{\sigma_1}} \mid \left(\bar{x}, s\right)\right), \mathrm{Var}\left(\frac{\Re_{\mu_2}}{\Re_{\sigma_2}} \mid \left(\bar{x}, s\right)\right), \ldots, \mathrm{Var}\left(\frac{\Re_{\mu_k}}{\Re_{\sigma_k}} \mid \left(\bar{x}, s\right)\right)\right)A'$$

şeklinde elde edilir. Buna göre $\mu_{\Re}$ ve $\sum_{\Re}$ ifadeleri;

$$E\left(\frac{\Re_{\mu_i}}{\Re_{\sigma_i}} \mid (\bar{x}, s)\right) = \frac{\bar{x}_i}{s_i\sqrt{n_i}} E(U_i)$$

$$Var\left(\frac{\Re_{\mu_i}}{\Re_{\sigma_i}} \mid (\bar{x}, s)\right) = \left(\frac{\bar{x}_i}{s_i\sqrt{n_i}}\right)^2 Var(U_i) + \frac{1}{n_i}$$

şeklinde olur. Burada,

$$E(U_i) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{(n_i-2)!!}{(n_i-3)!!} & n_i\text{ 'ler çift ise} \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(n_i-2)!!}{(n_i-3)!!} & n_i\text{ 'ler tek ise} \end{cases}$$

ve

$$Var(U_i) = E(U_i^2) - (E(U_i))^2 = n_i - 1 - (E(U_i))^2$$

şeklindedir.

$\Re_{Ac}$'nin standart ifadesi $D = \left(\sum_{\Re}\right)^{\frac{-1}{2}} \left(\Re_{Ac} - \mu_{\Re}\right)$ şeklindedir. $(\bar{X}, S)$ = $(\bar{x}, s)$ için D'nin gözlenen değeri d olsun. $(\bar{x}, s)$ verildiğinde D istatistiğinin dağılımı herhangi bir bilinmeyen parametreden bağımsızdır. Bu durumda $\|D\|^2 = \left(\Re_{Ac} - \mu_{\Re}\right)' \sum_{\Re}^{-1} \left(\Re_{Ac} - \mu_{\Re}\right)$ ifadesi herhangi bir parametreden bağımsızdır ve $H_{20} : AC = 0$ hipotezi altında $\|d\|^2$ nin gözlenen değeri herhangi bir parametreden bağımsız bilinen bir sabit olan $\mu_{\Re}' \sum_{\Re}^{-1} \mu_{\Re}$ ifadesine eşittir. Buna göre $\|D\|^2$ ye göre genelleştirilmiş p değeri aşağıdaki gibi verilebilir:

$$p = P\left(\|D\|^2 \geq \|d\|^2 \mid H_{20}\right)$$

$$= P\left(\left(\Re_{Ac} - \mu_{\Re}\right)' \sum_{\Re}^{-1} \left(\Re_{Ac} - \mu_{\Re}\right) \geq \mu_{\Re}' \sum_{\Re}^{-1} \mu_{\Re}\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\left[\bar{x}_i\left(U_i - E(U_i)\right) - s_i Z_i\right]^2}{\bar{x}_i^2 Var(U_i) + s_i^2} \right.$$

$$- \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2 \Big/ \left(\bar{x}_i^2 Var(U_i) + s_i^2\right)}$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\left[\bar{x}_i\left(U_i - E(U_i)\right) - s_i Z_i\right]\sqrt{n_i}\, s_i}{\bar{x}_i^2 Var(U_i) + s_i^2} \right)^2$$

$$\geq \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(\bar{x}_i E(U_i)\right)^2}{\bar{x}_i^2 Var(U_i) + s_i^2}$$

$$- \frac{1}{\sum_{j=1}^{k} n_j s_j^2 \Big/ \left(\bar{x}_i^2 Var(U_i) + s_i^2\right)}$$

$$\left. \times \left(\sum_{i=1}^{k} \frac{\bar{x}_i E(U_i)\sqrt{n_i}\, s_i}{\bar{x}_i^2 Var(U_i) + s_i^2} \right)^2 \right)$$

Buna göre p < α ise H_{20} red edilir.

Uygulamada genelleştirilmiş p değerini elde etmek için Monte Carlo simülasyonu da kullanılabilir. Buna göre gerekli adımlar aşağıdaki gibi verilebilir.

Verilen bir veri seti $\{x_{ij}, i = 1,2,\ldots,k;\ j = 1,2,\ldots,n_i\}$ ve $n_1, n_2, \ldots, n_k$ için,

1) $\bar{x}_i = (1/n_i)\sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}$,

   $s_i^2 = (1/n_i)\sum_{j=1}^{n_i} \left(x_{ij} - \bar{x}_i\right)^2$, i=1,2,…,k.
2) $\mu_{\Re}$ ve $\sum_{\Re}$ için, $\|d\|^2 = \mu_{\Re}' \sum_{\Re}^{-1} \mu_{\Re}$ elde edilir.
3) $U_i^2 \sim \chi^2_{n_i-1}$ ve $Z_i \sim$ N(0,1)'dir (i=1,2,…,k)
4) $\|D\|^2 = \left(\Re_{Ac} - \mu_{\Re}\right)' \sum_{\Re}^{-1} \left(\Re_{Ac} - \mu_{\Re}\right)$ elde edilir.
5) $\|D\|^2 \geq \|d\|^2$, iken R_i=1 diğer durumlarda R_i=0 olarak alınır.
6) 3-5 adımları toplam L kere tekrarlanır. Eşitlik (14)'ün testi için genelleştirilmiş p değerinin simülasyon tahmini $(1/L)\sum_{i=1}^{L} R_i$ bulunur.

3.Simülasyon Çalışması

Simülasyon çalışmasında, DK'ların eşitliğinin testi için bölüm 2'de tanıtılan düzenlenmiş DBT, ST, MOT, OOT ve GPY deneysel I. tip hata oranları ve güçleri bakımından karşılaştırılması yapılmıştır. Bu amaçla, farklı k sayıdaki normal yığından n_i $\left(i=\overline{1,k}\right)$ farklı örnek çapından veriler üretilmiştir. Testlerin I. tip hata oranları ve gücü için α=0.05 olmak üzere 5000 tekrar kullanılmıştır. Ayrıca genelleştirilmiş p değerini elde etmek için ayrıca 5000 tekrar yapılmıştır.

İlk olarak; normal dağılımın ortalaması μ_i=3, ve standart sapması σ_i =1 (dolayısıyla DK_i=1/3) (i=1,…,k) için testlerin deneysel I.tip hata oranları elde edilmiş ve Tablo1'de verilmiştir.

Tablo 1. α=0.05 iken ortalaması μ_i=3 ve standart sapması σ_i =1 (dolayısıyla DK_i=1/3) olan Normal dağılım için testlerin I. tip hata oranları

k	n	OOT	DBT	MOT	ST	GPY
2	(10,10)	0.0655	0.0545	0.0240	0.0405	0.0420
	(20,20)	0.0605	0.0525	0.0365	0.0435	0.0455
	(30,30)	0.0605	0.0560	0.0485	0.0530	0.0535
	(10,30)	0.0645	0.0485	0.0430	0.0380	0.0420
3	(10,10,10)	0.0780	0.0550	0.0295	0.0485	0.0340
	(20,20,20)	0.0635	0.0560	0.0455	0.0470	0.0440
	(30,30,30)	0.0600	0.0500	0.0425	0.0505	0.0470
	(10,20,30)	0.0690	0.0435	0.0525	0.0395	0.0370
4	(10,10,10,10)	0.0840	0.0545	0.0425	0.0550	0.0330
	(20,20,20,20)	0.0630	0.0510	0.0400	0.0545	0.0415
	(30,30,30,30)	0.0620	0.0535	0.0500	0.0510	0.0465
	(10,20,20,30)	0.0705	0.0540	0.0530	0.0520	0.0445
5	(10,10,10,10,10)	0.0925	0.0650	0.0460	0.0675	0.0350
	(20,20,20,20,20)	0.0625	0.0500	0.0425	0.0520	0.0435
	(30,30,30,30,30)	0.0585	0.0510	0.0440	0.0550	0.0450
	(10,10,20,30,30)	0.0675	0.0510	0.0590	0.0540	0.0370

k: grup sayısı; n: gruptaki gözlem sayıları; DK: gruptaki yığın değişim katsayıları; DBT: düzenlenmiş Bennett testi; ST: skor testi; MOT: merkezi olmayan t testi; OOT: olabilirlik oran testi; GPY: genelleştirilmiş p yaklaşımı

Tablo 1'den testleri genel olarak incelediğimizde OOT'nin deneysel I.tip hata oranlarının diğer testlere göre α'dan oldukça uzaklaştığı görülmektedir. Ayrıca OOT'nin k sayısının artışından olumsuz etkilenerek bu uzaklaşmanın daha da arttığı görülmektedir. DBT'nin I. tip hata oranlarının genel olarak α'ya yakın sonuçlar verdiği gözlenmiştir. Fakat k sayısı arttığında özellikle örnek çapı küçükken α'dan uzaklaştığı gözlenmiştir. MOT'nin deneysel I.tip hata oranları ise k=2,3 için n değeri küçükken α'dan uzaklaşırken, n değeri arttıkça α'ya yaklaştığı görülmektedir. k sayısı artıkça (k=4,5) bu durumun düzeldiği ve n küçükken de MOT'nin α'ya yaklaştığı görülmektedir. ST'nin deneysel I.tip hata oranlarını incelendiğimizde, k=2,3 için α'ya yakın sonuçlar verirken n farklılaştığında ise α'dan biraz uzaklaştığı görülmektedir. k sayısı arttığında ise bu durumun düzeldiği ve α'ya yaklaştığı gözlenmiştir. Ancak k sayısı arttığında n küçükken α'dan uzaklaştığı görülmektedir. GPY ise k=2 için genel olarak α'ya yakın sonuçlar vermiştir. k arttıkça ise bu durumdan olumsuz etkilenerek n küçükken ve n'ler farklı iken α'dan uzaklaştığı görülmektedir.

Testlerin gücü için normal dağılımın ortalaması μ_i =1, ve standart sapması σ_i (dolayısıyla $DK_i=\sigma_i$) (i=1,…,k) olarak alındığında testlerin güç değerleri elde edilmiş ve Tablo2'de verilmiştir.

Tablo 2. α=0.05 iken ortalaması μ_i=1 ve standart sapması σ_i (dolayısıyla DK$_i$=σ$_i$) olan Normal dağılım için testlerin güç değerleri

k	n	DK	OOT	DBT	MOT	ST	GPY
2	(10,10)	(1/3,1/5)	0.3305	0.2990	0.1760	0.2555	0.2535
	(20,20)	(1/3,1/5)	0.6020	0.5780	0.5185	0.5570	0.5555
	(30,30)	(1/3,1/5)	0.7385	0.7270	0.6970	0.7170	0.7175
	(10,30)	(1/3,1/5)	0.4345	0.4620	0.0825	0.5070	0.4895
	(10,30)	(1/5,1/3)	0.4815	0.3860	0.4765	0.1695	0.2880
3	(10,10,10)	(1/3,1/4,1/5)	0.2900	0.2415	0.1235	0.2245	0.1925
	(20,20,20)	(1/3,1/4,1/5)	0.4670	0.4410	0.3555	0.4290	0.4150
	(30,30,30)	(1/3,1/4,1/5)	0.6610	0.6420	0.5850	0.6365	0.6250
	(10,20,30)	(1/3,1/4,1/5)	0.3585	0.3725	0.1000	0.4210	0.3920
	(10,20,30)	(1/5,1/4,1/3)	0.4600	0.3765	0.4280	0.2845	0.3025
4	(10,10,10,10)	(1/3,1/4,1/4,1/5)	0.2760	0.2230	0.1025	0.2305	0.1690
	(20,20,20,20)	(1/3,1/4,1/4,1/5)	0.4420	0.4070	0.3090	0.4035	0.3725
	(30,30,30,30)	(1/3,1/4,1/4,1/5)	0.6070	0.5860	0.5270	0.5705	0.5540
	(10,20,20,30)	(1/3,1/4,1/4,1/5)	0.3415	0.3490	0.1120	0.4030	0.3615
	(10,20,20,30)	(1/5,1/4,1/4,1/3)	0.4460	0.3695	0.3775	0.3280	0.2970
5	(10,10,10,10,10)	(1/3,1/3,1/4,1/5,1/5)	0.4200	0.3440	0.1735	0.3595	0.2670
	(20,20,20,20,20)	(1/3,1/3,1/4,1/5,1/5)	0.6825	0.6500	0.5505	0.6395	0.6110
	(30,30,30,30,30)	(1/3,1/3,1/4,1/5,1/5)	0.8525	0.8345	0.7845	0.8370	0.8230
	(10,10,20,30,30)	(1/3,1/3,1/4,1/5,1/5)	0.5415	0.5640	0.1240	0.6405	0.5820
	(10,10,20,30,30)	(1/5,1/5,1/4,1/3,1/3)	0.6300	0.4980	0.6010	0.3575	0.3695

k: grup sayısı; n: gruptaki gözlem sayıları; DK: gruptaki yığın değişim katsayıları; DBT: düzenlenmiş Bennett testi; ST: skor testi; MOT: merkezi olmayan t testi; OOT: olabilirlik oran testi; GPY: genelleştirilmiş p yaklaşımı

Tablo 1'den hatırlanacağı gibi tüm durumlar için, OOT'nin deneysel I.tip hata oranları α değerinden oldukça uzaklaştığı için testin güç bakımından değerlendirilmesinde dikkate alınmamıştır. Buna göre diğer testleri güç bakımından genel olarak değerlendirildiğinde k=2,3 için örnek hacimleri eşitken DBT diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir. Daha sonra sırasıyla ST, GPY ve MOT testleri gelmektedir. Burada MOT'nin deneysel I.tip hata oranları α değerinden daha yüksek olduğu için testin gücü diğer testlere göre daha düşüktür. k=4,5 iken ve örnek hacimleri eşitken ST'nin bu durumdan olumlu etkilenerek diğer testlere göre daha yüksek güç değerine sahip olduğu gözlenmiştir. Daha sonra sırasıyla DBT, GPY ve MOT testleri gelmektedir. k sayısı fark etmeksizin örnek çapı farklıyken DK'lar arasında DK$_1$>...> DK$_i$ $\left(i=\overline{2,k}\right)$ ilişkisi varken ST diğer testlere göre daha yüksek güç değerlerine sahiptir. Daha sonra sırasıyla GPY, DBT ve MOT testleri gelmektedir. Özellikle MOT testi bu durumdan oldukça olumsuz etkilenerek diğer testlere göre oldukça düşük güç değerlerine sahip olduğu gözlenmektedir. k sayısı fark etmeksizin örnek çapı farklıyken DK'lar arasında DK$_1$<...< DK$_i$ $\left(i=\overline{2,k}\right)$ ilişkisi varken yukarıdaki testler arasındaki ilişki tam tersine dönmektedir. Yani MOT'nin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksektir. Daha sonra sırasıyla DBT, GPY ve ST gelmektedir. Sonuç olarak değerlendirdiğimizde örnek çapı eşitken ve k küçükken DBT, k büyükken ST daha yüksek güç değerine sahiptir. Örnek çapı farklıyken ise k sayısı fark etmeksizin DK'lar arasında DK$_1$>...> DK$_i$ $\left(i=\overline{2,k}\right)$ ilişkisi varsa ST, DK$_1$<...< DK$_i$ $\left(i=\overline{2,k}\right)$ ilişkisi varsa MOT daha yüksek güç değerine sahiptir.

4.Sonuç

Bu çalışmada DK'nın eşitliği testi için kullanılan testlerden DBT, ST, MOT, OOT ve GPY incelenmiştir. Ayrıca simülasyon yoluyla testler deneysel I.tip hata ve güç bakımından karşılaştırılması yapılmıştır. Simülasyon çalışmasına göre OOT'nin I.tip hata oranları α değerinden oldukça uzaklaştığı görülmektedir. Bundan dolayı testin güç değerlendirmesi dikkate alınmamıştır. Örnek çapı eşitken ve k küçükken DBT, k büyükken ST'nin güç değerleri diğer testlere göre daha yüksek olduğu gözlenmiştir. Örnek çapı farklıyken, her k değerinde DK'lar arasında DK$_1$>...> DK$_i$ $\left(i=\overline{2,k}\right)$ ilişkisi varsa MOT'un gücünün diğer testlere göre daha yüksek değerlere sahip olduğu görülmüştür. Benzer şekilde örnek çapı farklıyken, her k değerinde DK'lar arasında DK$_1$<...< DK$_i$ $\left(i=\overline{2,k}\right)$ ilişkisi varsa ST'in gücünün diğer testlere göre daha yüksek değerlere sahip olduğu görülmüştür. Özetle, örnek çapları eşit ve grup sayısı küçük iken MBT, grup sayısı arttıkça ise ST testinin kullanılması uygundur. Bununla birlikte örnek çaplarının farklı olduğu durumlardaki güç değerleri, yığın DK'ların aldığı değerlere göre değiştiğinden ve yığın DK'larının her durumuna göre MOT, ST veya DBT testlerinden biri iyi olduğundan bu üç testten birinin kullanılması uygun olacaktır.

KAYNAKLAR

Ananthakrishnan, R. and Soman, M.K., 1989. The dates of onset of the southwest monsoon over Kerala for the period 1870-1900. *Int. J. Climatol.*, 9, 321-322.

Bennett, B.M., 1976. "On approximate test for homogeneity of coefficient of varition, in Contribution to Applied Statistic ", W.J. Ziegler, ed., Birhauser Verlag, Basel and Stuttgart, , pp. 169-171.

Doornbos R. & Dijkstra J.B., 1983. " A multi sample test for the equality of coefficients of variation in normal populations", Communications in Statistics - Simulation and Computation, 12:2, 147-158.

Forkman, J. 2009. Estimator and tests for common coefficients of variation in normal distributions. Communications in Statistics: Theory and Methods 38, 233-251.

Gupta R. C. and Ma. **S**., 1996. "Testing the equality of the coefficients of varition in k normal populations", Comm. Stat. Theory Methods 25(1), pp.115-132.

Hillier FS and So KC., 1991. The effect of the coefficient of variation of operation times on the allocation of storage space in production line systems. *IIE Transactions* 23: 198-206.

Iglewicz, B., Myers, R. H., 1970. "Comparison of approximations to the percentage points of the sample coefficient of variation",Thechnometrics,12:166-169.

Liu, X., Xu, X., Zhao, J., 2011. "A new generalized p-value approach for testing equality of coefficients of variation in k normal populations", Journal of Statistical Computation and Simulation, 81(9), 1121-1130.

McKay, A. T., 1932. "Distribution of the coefficient of variation and the extended 't' distribution ", J. Roy9 Statist. Soc. 95:695-698.

Miller E.G., Karson M.J., 1977. "Testing equality of two coefficients of variation, Amer", Statistical Association: Proceedings of the Business and Economic Statistics Section, Part. I,pp. 278–283.

Rao, K. A.,Vidya, R., 1992. "On the performance of a test for coefficient of variatoin",Calcutta Statistical Association Bulletin , 42:87-95.

Shafer N. G. and Sullivan J. A., 1986. "A simulation study of a test for the equality of the coefficient of variation ", Stat. Simulation Comput. 15(3), pp. 681-695.

Silvey, S. D., 1970."Statistical Inference", Harmonds Worth:Penguin.

Lawless, J.K. 1982. "Statical Models and Methods for Lifetime Data, John Wiley & Sons, Inc., New York.

Tsui, K. and Weerahandi, S., 1989. Generalized p-Values in Significance Testing of Hypotheses in the Presence of Nuisance Parametres, Journal of the American Statistical Assocation, 84:602-607.