Süleyman Demirel Üniversitesi,

Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi,

9-2 (2005. 33-37

Filbert Matrislerinin Normları İçin Alt ve Üst Sınırlar

Bahri TÜREN[1*], E. SARIPINAR[2] ,

Süleyman Demirel Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, Isparta

[2] İl Milli Eğitim Müdürlüğü, Matematik Öğretmeni, Isparta

Özet : Bu çalışmada, Maple Matematik programı kullanılarak; Filbert matrislerinin, Frobenius normunun alt ve üst sınır değerlerini hesapladık. Keyfi bir matris için Frobenius normun alt ve üst değerleri hesaplanamamasına rağmen; Toeplitz, Hankel ve Hilbert gibi özel tip matrisler için bu değerler belirlenebilir.

Anahtar Kelimeler : Filbert matris, Spectral norm, Frobenius norm, Hadamard çarpım

The Upper and Lower Bounds For Norms of Filbert Matrices

Absract : In this paper, using Maple Mathematics Program we calculate the values of the upper and lower bounds of Frobenius norm of the Filbert matrices. Even though the values of the upper and lower bounds of the Frobenius norm of an arbitary matrix can not be calculated, they can be determined for some special types of matrices as like Toeplitz, Hankel and Hilbert.

Key Words : Filbert matrix, Spectral norm, Frobenius norm, Hadamard product

1.Giriş

Bu çalışma, Fibonacci dizisinden elde edilen Filbert matrislerin normları üzerine bir çalışmadır. 1999 yılında T.M. Richardson [8] tarafından hazırlanan 'Filbert Matrix' adlı makalede Filbert matrislerin, Hilbert ve Hankel matrislerle benzerliği ile inverslerinin bulunmasıyla ilgili bilgiler verilmiştir. Bu alanda daha çok Hilbert, Toeplitz ve Hankel matrislerin normları ile ilgili çeşitli yayınlar bulunmaktadır. R.A Horn ve C.R.Johnson [7] matrisler için spectral norm için üst sınır sayılabilecek çok önemli bir eşitsizlik tanımlanmıştır.

D. Bozkurt [1-6], Toeplitz ve Hankel matrisler ile Cauchy-Toeplitz ve Cauchy-Hankel matrislerin spectral ve ℓ_p normları için sınırlar elde etmiştir.

Biz de bu çalışmalardan yola çıkarak Filbert matrislerin spectral normu için genel bir eşitsizlik verip Filbert matrislerinin Frobenius norm değerleri için alt ve üst sınırlar belirledik.

2. Filbert Matrisleri

Bu bölümde, Filbert matrisleriyle ilgili tanımlar verilmiştir. Konunun daha iyi anlaşılabilmesi için öncelikle Filbert matrislerle benzerlik arz eden Hilbert ve Hankel matrislerin tanımlarını verelim.

Tanım 2.1. $h_{ij} = \dfrac{1}{i+j-1}$ olmak üzere $H_n = [h_{ij}]_{i,j=1}^n$ matrisine *Hilbert matrisler* denir [4]. Örneğin 3×3 tipindeki bir Hilbert matris aşağıdaki gibidir

$$H_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{bmatrix}.$$

Tanım 2.2. Elemanları $a_{ij} = (a_{i+j-1})_{i,j=1}^n$ şeklinde tanımlanan bir matrise Henkel matris denir [4].

Tanım 2.3. (f_k) bir tamsayı dizisi ve $(k \geq 0)$ olmak üzere $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, ..., $f_k = f_{k-1} + f_{k-2}$ şeklindeki diziye *Fibonacci dizisi* denir [7]. Buna göre Fibonacci dizisi

$$(f_k) = \{f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, ...\} = \{0,1,1,2,3,5,8,13,...\}$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca, 0,1,1,2,3,5,8,13,... şeklindeki sayılara *Fibonacci sayıları* denir.

Tanım 2.4. Eemanları; $f_{ij} = \dfrac{1}{f_{i+j-1}}$, $(i, j = 1,...,n)$ olan matrise *Filbert matris* denir [8].

Örnek 2.1. F_3 ,3×3 tipindeki Filbert matris ise;

[*] bturen@fef.sdu.edu.tr

$$f_{11}=\frac{1}{f_1}=1\ ,\ f_{12}=\frac{1}{f_2}=1\ ,\ f_{13}=\frac{1}{f_3}=\frac{1}{2}$$
$$f_{21}=\frac{1}{f_2}=1\ ,\ f_{22}=\frac{1}{f_3}=\frac{1}{2}\ ,\ f_{23}=\frac{1}{f_4}=\frac{1}{3}$$
$$f_{31}=\frac{1}{f_3}=\frac{1}{2}\ ,\ f_{32}=\frac{1}{f_4}=\frac{1}{3}\ ,\ f_{33}=\frac{1}{f_5}=\frac{1}{5}$$

olduğundan

$$F_3=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1/2\\ 1 & 1/2 & 1/3\\ 1/2 & 1/3 & 1/5\end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır.

3. Matris Normları

Bu bölümde matris normları verilecektir.

Tanım 3.1. F bir cisim, $M_{m,n}(F)$ de elemanları F ‘den alınan $m\times n$ tipindeki matrisler olmak üzere $\|\cdot\|: M_{m,n}(F)\to\oplus^{+}$ şeklinde tanımlanan dönüşüm aşağıdaki şartları sağlıyorsa buna bir matris normu denir ve $A\in M_{m,n}(F)$ için $\|A\|$ şeklinde gösterilir.

i) $\|A\|>0,\quad A=0\Leftrightarrow\|A\|=0$ dır,

ii) $\alpha\in F$ için $\|\alpha A\|=|\alpha|\|A\|$ dır,

iii) $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ dır,

iv) $\|AB\|\le\|A\|.\|B\|$ dır [7].

Eğer sadece (*i*), (*ii*) ve (*iii*) aksiyomları sağlanıyorsa, o zaman bu norma genelleştirilmiş matris normu denir. Eğer (*i*), (*ii*), (*iii*) ve (*iv*) aksiyomlarının hepsi sağlanıyorsa buna da matris normu adı verilir.

Tanım 3.1. ile verilen aksiyomları sağlayan bazı matris normları aşağıdaki gibi sıralanabilir;

$A=(a_{ij})_{n\times n}$ bir matris olmak üzere

1) $\|A\|_1=\max\limits_{1\le j\le n}\sum\limits_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ (*Sütun normu*)

2) $\|A\|_\infty=\max\limits_{1\le i\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ (*Satır normu*)

3) $\|A\|_F=\left(\sum\limits_{i,j=1}^{n}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ (*Frobenius normu*)

4) $\|A\|_t=n\max\limits_{1\le i,j\le n}|a_{ij}|$ (*Toplam normu*)

5) $\|A\|_2=\left(\max\limits_{1\le i\le n}\sigma_i\right)^{\frac{1}{2}}$ (*Spectral norm*)

Burada σ_i ler AA^* matrisinin özdeğerlerini gösterir.

Matris normlarında, $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2,\|\cdot\|_F$ ve $\|\cdot\|_\infty$ sırasıyla satır, spectral, Frobenius (Euclide) ve sütun normlarını göstermek üzere, A, $m\times n$ tipinde bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin normları arasında

1) $\|A\|_2\le\|A\|_F\le\sqrt{n}\|A\|_2$

2) $\|A\|_\Delta\le\|A\|_2\le\sqrt{mn}\|A\|_\Delta$, $(\|A\|_\Delta=\max|a_{ij}|)$

3) $\|A\|_2\le\sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty}$

4) $\frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty\le\|A\|_2\le\sqrt{m}\|A\|_\infty$

5) $\frac{1}{\sqrt{m}}\|A\|_1\le\|A\|_2\le\sqrt{n}\|A\|_1$

bağıntıları mevcuttur [7].

3.1. Filbert Matrislerinin Normları

Bu bölümde Filbert matrislerin bazı norm değerleri ile ilgileneceğiz. İlk olarak hesaplanması daha kolay olan satır, sütun ve maximum norm değerleri verildikten sonra spectral ve Frobenius normlara geçilerek bu normlar için sınır değerleri araştırılacaktır.

Tanım 3.1 ile verilen norm tanımı gereğince Filbert matrisler için maximum norm değerinin 1 olduğu açıktır. Çünkü herhangi bir A matrisi için maximum norm;

$$\|A\|_\Delta=\max|a_{ij}|$$

olduğundan bütün Filbert matrislerin en büyük f_{ij} elemanının 1 olduğu bilinmektedir. $n\times n$ tipindeki bir Filbert matris F_n olmak üzere satır ve sütun normları için maximum değerin 1. satır ve 1. sütun olacağı açıktır. Filbert matrisler simetrik olduklarından satır ve sütun norm değerleri eşittir.

A, $m\times n$ matris ve A^H, A matrisinin eşlenik transpozesi olmak üzere A matrisinin spectral normu;

$$\|A\|_2=\sqrt{\max_{1<i<n}\lambda_i(A^HA)}$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi de Filbert matrislerin spectral normunu incelenirken ihtiyaç duyacağımız bazı tanım ve teoremler verelim.

Tanım 3.1.1. $A=(a_{ij})$ ve $B=(b_{ij})$, $m\times n$ matrisler olsun.

$$A\circ B=(a_{ij}b_{ij})$$

şeklindeki çarpıma *Hadamard çarpımı* denir [4].

Teorem 3.1.1. $n\times n$ tipindaki herhangi bir K matrisi, f_n ve g_n, $n\times n$ tipinde matrisler olmak üzere $K=f_n\circ g_n$ olarak yazılabilir [7].

Tanım 3.1.2. Herhangi bir A matrisinin maximum euclidean sütun normu $c_j(A)$ ve maximum euclidean satır normu $r_i(A)$ ile gösterilirse;

$$c_j(A) = \max_j \sqrt{\sum_i |a_{ij}|^2}\ ,\ r_i(A) = \max_i \sqrt{\sum_j |a_{ij}|^2}$$

[7] dir.

Teorem 3.1.2. Herhangi $A,\ B \in M_{m\times n}(F)$ için;

$$\sigma_1(A \circ B) \le r_i(A) c_j(B)$$

yazılabilir [7].

İspat. Bütün $x,\ y$ birim vektörleri için,

$$\sigma_1(A \circ B) = \max\left| x^H (A \circ B) y \right|$$

olduğundan;

$$\left| x^H (A \circ B) y \right| = \left| \sum_{i,j} \overline{x_i} a_{ij} b_{ij} y_j \right|$$

$$\le \left[\sum_{i,j} |x_i a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{i,j} |b_{ij} y_j|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_i |x_i|^2 \sum_j |a_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_j |y_j|^2 \sum_i |b_{ij}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left[\sum_i |x_i|^2 r_i(A)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_j |y_j|^2 c_j(B)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left[\sum_i |x_i|^2 r_1(A)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_j |y_j|^2 c_1(B)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= r_i(A) c_j(B) \|x\|_2 \|y\|_2$$

elde edilir ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa istenen eşitsizlik bulunmuş olur [7].

$n \times n$ tipindeki F_n Filbert matrisi için;

$$\|F_n\|_2 \le r_i(f_n)\ c_j(g_n)$$

yazılabilir. Burada f_n ve g_n, Teorem 3.1.1. deki uygun matrislerdir.

Teorem 3.1.3. $n \times n$ tipindeki bir Filbert matris F_n olmak üzere

$$\frac{\pi^2}{6} \le \|F_n\|_F \le 2{,}14$$

İspat. Bu teoremin ispatını n üzerinden yapalım. Matrisin boyutu olan $n \ge 1$ doğal sayısına değerler verilirse Maple Programı ile her bir matris için aşağıdaki tablodaki Frobenius norm değerleri elde edilir. (Her bir norm için 40 basamak alınmıştır)

Boyut	Frobenius norm değerleri
n=2	1,8027756377331994646559610633735247973126
n=3	2,003053225009815414970345054073933094919
n=4	2,086051678220786085881222730194383260473
n=5	2,116623755661310182568039306402302730502
n=6	2,128434424046405389158058523833315019742
n=7	2,132923155939464736804877050061692766610
n=8	2,134640517839965895231683366408486918714
n=9	2,135296016211464170000092108980028157816
n=10	2,135546454264041919421343037139464414287
n=11	2,135642102979653763817895259215812332830
n=12	2,135678638814084549137656263454902731282
n=13	2,135692594045901232901065671356174478383
n=14	2,135697924497296093002095186176583421261
n=15	2,135699960543974401251459155721960635067
n=16	2,135700738245181004078145416989722702764
n=17	2,135701035300511362102909286148309402931
n=18	2,135701148765563326607025914420467556701
n=19	2,135701192105354566954186424757160885576
n=20	2,135701208659682017412962886697294712422
n=21	2,135701214982872398427711374543088991693
n=22	2,135701217398116212215326674403384317179
n=23	2,135701218320657257024164793617078998174
n=24	2,135701218673036580243001340504759003512
n=25	2,135701218807633504759900517864731169887
n=26	2,135701218859044955146678661868904816863
n=27	2,135701218878682381783073018260698950774
n=28	2,135701218886183211306646923048377015808
n=29	2,135701218889048273240824406795814707104
n=30	2,135701218890142629519807836426738960696
n=31	2,135701218890560636422577451313938068454
n=32	2,135701218890720300851903396013780333436
n=33	2,135701218890781287237111547317519633051
n=34	2,135701218890804581963410067803558337909
n=35	2,135701218890813479757097476512416896892
n=36	2,135701218890816878411861182392949010777
n=37	2,135701218890818176582464891294917150349
n=38	2,135701218890818672439512312125398048463
n=39	2,135701218890818861840050865714217633342
n=40	2,135701218890818934184619105650304232591
n=41	2,135701218890818961817785271869730503613
n=42	2,135701218890818972372715530591925032152
n=43	2,135701218890818976404340140539082049977
n=44	2,135701218890818977944283711658358624186
n=45	2,135701218890818978532489815069031322671
n=46	2,135701218890818978757164554181772844968
n=47	2,135701218890818978842982668109324713235
n=48	2,135701218890818978875762270779238795765
n=49	2,135701218890818978888282964861429175082
n=50	2,135701218890818978893065444438086230508
n=99	2,135701218890818978896021179366962498974811
n=100	2,135701218890818978896021179366962498974817

. -Tablo 3.1: Filbert matrislerinin boyutu ve normları

Norm değerleri arasındaki fark	
$\|F_3\| - \|F_2\|$	0,200277587277820768410734420338685121793
$\|F_4\| - \|F_3\|$	0,082998453210970670910877676120450165554

$\|F_5\|-\|F_4\|$	0,0305720774405240966868165762079194700 29
$\|F_6\|-\|F_5\|$	0,0118106683850952065900192174310122892 40
$\|F_7\|-\|F_6\|$	0,0044887318930593476468185262283777468 68
$\|F_8\|-\|F_7\|$	0,0017173619005011584268063163467941521 04
$\|F_9\|-\|F_8\|$	0,0006554983714982747684087425715412391 02
$\|F_{10}\|-\|F_9\|$	0,0002504380525777494212509281594362564 71
$\|F_{11}\|-\|F_{10}\|$	0,0000956487156118443965522220763479185 43
$\|F_{12}\|-\|F_{11}\|$	0,0000365358344307853197610042390903984 52
$\|F_{13}\|-\|F_{12}\|$	0,0000139552318166837634094079012717471 01
$\|F_{14}\|-\|F_{13}\|$	0,53304513948601010295148204089428 78 10^{-5}
$\|F_{15}\|-\|F_{14}\|$	0,20360466783082493639695453772138 06 10^{-5}
$\|F_{16}\|-\|F_{15}\|$	0,77770120660282668626126776206769 7 10^{-6}
$\|F_{17}\|-\|F_{16}\|$	0,29705533035802476386915858670016 7 10^{-6}
$\|F_{18}\|-\|F_{17}\|$	0,11346505196450411662827215815377 0 10^{-6}
$\|F_{19}\|-\|F_{18}\|$	0,43339791240347160510336693328875 10^{-7}
$\|F_{20}\|-\|F_{19}\|$	0,16554327450458776461940133826846 10^{-7}
$\|F_{21}\|-\|F_{20}\|$	0,63231903810147484878457942792 71 10^{-8}
$\|F_{22}\|-\|F_{21}\|$	0,24152438137876152998602953254 86 10^{-8}
$\|F_{23}\|-\|F_{22}\|$	0,92254104480883811921369468099 5 10^{-9}
$\|F_{24}\|-\|F_{23}\|$	0,35237932321883654688768000533 8 10^{-9}
$\|F_{25}\|-\|F_{24}\|$	0,13459692451689917735997216637 5 10^{-9}
$\|F_{26}\|-\|F_{25}\|$	0,51411450386778144004173646976 10^{-10}
$\|F_{27}\|-\|F_{26}\|$	0,19637426636394356391794133911 10^{-10}
$\|F_{28}\|-\|F_{27}\|$	0,75008295235739047876780650 34 10^{-11}
$\|F_{29}\|-\|F_{28}\|$	0,28650619341774837474376912 96 10^{-11}
$\|F_{30}\|-\|F_{29}\|$	0,10943562789834296309242535 92 10^{-11}
$\|F_{31}\|-\|F_{30}\|$	0,41800690276961488719910775 8 10^{-12}
$\|F_{32}\|-\|F_{31}\|$	0,15966442932594469984226498 2 10^{-12}
$\|F_{33}\|-\|F_{32}\|$	0,60986385208151303739299615 10^{-13}
$\|F_{34}\|-\|F_{33}\|$	0,23294726298520486038704858 10^{-13}
$\|F_{35}\|-\|F_{34}\|$	0,88977936874087088585589 83 10^{-14}
$\|F_{36}\|-\|F_{35}\|$	0,33986547637058805321138 85 10^{-14}
$\|F_{37}\|-\|F_{36}\|$	0,12981706037089019681395 72 10^{-14}
$\|F_{38}\|-\|F_{37}\|$	0,49585704742083048089811 4 10^{-15}
$\|F_{39}\|-\|F_{38}\|$	0,18940053855358881958487 9 10^{-15}
$\|F_{40}\|-\|F_{39}\|$	0,72344568239936086599249 10^{-16}
$\|F_{41}\|-\|F_{40}\|$	0,27633166166219426271022 10^{-16}

Norm değerleri arasındaki fark	
$\|F_{42}\|-\|F_{41}\|$	0,10554930258722194528539 10^{-16}
$\|F_{43}\|-\|F_{42}\|$	0,4031624609947157017825 10^{-17}
$\|F_{44}\|-\|F_{43}\|$	0,1539943571119276574209 10^{-17}
$\|F_{45}\|-\|F_{44}\|$	0,588206103410672698485 10^{-18}
$\|F_{46}\|-\|F_{45}\|$	0,224674739112741522297 10^{-18}
$\|F_{47}\|-\|F_{46}\|$	0,85818113927551868267 10^{-19}
$\|F_{48}\|-\|F_{47}\|$	0,32779602669914082530 10^{-19}
$\|F_{49}\|-\|F_{48}\|$	0,12520694082190379317 10^{-19}
$\|F_{50}\|-\|F_{49}\|$	0,4782479576657055426 10^{-20}
$\|F_{100}\|-\|F_{99}\|$	0,603794425454745349256438336247043 10^{-41}

***Tablo 3.2:** Normlar arası farklar.*

Yukarıda ki tabloda görüldüğü gibi $F_2, F_3, \ldots, F_7$ matrisleri için norm artarak 2,13… şeklinde devam etmektedir. $F_8, F_9, \ldots$ matrisleri için artık başlangıçtan itibaren bazı rakamlar hiç değişmemektedir. Yani, matrisin boyutu arttıkça değişmeyen rakam sayısı da artmaktadır.

Örneğin; $\|F_8\|_F - \|F_7\|_F$ farkı 10^{-2} den daha küçük iken $\|F_{20}\|_F - \|F_{19}\|_F$ farkı 10^{-7}, $\|F_{50}\|_F - \|F_{49}\|_F$ farkı 10^{-20}, $\|F_{100}\|_F - \|F_{99}\|_F$ farkı 10^{-41} den daha küçüktür. Dolayısıyla matrisin boyutu ne kadar büyük alınırsa alınsın norm değeri için başlangıçtaki rakamlar değişmeyecektir. O halde Filbert matrislerin Frobenius norm değerleri 2,14 sayısını geçmeyecektir. Buradan üst sınır olarak,

$$\|F_n\|_F \leq 2{,}14$$

alınabilir. $\frac{\pi^2}{6} \leq \|F_n\|_F$ olduğu açıktır. O halde;

$$\frac{\pi^2}{6} \leq \|F_n\|_F \leq 2{,}14$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Böylece ispat bitmiş olur.

4. Kaynaklar

[1] Bozkurt, D, 1996. *On The ℓ_p Norms Of Almost Cauchy-Toeplitz Matrices*, Turkish Journal of Mathematics, 20,4 , 545-552, Ankara.

[2] Bozkurt, D, Türkmen, R, 2000. *Cauchy-Toeplitz Matris-lerinin ℓ_p Normları İçin Sınırlar*, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi, 8,2, 1-6, Konya.

[3] Bozkurt, D, Solak, S, 2000. *Cauchy-Toeplitz Matrisinin ℓ_p Normu ve Cauchy-Hankel Matrislerinin Hadamard*

Çarpımının ℓ_p *Normu*, Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Dergisi, 8,2, 35-42, Konya.

[4] Bozkurt, D, Türen, B, 2002. *Lineer Cebir*, Ofset Matbacılık, Konya.

[5] Bozkurt, D, Solak, S, 2001. *On The Spectral Norms Of Cauchy-Toeplitz and Cauchy-Hankel Matrices*, Journal of Institute of Mathematics and Computer Science, 14,3, 201-206.

[6] Bozkurt, D, Solak, S, Türkmen, R, 2002. *On GCD, LCM and Hilbert matrices and their applications*, Applied Mathematics and Computation, Elsevier Science I.

[7] Horn,RA, Johnson, CR, 1991. *Topics in Matrix analysis*, Cambridge Universty Pres, 330-360.

[8] Richardson, TM, 1999. *The Filbert Matrix*, Mathematics L.A, New York..