Süleyman Demirel Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler
Fakültesi Dergisi
Y.2014, C.19, S.3, s.333-352.

Suleyman Demirel University
The Journal of Faculty of Economics
and Administrative Sciences
Y. 2014, Vol.19, No.3, pp.333-352.

ELTON-GRUBER KISITLI MARKOWİTZ KUADRATİK PROGRAMLAMA MODELİ İLE PORTFÖY OPTİMİZASYONU: BIST-50 ÜZERİNE BİR UYGULAMA

PORTFOLIO OPTIMIZATION THROUGH MARKOWITZ QUADRATIC PROGRAMMING WITH CONSTRAINTED ELTON-GRUBER: AN APPLICATION ON SEI-50 (STOCK EXCHANGE ISTANBUL)

Öğr. Gör. Ömer AKÇAYIR[1]
Arş. Gör. Buhari DOĞAN[2]
Prof. Dr. Yusuf DEMİR[3]

ÖZET

Bu çalışmada, Sharpe'ın (1964) Tek İndeks Modeli altında Elton-Gruber (1995) tarafından geliştirilen portföy seçim yöntemi ve Markowitz'in (1952) ortalama-varyans modelinin BIST-50 üzerinde uygulanabilirliğinin test edilmesi amaçlanmaktadır. Çalışmada, BIST50 endeksinde işlem gören tüm hisse senetlerinin 1 Ağustos-30 Eylül 2013 tarihlerindeki günlük kapanış verileri kullanılmıştır. Günlük kapanış verilerine bağlı olarak hesaplanan getiriler doğal logaritma ile hesaplanarak, optimizasyon işlemleri MS Office Excel çözücü eklentisi kullanılarak yapılmıştır. Yine Elton-Gruber yöntemi ile portföye dahil edilecek hisse senetleri MS Office Excel programı yardımıyla bulunmuştur. Çalışma sonunda, Elton-Gruber Yöntemi ile elde edilen risk ve getiri oranları Markowitz kuadratik programlama kısıtına uygulandığında, daha yüksek getirili, daha düşük riskli ve daha yüksek Sharpe oranlı yeni bir portföy elde edilebilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *Portföy Optimizasyonu, Elton-Gruber Modeli, Kuadratik Programlama, BIST-50.*

Jel Kodları: *G11, C61, G32.*

ABSTRACT

In this study, aimed to test the applicability of Elton-Gruber (1995) Portfolio Selection Method developed under the Single-Index Model and Mean-Variance Model of Markowitz (1952) on SEI-50 (Stock Exchange Istanbul-National 50 Index). In the study, used daily closing values of all stocks traded in SEI-50 between the date of 1 August to 30 September 2013. Returns of dialy closing datas calculate through natural logarithm and process of optimization was performed using MS Office Excel Solver plugin. Stocks that included to portfolio through Elton-Gruber Method found using MS Office Excel, either. At the end of study, When applied to constraint of Markowitz Quadratic Programming risk and return ratios that obtained through Elton-Gruber Method, could obtain a new portfolio which has higher returns, lower risk and higher Sharpe ratio.

Key Words: *Portfolio Optimization, Elton-Gruber Model, Quadratic Programming, SEI-50.*

Jel Codes: *G11, C61, G32.*

[1] Süleyman Demirel Üniversitesi, Keçiborlu Meslek Yüksekokulu, omerakcayir@sdu.edu.tr
[2] Süleyman Demirel Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İktisat Bölümü, buharidogan@sdu.edu.tr
[3] Süleyman Demirel Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, İşletme Bölümü, yusufdemir@sdu.edu.tr

1.GİRİŞ

Günümüz ekonomilerinde, tasarruf sahipleri, tasarruflarını çok daha yoğun bir şekilde sermaye piyasalarında değerlendirmektedirler. Yatırımlar ile ilgili yönlendirme uyarıları niteliğindeki bilgileri alabilmek için doğru ve güncel verilere daha kolay ulaşmanın yolu genellikle sermaye piyasalarından geçmektedir. Bununla birlikte her piyasada olduğu gibi sermaye piyasalarında da bir takım riskler mevcuttur. Rasyonel bir yatırımcı için amaç, karını maksimize etmek ve belirsizlik durumunu ya da kayıp riskini en aza indirgemektir. Bu açıdan bakıldığında, yatırımcılar açısından portföy yönetimi oldukça önem arz etmektedir. Diğer bir ifade ile, hangi menkul kıymete hangi ağırlıkta yatırım yapılacağı oldukça önemlidir.

Risk kavramının daha nesnel bir kavram olarak ifade edilmesi ile portföy yönetimi, teknikleri ve modelleri daha fazla önem kazanmıştır. Genel anlamda portföy yönetimi, yatırımcının elindeki fonları mevcut menkul kıymet alternatifleri arasından, risk ve getiri düzeylerini dikkate alarak, belirli bir risk düzeyinde maksimum getiriyi ve belirli bir getiri düzeyinde minimum riski sağlayacak şekilde yatırım seçenekleri oluşturulmasıdır. (Çetin,2007:64)

Küreselleşme ile birlikte, finansal piyasalar da küresel bir yapıya bürünmüştür. Dolayısıyla yatırımcı kavramı, ülke sınırlarını çoktan aşmış bulunmaktadır. Değişen ve gelişen piyasalarda, yatırım alternatifleri hızla çoğalmakta bu da daha karmaşık bir piyasa yapısını karşımıza çıkarmaktadır. Böyle bir piyasa ortamında, yatırım kararı almak zorlaşmakta, doğru yatırımı araştırmak ve bulmak oldukça önem kazanmaktadır. Portföy yatırımlarının yönetilmesi, ölçülmesi, risk ve getiri düzeylerine göre istenilen yatırım bileşenin seçilmesi gibi problemlerin çözümü günümüzde “Modern Portföy Teorisi” adı altında ifade edilmektedir. (Tarım ve Ulucan,2000:144)

Portföy yönetimi ile ilgili birçok farklı yaklaşım bulunmasına rağmen, bütün bunların hepsini temel olarak Geleneksel ya da Modern Portföy Teorisi adı altında toplamak mümkündür. Geleneksel Portföy Teorisinin hüküm sürdüğü 1950’li yıllara kadar, portföy yönetimi denilince, “tüm yumurtaların aynı sepete konulması” özdeyişine dayanan “yalın çeşitlendirme” akla gelmekte idi. 1952 yılında Markowitz’in “Portfolio Selection” adlı makalesi ile portföy yönetimi teorisi çağ atlayarak yerini Modern Portföy Teorisine bırakmıştır. Geleneksel portföy yaklaşımında portföy içindeki varlıkların birbiri ile ilişkisinin yönü ve şiddetine bakılmazken; Modern Portföy Teorisinde portföy varlıkları arasındaki ilişkilere göre risk ve getiriye etki edeceği öne sürülmüştür. Modern Portföy Teorisi, günümüzde halen yoğun bir şekilde kullanılmaya devam etmektedir.

Bu çalışmanın nihai amacı, modern portföy teorisi kapsamında ifade edilen, Markowitz ortalama-varyans ve Elton-Gruber portföy optimizasyon modellerinin Borsa İstanbul Ulusal 50 Endeksinde (BIST50) yer alan hisse senetleri için, seçilen tarihler arasında uygulanabilir olup olmadığının araştırılmasıdır. Bahsi geçen yöntemlerle elde edilen optimal portföylerden daha düşük riskli ve daha yüksek getirili bir portföyün varlığı araştırılarak optimizasyonun seçilen koşullarda geçerliliği test edilmeye çalışılmıştır.

Konu ile ilgili literatüre değinilerek başlanan çalışmanın devamında, geleneksel ve modern portföy teorileri ile ilgili kavramsal çerçeve açıklanmıştır. Her adımının ayrıntılı olarak açılandığı uygulama bölümünde ise, optimizasyon işlemi gerçekleştirilmiştir.

2. İLGİLİ LİTERATÜR

Markowitz'in (1952) Ortalama-Varyans (OV) portföy optimizasyon çözümü, risk ve getiri açısından optimal portföyü elde etmek adına varlık dağılımı ve çeşitlendirmesi açısından modern finans teorisinin çok önemli bir köşe taşı olmuştur. Ayrıca Markowitz Etkin Sınırı, Tobin (1958) Tek-Fon Teoremi ve Sharpe (1964) Tek İndeks Modeli de dâhil olmak üzere birçok önemli çalışmaya temel oluşturmuştur. Tobin (1958), geçerli risksiz oranda yatırım miktarını dengelemek için tek bir optimum portföy bazında uygun bir fon teoremini öne sürmüştür.

Sharpe'ın Tek İndeks Modelini kullanarak, Elton, Gruber ve Padberg (1976, 1978) optimal portföy seçimi için basit bir sıralama kriteri geliştirmişlerdir. Bu çalışmanın devamı niteliğinde diğer çalışmalar, Chen ve Brown (1983), Alexander ve Resnick (1985) girdi parametrelerinin tahmini ile ilgili olarak riskin dâhil edilmesiyle yapılmıştır. Teorik olarak OV optimizasyonuna dayanan birçok çalışma, fikirlerden gözlem verilerine kadar çok sayıda farklılık göstererek birbirinden birçok noktada farklılaşmaktadır. (Bai vd., 2010:2)

Markowitz OV optimizasyonunun matematiksel çözümü varlık sayısı artıkça karmaşıklaşarak zorlaşmaktadır. Bu nedenle çözümü kolaylaştıran yeni yöntem ve yaklaşımlar aranmaya devam etmektedir. Ledoit ve Wolf (2004), daha iyi bir tahmin için eigen-method gibi yöntemleri öne sürmüşlerdir.

Carter, Dare ve Elliott's (2002) MS Office Excel çözücü yardımıyla portföy optimizasyonu yapılabileceğini göstermişlerdir. Çalışmada Excel çözücüsü kullanmanın, belirli kısıtlar altında optimum çözümü bulmanın ve bunu öğrencilere izah edebilmenin son derece kolay ve eğlenceli bir yöntem olduğu ifade edilmiştir.

DeMiguel V. Et Al. (2009) geleneksel en küçük varyans sorunun çözümüne dayanan fakat verilen eşikten daha küçük portföy ağırlıkları vektör normu ile ek kısıtlar koyarak yeni bir çerçeve sunmuştur. Beş farklı veri setini literatürdeki on farklı strateji ile karşılaştırarak yeni portföyler oluşturmuş ve Ledoit ve Wolf (2004) 'un çalışmasından ve literatürdeki diğer stratejilerden elde edilen portföylerden daha yüksek sharpe oranına sahip portföyler elde edebilmişlerdir.

Kale, Jivendra K. (2009) Markowitz Ortalama Varyans Portföy Optimizasyonu yöntemini ve pratikliğini öğrencilere tanıtmak amacıyla, piyasa verilerini toplayarak quadratik sistemle bazı optimizasyon uygulamalarını QOS-15 paket programı ve MS Office 2007 Excel programları ile yapmıştır. Çalışmada Markowitz Portföy Optimizasyon yönteminin etkin portföyler elde etme konusunda teori ile pratik ilişkisi dikkate alındığında oldukça kullanışlı olduğu sonucuna varılmıştır.

Bodie, Kane ve Marcus (2011) basit çözücü yardımıyla uluslararası 7 varlıklı etkin portföyden meydana gelen bir uygulama yapmışlardır (Carter, Dare ve Elliott's (2002) gibi). Çalışma sonucunda tercih edilen risk oranına göre global en küçük (riskli) varyanslı etkin portföyün bulunabileceği sonucuna varılmıştır.

Livingston, L. S. (2013) çalışmasında Ortalama-Varyans Etkin Portföyü bulmak için Excelin basit eklemeler ile nasıl kullanıldığını öğrencilerine göstermeyi amaçlamıştır. Çalışmada ayrıca çözücü kullanmadan DÇARP (MMULT) fonksiyonunu kullanmanın önemine vurgu yapmıştır.

Konu ile ilgili, Türkiye'de çoğunluğu uygulamaya dönük literatür incelendiğinde, Ulucan (2002), Markowitz kuadratik programlama ile İMKB 30 endeksinde yer alan şirketler üzerinde portföy seçim modeli ile bir uygulama yapmıştır. Çalışmanın sonunda, İMKB

Ulusal 30 endeksi ile aynı getiri düzeyinde daha düşük riskli ve aynı risk düzeyinde daha yüksek getirili portföy ağırlıkları elde edilmiştir.

Küçükkocaoğlu (2002), İMKB Ulusal 30 ve Ulusal 100 Endeksi ve eşit ağırlıklı portföy seçenekleri için Markowitz Modeli'nin uygun bir model olup olmadığını araştırmıştır. Çalışmanın yapıldığı dönem için Markowitz'in Modern Portföy Teoreminin İMKB hisse senetlerine yapılacak yatırımlarda portföy oluşturmak için bireysel ve kurumsal yatırımcıların kullanılabilecekleri en iyi yöntem olduğu sonucuna varmıştır.

Atan (2004), IMKB Ulusal 100 endeksindeki şirketlerin Ocak 2003 - Aralık 2004 dönemleri arasındaki haftalık getiri değerleri kullanılarak karesel programlama yöntemi ile portföy seçim modeli uygulamalarını yapmıştır. Çalışma sonucunda, İMKB Ulusal 100 endeksi ile eşit getiri düzeyinde fakat daha düşük riskli portföy ağırlıkları ile İMKB Ulusal 100 endeksi ile eşit risk düzeyinde olan fakat daha yüksek getirili portföy elde edilmiştir.

Yalçıner, Atan ve Boztosun, (2005), Markowitz Karesel Programlama yöntemi kullanılarak İMKB Ulusal 100 Endeksinde bulunan şirketler üzerinde portföy seçimi üzerine çalışmış ve Modelin İMKB için etkin bir model olup olmadığını araştırmıştır. Çalışma sonunda İMKB Ulusal 100 endeksi getirisine eşit fakat daha az riskli portföyler elde edebilmenin mümkün olduğunu dolayısıyla modelin İMKB'de çalışılan dönem için etkin bir model olduğunu bulmuşlardır.

Çetin(2007), Markowitz kuadratik programlama yöntemini kullanarak portföy optimizasyonu yapmıştır. Uygulamada Ocak - Temmuz 2005 dönemi için İMKB-30 endeksinde işlem gören hisseler ile çalışmış ve araştırma sonucunda, Markowitz Modeli'nin portföy optimizasyonunda hem bireyler hem de kurumlar için en iyi yöntem olduğunu ifade etmiştir.

Kayalıdere ve Aktaş (2008), Markowitz'in ortalama-varyans modeli, Sharpe'ın tek indeks ve Elton-Gruber'in EGP modellerinin oluşturduğu optimum portföylerin performanslarını karşılaştırmışlardır. Çalışmada, alternatif portföy seçim modellerinde etkin portföylerin elde edilmesinde, hesaplanma tarzı, izlenen algoritma ve dolayısıyla portföye eklenecek varlık seçimi farklılık göstermiştir. Sonuç olarak, elde edilen optimum portföylerdeki varlıkların risk ve getiri bileşimleri değişmektedir. Bu durumun ise portföy performanslarının farklılaşmasına neden olduğu anlaşılmıştır.

Bozdağ, Altan ve Duman (2010), karesel programlama ve minimaks kuralına göre oluşturulan doğrusal programlama modelleri kullanılarak karşılaştırma yapmış ve yatırımcıya geçmişteki getiri değerleri kullanılarak bir portföy sepeti önerilmeye çalışmıştır. Çalışmada, portföy modeli doğrusal programlama problemi olarak oluşturulmuş ve optimal çözüm elde edilmiş ve tanımlanan portföy, belirli bir getiri düzeyinde maksimum kaybı minimum yapacak şekilde seçilmiştir. Hem Markowitz ortalama-varyans karesel programlama modeli hem de minimaks kuralına göre oluşturulan doğrusal programlama yaklaşımına göre portföy seçimi sonuçları karşılaştırılmıştır. Young'un (1998) Doğrusal programlama çözümlü minimaks portföy modeli ile karesel programlama tabanlı ortalama-varyans modelinin benzer sonuçlar verdiği iddiası test edilmiş ve performanslarının farklılaşmasına neden olduğu anlaşılmıştır. Bu iki yönteme göre de portföy seçimi yapıldığında sonuçların aynı olmadığı görülmüştür.

Bilgili ve Tuna (2010), Tek Endeks ve Markowitz Modelleri'nin İMKB'de uygulanabilirliğini test etmek amacıyla İMKB 30 endeksinde yer alan 28 adet hisse senedinin, Ocak-Aralık 2007 tarihleri arasındaki günlük kapanış fiyatlarını kullanmıştır. Araştırma sonucunda, oluşturulan portföyler karşılaştırılmış ve Tek Endeks Modelinin Markowitz Modeli'nden daha etkin olduğu görülmüştür. Ayrıca Tek Endeks Modelinin düşük riskli hisse senetlerine yatırım yapmayı hedefleyen yatırımcıların portföy alternatiflerini belirlemekte etkisiz olduğu sonucuna varılmıştır.

Kaya ve Kocadağlı (2012), Markowitz'in ortalama varyans, Sharpe'ın tek indeks ve Konno ve Yamazaki'nin ortalama mutlak sapma modellerini temel alan ve pazarın eğilimine göre beta katsayısı kısıtlarını içeren yeni bir portföy seçim prosedürü önermiştir. Çalışma neticesinde, pazarın eğilimini ve etkin portföyleri göz önünde bulundurarak portföy seçimi yapan yatırımcının, ortalama getiri hedefleyen bir yatırımcıya göre daha fazla kâr etmesinin mümkün olduğu sonucuna varılmıştır.

3. PORTFÖY TEORİLERİ

Portföy yönetimi, sahip olunan toplam menkul kıymetlerin belirli kriterler altında seçimi ve portföydeki ağırlıklarının belirlenmesi konusundaki bazı yöntem ve teknikleri içeren bir süreçtir. (Korkmaz vd., 2013:4) Portföy yönetiminin baz aldığı iki temel değişkenden birisi getiri diğeri ise risktir. Bu sebeple portföy yönetimine, portföyün getiri ve riskinin yönetilmesidir diyebiliriz. Daha genel ifadesiyle, portföy yönetimi en düşük risk ile en yüksek getiri bileşenini oluşturmak için kullanılan yöntem ve teknik çalışmalarıdır.

Portföy kavramının ortaya çıkışından bugüne dek, temel anlamda iki tür portföy yönetim anlayışı hakimdir. 1952 yılı öncesine kadar temel anlayışı "basit çeşitlendirme" olan geleneksel portföy yönetimi, yerini Markowitz'in 1952'deki yayınladığı "Portfolio Selection" adlı makalesi ile modern portföy teorisine bırakmıştır. Bu teoriler aşağıda kısaca açıklanmıştır.

3.1. Geleneksel Portföy Teorisi

Modern portföy teorisinin ortaya çıktığı 1950'li yıllara kadar yoğun olarak kullanılan ve kabul gören teori temelde "basit/yalın çeşitlendirme" kavramına dayanmaktadır. Basit çeşitlendirme, portföye girecek olan varlıkların arasındaki ilişkinin yönünü ve şiddetini dikkate almadan sadece varlık sayısının ve çeşidinin artırılması anlamında kullanılmaktadır. Daha basit ifadesiyle portföye girecek varlık sayısı ve çeşidi ne kadar artırılırsa, portföyün riski o kadar düşük olacaktır.

Teori çeşitlendirmenin önemini vurgulasa da aşırı çeşitlendirmenin, gerekli getiriyi sağlayamayan varlıklara yer verilmesi, portföy yönetiminin zorluğu, çok sayıda varlık hakkında bilgi edinmenin maliyeti artırması gibi bazı sakıncaları bulunmaktadır. (Kaya,2012:17)

Geleneksel portföy teorisinin temel dayanağı olarak kabul edilen "yalın çeşitlendirme" kavramı, çeşitlendirmenin artırılması amacıyla arzu edilen getiriyi sağlayamayan menkul kıymetlerin de portföye dâhil edilmek istenmesi ve varlık sayısı artan portföyün yönetiminin giderek güçleşmesi ile araştırma maliyetlerinin artması gibi sakıncalarından dolayı zamanla önemi yitirmeye başlamış ve yerini modern portföy teorisinin "nitelikli çeşitlendirme" kavramına bırakmıştır.

3.2. Modern Portföy Teorisi

Harry Markowitz, 1952 yılında yayımlanan "Portfolio Selection" adlı makalesinde geleneksel portföy teorisinde bahsi geçen çeşitlendirmenin eksikliklerini ortaya koymuş ve Ortalama Varyans Modeli ile modern portföy teorisinin temellerini atmıştır. Markowitz, Geleneksel Portföy Teorisinden farklı olarak portföy içindeki varlıklar arasındaki ilişkilerin yönü ve şiddetinden bahsetmiştir. (Markowitz,1952: 77-91). Portföy içindeki tüm varlıkların aynı yönde hareket etmesi halinde, varlık sayısı ne kadar artırılsa da portföy riskini düşüremeyecektir.

Ayrıca modern portföy teorisi, varlıklar arasındaki korelasyon ilişkisine ek olarak kayıtsızlık eğrileri, etkin sınır, fırsat kümesi ve optimal portföy seçimi gibi konuları da içeren daha kapsamlı bir yaklaşımdır. Teoride iki ya da daha çok varlıktan oluşan portföylerin riskinin ve getirisinin ölçümü, mevcut yatırım altenatifleri arasında optimal portföylerin tespiti konularına da matematiksel çözüm yöntemleri getirilmiştir. (Korkmaz vd., 2013:95)

Markowitz modern portföy teorisi ile üç önemli yaklaşım kazandırmıştır.

1. Portföyün riski ($\sigma^2(r_p)$), portföyü oluşturan varlıkların ($\sigma^2(r_i)$) riskinden daha küçük olabilir.

$$\sigma^2(r_p) \leq \sum \sigma^2(r_i)$$

2. "Üstünlük İlkesi" olarak da özetlenebilecek ikinci katkı, rasyonel bir yatırımcı aynı getiriyi sağlayan iki portföyden daha az riskli olanı, aynı risk düzeyindeki iki portföyden ise daha yüksek getirili portföyü tercih ederler.
   Yani, A ve B portföyleri için;
   $E(R_A) = E(R_B)$ ve $\sigma^2(r_A) \leq \sigma^2(r_B)$ durumunda, A portföyü
   $E(R_A) \leq E(R_B)$ ve $\sigma^2(r_A) = \sigma^2(r_B)$ durumunda, B portföyü tercih edilir.

3. Etkin sınır kuadratik programlama yoluyla elde edilebilir.

Markowitz "n" adet varlığı içeren bir portföyün getiri ($E(R_p)$) ve riskini ($\sigma^2(r_p)$) aşağıdaki şekilde hesaplamıştır.

3.3. Tek İndeks Modeli

$E(R_p) = W^T E(r),$: Portföyün Beklenen Getirisi

W=$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_{n-1} \\ w_n \end{bmatrix}$: Varlık Ağırlıkları Sütun Vektörü E(r)=$\begin{bmatrix} E(r_1) \\ E(r_2) \\ E(r_3) \\ \vdots \\ E(r_{n-1}) \\ E(r_n) \end{bmatrix}$:Beklenen Getiri Sütun Vektörü

$$Q = \begin{bmatrix} Var(j,j) & Cov(j,k) & \cdots & Cov(j,n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(n,j) & ... & \cdots & Var\,(n,n) \end{bmatrix}$$: Kovaryans Matrisi

$$\sigma^2(r_p) = W^T Q W = [w_1 \quad w_2 \quad w_3 \quad ... \quad w_n] \begin{bmatrix} Var(j,j) & Cov(j,k) & \cdots & Cov(j,n) \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ Cov(n,j) & ... & \cdots & Var\,(n,n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix}$$

Kuadratik Programlama

$$\min \sigma^2(r_p) = W^T Q W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \geq E(r_p)$$

$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, \quad w_i \geq 0$ ve i= $1,2, \dots n$

Sharpe (1964) tarafından geliştirilen model, hisse senetlerinin getirilerinin hepsinin ortak ilişkisi olan pazar endeksine bağlanması yani tek faktöre bağlama varsayımı sebebiyle tek indeks modeli olarak adlandırılmaktadır. Bu modelde her bir hisse senedinin getirisi aşağıdaki regresyon (bağlanım) doğrusu ile hesaplanmaktadır. Modern Portföy Teorisinden farklı olarak, hisse senetlerinin getirilerinin arasındaki korelasyon katsayısı yerine her bir hisse senedinin pazar indeksi ile olan ilişkisin gösteren beta katsayıları kullanılmaktadır.

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \varepsilon_i, \quad i=1,2,\ldots,n$$

R_i: i'nci hisse senedinin getirisi
R_m: Pazarın Getirisi
α_i: Pazar hareketi yokken i'nci hisse senedinin getirisi
β_i: i'nci hisse senedinin beta katsayısı
ε_i: Hata terimi

Sharpe (1964)'ın tek indeks modeline, Elton ve Gruber (1995) portföy seçim yöntemi geliştirerek çok önemli katkılarda bulunmuştur. Yöntemde performanslarına göre sıralanan hisse senetlerinin, betaya göre fazla getirilerini veren aşağıdaki indeksten yararlanılmaktadır (Kaya ve Kocadağlı, 2012:25-16):

Her bir hisse senedi için;

Sharpe oranı $S_r = \frac{\overline{R_i}-R_f}{\beta_i}$ oranı ve $C_j = \frac{\sigma^2{}_m \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(\overline{R_i}-R_f)\cdot\beta_i}{\sigma^2{}_{e_i}}}{1+\sigma^2{}_m \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i^2}{\sigma^2{}_{e_i}}}$ değerleri hesaplanır.

$\sigma^2{}_m$:Pazar Endeksinin Varyansı
$\sigma^2{}_{e_i}$:Sistematik Olmayan Risk
R_f :Risksiz Faiz Oranı
β_i :Beta Katsayısı

Hesaplanan C_j değerleri ile S_r oranları kıyaslanır $\frac{\overline{R_i}-R_f}{\beta_i}$ ve değeri C_j'den büyük olan hisse senetleri portföye dâhil edilir. Portföye dâhil edilen son hisse senedinin C_j değeri C* kesim noktası kabul edilir. Hesaplanan C^* kesim noktası sonrası seçilen hisse senetlerin portföy içindeki ağırlıklarını (w_i) hesaplamak amacıyla, Z_i değerleri bulunmaktadır. $Z_i = \frac{\beta_i}{\sigma^2{}_{e_i}}\left(\frac{\overline{R_i}-R_f}{\beta_i} - C^*\right)$ ve $w_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i}$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1, i = 1,2,\ldots n$ denklemi yardımıyla seçilen hisse senetlerinin portföy içindeki ağırlıkları belirlenir.

Portföyün Beklenen Getirisi: $\mu = E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} w_i . R_i$

Portföyün Riski: $\sigma_p = \sqrt{[\sigma^2{}_m . (\sum_{i=1}^{n} w_i . \beta_i)^2] + [\sum_{i=1}^{n} w_i{}^2 . \sigma^2{}_i]}$

Böylelikle en düşük riske ve en yüksek getiriye sahip portföyler ve ağırlıkları bulunur ve nihayetinde portföyün risk ve getirisi hesaplanmış olur. (Kaya ve Kocadağlı, 2012:25-16)

4. UYGULAMA

4.1. Veri Seti

Çalışmada, Borsa İstanbul (BIST) Ulusal 50 İndeksinde [BIST50] işlem gören 50 adet hisse senedinin (Tablo 1) 01 Ağustos 2013-30 Eylül 2013 tarihleri arasındaki 39 işlem günü günlük kapanış fiyatları kullanılmıştır. Çalışmada öncelikle Tek İndeks Modeli altında geliştirilen Elton-Gruber portföy seçim yöntemine göre portföy oluşturulduktan sonra, Markowitz yöntemine göre farklı risk ve ölçütler altında portföyler oluşturulmuştur. Yapılan çözümlerin tüm işlem basamakları Microsoft Office 2013'de Excel Programında çözücü eklentisi ve veri çözümleme araçları yardımıyla yapılmıştır. Yapılan uygulamaların ayrıntılı işlem sırası aşağıda verilmiştir.

Tablo 1: BIST 50 Ulusal Endeksinde İşlem Gören Hisse Senetleri

	KOD	ŞİRKET ADI		KOD	ŞİRKET ADI
1	AEFES	ANADOLU EFES	26	ISCTR	İŞ BANKASI (C)
2	AKBNK	AKBANK	27	KCHOL	KOÇ HOLDİNG
3	AKENR	AK ENERJİ	28	KONYA	KONYA ÇİMENTO
4	AKFEN	AKFEN HOLDİNG	29	KOZAA	KOZA MADENCİLİK
5	AKSA	AKSA	30	KOZAL	KOZA ALTIN
6	AKSEN	AKSA ENERJİ	31	KRDMD	KARDEMİR (D)
7	ARCLK	ARÇELİK	32	MGROS	MİGROS TİCARET
8	ASELS	ASELSAN	33	NETAS	NETAŞ TELEKOM.
9	ASYAB	ASYA KATILIM BANKASI	34	NTHOL	NET HOLDİNG
10	AYGAZ	AYGAZ	35	OTKAR	OTOKAR
11	BAGFS	BAGFAŞ	36	PETKM	PETKİM
12	BIMAS	BİM MAĞAZALAR	37	SAHOL	SABANCI HOLDİNG
13	CCOLA	COCA COLA İÇECEK	38	SISE	ŞİŞE CAM
14	DOHOL	DOĞAN HOLDİNG	39	SNGYO	SİNPAŞ GMYO
15	DYHOL	DOĞAN YAYIN HOL.	40	TAVHL	TAV HAVALİMANLARI
16	ECILC	ECZACIBAŞI İLAÇ	41	TCELL	TURKCELL
17	EKGYO	EMLAK KONUT GMYO	42	THYAO	TÜRK HAVA YOLLARI
18	ENKAI	ENKA İNŞAAT	43	TKFEN	TEKFEN HOLDİNG
19	EREGL	EREĞLİ DEMİR CELİK	44	TOASO	TOFAŞ OTO. FAB.
20	FROTO	FORD OTOSAN	45	TRKCM	TRAKYA CAM
21	GARAN	GARANTİ BANKASI	46	TTKOM	TÜRK TELEKOM
22	GUBRF	GÜBRE FABRİK.	47	TTRAK	TÜRK TRAKTÖR
23	HALKB	T. HALK BANKASI	48	TUPRS	TÜPRAŞ
24	IHLAS	İHLAS HOLDİNG	49	VAKBN	VAKIFLAR BANKASI
25	IPEKE	İPEK DOĞAL ENERJİ	50	YKBNK	YAPI VE KREDİ BANK.

4.2. Getiri ve Ortalama Getiri

Bilindiği gibi hisse senetlerinde getiri (R_i) ve ortalama getirileri (μ) aşağıdaki gibi hesaplanmaktadır. i hisse senedine ait getiri bir önceki güne göre;

$R_i = \frac{P_{x'incigün} - P_{(x-1)'incigün}}{P_{(x-1)'incigün}}$ ……..(1) ya da

$R_i = ln(P_{x'incigün}) - ln(P_{(x-1)'incigün})$ ……..(2) ya da eşiti olan

$R_i = \frac{ln(P_{x'incigün})}{ln(P_{(x-1)'incigün})}$ ………(3) şeklinde hesaplanır.

Burada;

R_i= (Return$_i$) = i hisse senedinin x'inci gündeki getirisi

P_x= (Price$_x$) i hisse senedinin x günündeki fiyatı

P_{x-1}=(Price$_{x-1}$) i hisse senedinin x gününden bir önceki günkü fiyatı

Her üç durumda da birbirine yakın ya da eşit değerler çıksa da (2) ve (3) denklemleri hisse senedi getiri hesaplama da daha hassas sonuçlar vermektedir. Hisse senedi fiyatlarının değerinde önemsenmeyen küçük değişiklikler toplamda ciddi hata payları ortaya çıkarmaktadır. Bu sebeple çalışma da günlük getiriler fiyatların doğal logaritması (ln) alınarak hesaplanmıştır.

Getirilerin 38 günlük ortalaması

$$\mu = E(R_i) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} R_{it} \;\ldots\ldots..(4)$$

$$\mu = E(R_i) = Ortalama\ Getiri\ (= Beklenen\ Getiri)$$

formülü ile bulunmaktadır.

4.3. Menkul Kıymetlerin Varyansı ve Standart Sapması

Finans literatüründe risk, genel anlamda beklenen sonuçlarla elde edilen sonuçlar arasındaki sapma olarak ifade edilmektedir. Beklenen sonuç için geçmiş verilere bakılarak bir tahminde bulunulur. Tahmin için en çok kullanılan değişken ise "ortalama" olmaktadır.(Bolak,2004:20) BIST50 Endeksinin ve Endeks içindeki her bir hisse senedi için Excel veri çözümleme yardımıyla ortalamadan sapmasını bulmak için varyans ve standart sapmaları bulunur.

Varyans

$$\sigma^2{}_{Ri} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(R_{it} - E(R_i))^2 \;\ldots\ldots..(6)$$

Standart Sapma (Risk)

$$\sigma_{Ri} = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(R_{it} - E(R_i))^2 \;\ldots\ldots..(5)}$$

4.4. Kovaryans Matrisi ve Beta Katsayısı

Menkul kıymetlerin sistematik riske karşı tepkisini ölçen bir risk göstergesi olarak, hisse senetlerinin pazar indeksi (BİST50) ile ilişkisini ortaya koymak amacıyla beta katsayıları hesaplanır. (Bolak, 2004:26)

Beta Katsayısını bulmak amacıyla öncelikle her bir hisse senedinin pazar portföyü (BİST50) ile kovaryansı $Cov(R_{i,}R_m)$ bulunur. Her bir hisse senedi için bulunan $Cov(R_{i,}R_m)$ değeri pazar portföyünün varyansına bölünerek beta katsayıları hesaplanır.

Kovaryans

$$Cov(i,k) = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(R_{it} - E(R_i).\ (R_{kt} - E(R_k) \;\ldots\ldots..(7)$$

Beta Katsayısı

$$\beta_i = \frac{Cov(R_{i,}R_m)}{\sigma^2(R_m)} \;\ldots\ldots..(8)$$

4.5. Elton-Gruber Portföy Seçim Yöntemi

Tek İndeks Modeli altında Teorik bilgileri verilen, Elton-Gruber (1995) portföy seçim yöntemi gereği olarak her bir hisse senedi için Sharpe oranı olarak bilinen

$\mathrm{S}_r = \frac{\overline{R_\iota} - R_f}{\beta_i}$……(9) oranı ve $\mathrm{C}_j = \frac{\sigma^2{}_m \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{(\overline{R_\iota} - R_f) \cdot \beta_i}{\sigma^2{}_{e_i}}}{1 + \sigma^2{}_m \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i^2}{\sigma^2{}_{e_i}}} \ldots \ldots \ldots (10)$ Oranları bulunur.

$\sigma^2{}_m$ =Pazar Endeksinin Varyansı

$\sigma^2{}_{e_i}$ =Sistematik Olmayan Risk

Hesaplanan C_j değerleri ile S_r oranları kıyaslanır. [$\frac{\overline{R_\iota} - R_f}{\beta_i} = \frac{\overline{R_\iota}}{\beta_i}$] (Çalışmada risksiz faiz oranı (R_f)=0 olarak kabul edilmiştir.[4]) ve değeri C_j'den büyük olan hisse senetleri portföye dâhil edilir. Portföye dâhil edilen son hisse senedinin C_j değeri C* kesim noktası kabul edilir.

Hesaplanan C* kesim noktası sonrası seçilen hisse senetlerin portföy içindeki ağırlıklarını (x_i) hesaplamak amacıyla, Z_i değerleri bulunur.

$$\mathrm{Z}_i = \frac{\beta_i}{\sigma^2{}_{e_i}} \left(\frac{\overline{R_\iota} - R_f}{\beta_i} - C^* \right) \ldots\ldots..(11)$$

$$\mathrm{x}_i = \frac{Z_i}{\sum_{i=1}^{n} Z_i} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ldots \ldots \ldots (13)$ denklemleri yardımıyla seçilen hisse senetlerinin portföy içindeki ağırlıkları belirlenir.

4.6. Portföy Risk ve Getirisi

Portföye alınacak hisse senetlerinin ağırlıkları bilindiği için, Elton-Gruber portföy seçim yöntemine göre elde edilen hisse senetlerinin beklenen getirisi ve riski aşağıdaki formüllerle hesaplanmaktadır. (Korkmaz vd.,2013 :112 ,Kaya ve Kocadağlı, 2012: 26)

Portföyün Beklenen Getirisi: $\mu = E(R_p) = \sum_{i=1}^{N} x_i . R_i \ldots \ldots .. (14)$

Portföyün Riski (Standart Sapması) : $\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} (R_{it} - E(R_i))^2}$

Ya da daha basit hesaplanabilir ifadesiyle

$\sigma_p = \sqrt{[\sigma^2{}_m . (\sum_{i=1}^{n} x_i . \beta_i)^2] + [\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 . \sigma^2{}_i]}$ ……………(15) şeklinde yazılabilir.

Bu adıma kadar Elton-Gruber portföy seçim yöntemine göre etkin portföyü oluşturan hisse senetleri ve portföy içindeki ağırlıkları bulunmuştur. Sonucunda, portföyün beklenen getirisi ve riski hesaplanmıştır (Tablo 2). Bu adımdan sonra ilk olarak markowitz kuadratik programlama yardımıyla seçmiş olduğumuz kısıtlar altında etkin portföyler elde edilecek daha sonrasında Elton-Gruber'a göre elde edilen risk ve getiri değerleri kısıtı altında etkin portföyler elde edilecektir.

[4] Esasen finans piyasalarında riskin 0 (sıfır) olması diye bir durum yoktur. Burada kasıt riskin matematiksel olarak sıfıra yakınsamasıdır. Finans literatüründe bu oran genellikle devlet tahvillerinin faiz oranı olarak kabul edilmektedir. Bu yaklaşım, devletin kolay kolay iflas etmeyeceği ve borcunu zamanında tam olarak geri ödeyebileceği varsayımına dayanmaktadır.

Tablo 2: Elton-Gruber Yöntemi İle Elde Edilen Portföy Bilgileri

Hisse Senedi	μ=E(R_i)	σ	β_i	$S_r = \frac{\mu}{\beta_i}$	C_j	Z_i	X_i	
KOZAA	0,7118%	3,2354%	0,478081	0,014889	0,001297	6,418798	10009,45	**Portföyün Ort.Getirisi**
IPEKE	0,7803%	4,5492%	0,958535	0,00814	0,002326	3,3838	5276,688	**0,5028%**
TAVHL	0,3462%	3,6199%	0,46814	0,007394	0,002598	2,343611	3654,619	**Portföy Riski**
ENKAI	0,3085%	1,8703%	0,461984	0,006677	0,003266	7,716344	12032,84	**1,856%**
ECILC	0,4033%	1,3944%	0,65176	0,006188	0,003461	17,94619	27985,23	**Sharpe Oranı**
EREGL(C*)	0,7113%	1,8938%	1,249024	0,005695	0,004917	16,9275	26396,7	**27,0833%**

4.7. Markowitz Kuadratik Programlama Yöntemi İle Portföy Seçimi

Markowitz Kuadratik Programlama Modeli ile portföy oluşturmak için ilk olarak 50 adet hisse senedinin 38 günlük getiri verileri seçilerek MS Excel veri çözümleme aracılığıyla 50x50'lik kovaryans kare matrisi oluşturulmuştur. Herbir hisse senedi için ortalama getiri(μ), risk (σ) ve Sharpe Oranı (S_r =μ/ σ) dikey sütunlarda hesaplanır. Oluşturulan matrisler yardımıyla hisse senedinin ağırlıklarına göre getiri ve riskler hesaplanabilmektedir. Kuadratik Programlama formülleri gereği;

$$\min \sigma^2(r_p) = W^T Q W = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} w_i w_j \sigma_{ij} \ ve$$

$\sum_{i=1}^{n} w_i E(r_i) \geq E(r_p)$, $\quad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, $\quad w_i \geq 0 \quad$ i= $1,2,\ldots n$

50 farklı hisse senedinin her birine eşit oranda yatırım yapıldığı takdirde gerekli satır veya sütunlar seçilerek portföyün;

Getirisi =DÇARP(DEVRİK_DÖNÜŞÜM(I58:I107);$B$54:$B$103)

- I58:I107 Sütunu= Portföy Ağırlıkları
- $B$54:$B$103 Sütunu= Hisse Senetlerini Ortalama Getirileri

Riski =KAREKÖK(DÇARP(DÇARP(DEVRİK_DÖNÜŞÜM(I58:I107);$B$2:$AY$51);I58:I107))

- I58:I107 Sütunu= Portföy Ağırlıkları
- $B$2:$AY$51 Satırı= Kovaryans Değerleri

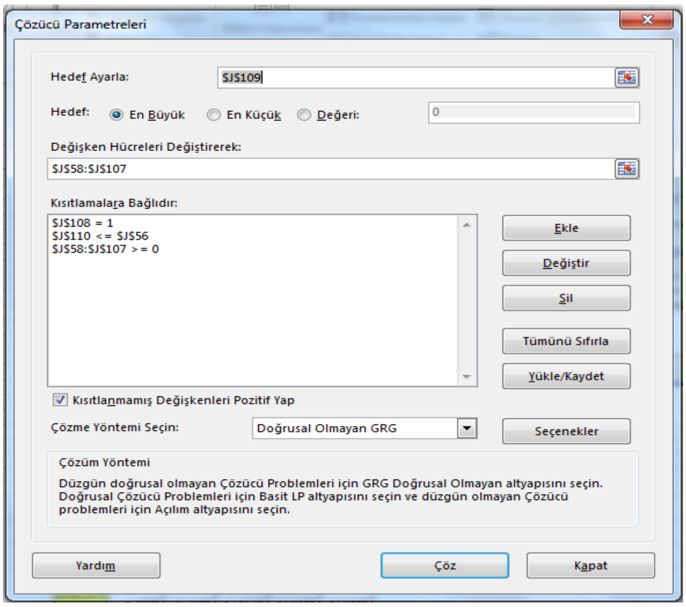
Sharpe Oranı = Getiri/Risk,

şeklinde MS Excel işlemleri yardımı ile bulunabilmektedir.

4.8. Maksimum Getirili Portföy Optimizasyonu

Yukarıda hesaplanan risk, getiri ve Sharpe Oranı eşit ağırlıklı portföy için hesaplanmıştır. Bu adımda, MS Excel çözücü eklentisi yardımıyla mümkün olan en düşük riskli ve en yüksek getirili portföy seçimi için optimizasyon yapılmaktadır. Şekil 1'de görüldüğü gibi hedef, değişken hücreler ve kısıtlar seçildiğinde, seçilen kısıtlar altında optimal portföy seçimi yapılmakta, hisse senetleri ve ağırlıkları otomatik olarak hesaplanmaktadır.

Şekil 1: Maksimum Getirili Portföy Optimizasyonu İçin Hedef ve Kısıtların MS Excel Çözücü Eklentisine Girilmesi



- **Hedef Hücre:** Amacımız getiriyi maksimize etmek olduğu için hedef hücre olarak getiri hücresi seçilir.
- **Değişen Hücreler:** Değişen hücreler olarak 50 adet hisse senedinin portföy ağırlığını gösteren sütunun tamamı seçilir.
- **Kısıt 1:** Portföy ağırlıkları toplamının %100 olması için $J$108=1kısıtı seçilir.
- **Kısıt 2:** Portföy riskinin hisse senetleri içinden en düşük riskli hisse senedi ile aynı ya da daha az riskli olması için $J$110 <= $J$56 kısıtı seçilir.
- **Kısıt 3:** Bütün ağırlıkların pozitif değere sahip olması için $J$58:$J$107>=0 kısıtı seçilir. (Ya da "Kısıtlanmış Değişkenleri Pozitif Yap" kutucuğu işaretlenebilir.)

Bu kısıtlar altında çözüm yapıldığında portföye giren hisse senetleri ve ağırlıkları, portföyün riski, portföyün getirisi ve dolayısıyla Sharpe Oranı hesaplanmış olacaktır.

4.9. Minumun Riskli Portföy Optimizasyonu

Maksimum getirili portföy optimizasyonunda, risk minumun iken getiri maksimize edilmeye çalışılmış idi. Şimdiki adımda ise, getiri maksimum iken riski minimize eden optimum portföy araştırılacaktır. Benzer şekilde hedef, değişken hücreler ve kısıtlar seçildiğinde, seçilen kısıtlar altında optimal portföy seçimi yapılmakta, hisse senetleri ve ağırlıkları otomatik olarak hesaplanmaktadır.

- **Hedef Hücre:** Amacımız riski minimize etmek olduğu için hedef hücre olarak riskin sonucunu gösteren hücre seçilmektedir.
- **Değişen Hücreler:** Değişen hücreler olarak 50 adet hisse senedinin portföy ağırlığını gösteren sütunun tamamı seçilir.
- **Kısıt 1:** Portföy ağırlıklarının toplamının %100 olması için $K$108=1kısıtı seçilir.
- **Kısıt 2:** Portföy riskinin hisse senetleri içinden en yüksek getirili hisse senedi ile aynı ya da daha yüksek getirili olması için $K$109 >= $K$56 kısıtı seçilir.

- **Kısıt 3:** Bütün ağırlıkların pozitif değere sahip olması için $K$58:$K$107>=0 kısıtı seçilir. (Ya da "Kısıtlanmış Değişkenleri Pozitif Yap" kutucuğu işaretlenebilir.)

4.10. Maksimum Sharpe Oranlı Portföy Optimizasyonu

Çalışmanın bu aşamasında ise, Sharpe Oranının ($S_r = \mu / \sigma$) maksimize edilmesi amaçlanmaktadır. Benzer şekilde hedef, değişken hücreler ve kısıtlar seçildiğinde, seçilen kısıtlar altında optimal portföy seçimi yapılmakta, hisse senetleri ve ağırlıkları otomatik olarak hesaplanmaktadır.

- **Hedef Hücre:** Amacımız Sharpe Oranını ($S_r = \mu / \sigma$) maksimize etmek olduğu için hedef hücre olarak Sharpe Oranı seçilir.
- **Değişen Hücreler:** Değişen hücreler olarak 50 adet hisse senedinin portföy ağırlığını gösteren sütunun tamamı seçilir.
- **Kısıt 1:** Portföy ağırlıklarının toplamının %100 olması için $M$108=1kısıtı seçilir.
- **Kısıt 2:** Bütün ağırlıkların pozitif değere sahip olması için $M$58:$M$107>=0 kısıtı seçilir. (Ya da "Kısıtlanmış Değişkenleri Pozitif Yap" kutucuğu işaretlenebilir.)

Tablo 3: Markowitz Kuadratik Programlama İle Elde Edilen Portföyler

Portföy	Portföy 1		Portföy 2		Portföy 3		Portföy 4	
Açıklama	Eşit Ağırlıklı		Maksimum Getiri Kısıtı		Minumum Risk Kısıtı		Maksimum Sharpe Oranı Kısıtı	
Portföye Dahil Edilen Hisse Senetleri ve Ağırlıkları	His.Sen.	w_i	His.Sen.	w_i	His.Sen.	w_i	His.Sen.	w_i
	AEFES	2 %	ECILC	40,138%	IPEKE	100%	ECILC	44,008%
	AKBNK	2 %	EREGL	34,463%			EREGL	51,829%
	…	….	IHLAS	23,298%			IPEKE	2,909%
	YKBNK	2 %	KOZAL	2,101%			KOZAL	1,254%
His.Sen. Sayısı	50		4		1		4	
$\sum w_i$	100%		100%		100%		100%	
Ort.Gün. Get. (μ)	0,027%		0,364%		0,780%		0,574%	
Risk (σ)	1,925%		1,020%		4,549%		1,334%	
Sharpe Oranı ($S_r = \mu / \sigma$)	1,408%		35,704%		17,152%		43,044%	

4.11. Elton-Gruber Getiri Kısıtlı Portföy Optimizasyonu

Bu adımda Elton-Gruber portföy seçim yöntemi ile elde ettiğimiz portföyün riskine (%1.856) eşit, fakat daha yüksek getiri sağlayan bir portföyün var olup olmadığı araştırılacaktır. Önceki adımlarda yapıldığı gibi hedef, değişken hücreler ve kısıtlar altında optimal portföy seçimi yapılmakta, hisse senetleri ve ağırlıkları otomatik olarak hesaplanmaktadır. (Tablo 4, Portföy 6)

- **Hedef Hücre:** Amacımız getiriyi maksimize etmek olduğu için hedef hücre olarak getiri seçilir.
- **Değişen Hücreler:** Değişen hücreler olarak 50 adet hisse senedinin portföy ağırlığını gösteren sütunun tamamı seçilir.
- **Kısıt 1:** Portföy ağırlıklarının toplamının %100 olması için $M$108=1kısıtı seçilir.

- **Kısıt 2:** Portföy riskinin Elton-Gruber Yöntemiyle elde ettiğimiz portföy riskine eşit olduğu kısıtı seçilir.
- **Kısıt 3:** Bütün ağırlıkların pozitif değere sahip olması için $M$58:$M$107>=0 kısıtı seçilir. (Ya da "Kısıtlanmış Değişkenleri Pozitif Yap" kutucuğu işaretlenebilir.)

4.12. Elton-Gruber Risk Kısıtlı Portföy Optimizasyonu

Bu adımda ise, Elton-Gruber portföy seçim yöntemi ile elde ettiğimiz portföyün getirisine (%0.5028) eşit, fakat daha düşük riskli bir portföyün var olup olmadığı araştırılacaktır. Yine hedef, değişken hücreler ve kısıtlar altında optimal portföy seçimi yapılmakta, hisse senetleri ve ağırlıkları otomatik olarak hesaplanmaktadır. (Tablo 4, Portföy 7)

- **Hedef Hücre:** Amacımız riski minimize etmek olduğu için hedef hücre olarak risk seçilir.
- **Değişen Hücreler:** Değişen hücreler olarak 50 adet hisse senedinin portföy ağırlığını gösteren sütununun tamamı seçilir.
- **Kısıt 1:** Portföy ağırlıklarının toplamının %100 olması için $N$108=1kısıtı seçilir.
- **Kısıt 2:** Portföy getirisi Elton-Gruber portföy seçim yöntemiyle elde ettiğimiz portföy getirisine eşit olduğu kısıtı seçilir.
- **Kısıt 3:** Bütün ağırlıkların pozitif değere sahip olması için $N$58:$N$107>=0 kısıtı seçilir. (Ya da "Kısıtlanmış Değişkenleri Pozitif Yap" kutucuğu işaretlenebilir.)

Tablo 4 : Markowitz Kuadratik Programlama ve Elton-Gruber İle Elde Edilen Portföyler

Portföy	**Portföy 5**		**Portföy 6**		**Portföy 7**	
Açıklama	**Cj Değerleri**		**Risk=%1,8564**		**Getiri=0,005028**	
Portföye Dahil Edilen Hisse Senetleri ve Ağırlıkları	**His.Sen.**	**w_i**	**His.Sen.**	**w_i**	**His.Sen.**	**w_i**
	KOZAA	28,070%	IPEKE	100%	AEFES	3,099%
	IPEKE	9,201%			DOHOL	3,203%
	TAVHL	5,455%			ECILC	8,201%
	ENKAI	14,324%			EREGL	7,106%
	ECILC	26,261%			IHLAS	57,276%
	EREGL (C*)	16,689%			NTHOL	18,720%
					TCELL	2,394%
Hisse Senedi Sayısı	6		1		7	
$\sum w_i$	100%		100%		100%	
Ortalama Günlük Getiri(μ)	0,503%		0,780%		0,503%	
Risk (σ)	1,8564%		1,8564%		0,7320%	
Sharpe Oranı (S_r =μ/ σ)	27,0833%		42,0328%		68,6867%	

4.13. En Düşük Riskli 2 Hisse Senedinden Oluşan Portföy ve Etkin Sınır Grafiği

Uygulamanın bu son aşamasında, riski en düşük iki hisse senedi ile getirisi en yüksek iki hisse senedinin, farklı ağırlıklarıyla oluşturulan portföylerin, etkin birer portföy olup olmadığı ve etkin sınır grafiğinin teorisine uygun olup olmadığının araştırılması amaçlanmıştır. En düşük riskli iki hisse senedi ile oluşturulan iki varlıklı bir portföyün riski, getirisi ve değişen ağırlık oranları altında etkin sınırı belirlenmiştir. Bunun için öncelikle her bir hisse senedi için hesaplanan standart sapmalara (risklere) bakarak en düşük riskli iki hisse senedinin IHLAS ve TCELL olduğu belirlenmiştir.

Modern portföy teorisinde Markowitz, iki hisse senedinden oluşan portföyün getirisinin $\boldsymbol{R_p = w_1.r_1 + w_2.r_2}$ formülü ile, riskinin ise

$\sigma_p^2 = w_1^2.\sigma_1^2 + w_2^2.\sigma_2^2 + 2.w_1.w_2 \ .\sigma_1.\sigma_2.\rho_{1,2}$ formülü ile hesaplanacağını ortaya koymuştur. (Korkmaz vd., 2013:102) Formüller gereği, öncelikle bu iki hisse senedinin günlük getirileri seçilerek aralarındaki ilişkinin yönü ve şiddetini belirlemek için kovaryans ve korelasyon katsayıları belirlenir. Yapılan işlemler sonrasında bu iki hisse senedinin değişik ağırlıklarıyla oluşturulan portföylerin risk ve getirilerinin Tablo 5 ‘teki gibi, etkin sınır grafiğinin ise Grafik 1'deki gibi olduğu görülmektedir.

Tablo 5: En Düşük Riskli 2 Hisse Senedinden Oluşan Portföy

Ağırlıklar		Risk (Standard Sapma) =KAREKÖK(G4^2*$C$43+ H4^2*$D$43+ 2*G4*H4*$C$47*$C$44*$D$44)	Toplam Getiri =G4*$C$42+H4*$D$42	Ortalama Getiri
IHLAS	TCELL			
0%	100%	1,6053%	5,6200%	0,1479%
1%	99%	1,5905%	5,4768%	0,1441%
2%	98%	1,5757%	5,3336%	0,1404%
3%	97%	1,5610%	5,1904%	0,1366%
…	…	…	…	…
…	…	…	…	…
98%	2%	1,0038%	-8,4136%	-0,2214%
99%	1%	1,0117%	-8,5568%	-0,2252%
100%	0%	1,0199%	-8,7000%	-0,2289%

Grafik 1: En Düşük Riskli 2 Hisse Senedinden Oluşan Portföyün Etkin Sınır Grafiği

Benzer şekilde, en yüksek getirili iki hisse senedi ile oluşturulan iki varlıklı bir portföyün riski, getirisi ve değişen ağırlık oranları altında etkin sınırı belirlenmiştir. Bunun için öncelikle her bir hisse senedi için hesaplanan getirilerine bakarak en yüksek getirili iki hisse senedinin İPEKE ve KOZAA olduğu bilinmektedir. Yapılan işlemler sonrasında bu iki hisse senedinin değişik ağırlıklarıyla oluşturulan portföylerin risk ve getirilerinin Tablo 6‘teki gibi, etkin sınır grafiğinin ise Grafik 2'deki gibi olduğu görülmektedir.

Tablo 6 : En Yüksek Getirili 2 Hisse Senedinden Oluşan Portföy

Ağırlıklar		Risk (Std.Spma) =KAREKÖK(G4^2*$C$43+ H4^2*$D$43+ 2*G4*H4*$C$47*$C$44*$D$44)	Toplam Getiri =G4*$C$42+H4*$D$42	Ortalama Getiri
IPEKE	KOZAA			
0%	100%	3,235%	27,7600%	0,7305%
1%	99%	3,235%	27,7867%	0,7312%
2%	98%	3,234%	27,8134%	0,7319%
…	…	…	…	…
98%	2%	4,503%	30,3766%	0,7994%
99%	1%	4,526%	30,4033%	0,8001%
100%	0%	4,549%	30,4300%	0,8008%

Grafik 2: En Yüksek Getirili 2 Hisse Senedinden Oluşan Portföyün Etkin Sınır Grafiği

Son olarak en yüksek getirili iki hisse senedinden oluşturulmuş bir portföy (portföy 8) ve en düşük riskli iki hisse senedinden oluşturulmuş başka bir portföyün (portföy 9) durumları incelenmeye çalışılmıştır. Beklenen duruma paralel olarak sadece risk ya da sadece getiri temel alınarak oluşturulmuş bir portföyde risk-getiri dengesi anlamında sonuç istenen düzeyde olmamıştır (Tablo 7).

Tablo 7: İki Varlıklı Portföyler

Portföy	**Portföy 8**		**Portföy 9**	
Açıklama	**En Yüksek Getirili İki Hisse Senedi**		**En Düşük Riskli İki Hisse Senedi**	
Portföye Dahil Edilen Hisse Senetleri ve Ağırlıkları	**Hisse Senedi Adı**	**Portföydeki Ağırlığı**	**Hisse Senedi Adı**	**Portföydeki Ağırlığı**
	KOZAA	99%	İHLAS	99%
	IPEKE	1%	TCELL	1%
Hisse Senedi Sayısı	2		2	
Portöy Ağırlıklar Toplamı	100%		100%	
Ortalama Günlük Getiri(μ)	0,8001%		-0,2252%	
Risk (σ)	4,526%		1,0117%	
Sharpe Oranı (S_r =μ/ σ)	17,6779%		-22,2596%	

5. DEĞERLENDİRME

Bu çalışmada, portföy seçim problemlerine farklı çözüm alternatifleri sunan Markowitz'in (1952) ortalama-varyans yöntemi ve Sharpe'ın (1964) tek indeks modeli için Elton ve Gruber (1995) optimizasyon yöntemi ile optimal portföyler oluşturulması amaçlanmıştır. Portföy optimasyonu için Borsa İstanbul Ulusal 50 Endeksinde (BIST50) işlem gören tüm hisse senetlerinin 2 Ağustos-30 Eylül 2013 tarihleri arasındaki (39 işlem günü) günlük kapanış verileri kullanılmıştır. Verilerin işlenmesi ve sonuçlara ulaşılması, çalışmada uygulama başlığı altında ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

İlk olarak, Elton-Gruber yöntemine göre C_j değerleri bulunmuş ve C^* kesim noktası olan "EREGL" hisse senedi ile birlikte portföye alınacak 6(altı) hisse senedi (KOZAA, IPEKE, TAVHL, ENKAI, ECILC, EREGL) ve portföy içindeki ağırlıkları belirlenmiştir. Elde edilen portföyün ortalama getirisi %0,5028, riski %1,856 ve birim risk başına düşen getiri oranı olarak ifade edebileceğimiz Sharpe oranı %27,0833 bulunmuştur.(Portföy5, Tablo:2)

Daha sonra Markowitz (1952) kuadratik programlama yöntemi ile elde edilen eşit ağırlıklı portföyün ortalama getirisi %0,027, riski %1,925 ve sharpe oranı %1,408 olarak bulunmuştur. (Portföy 1, Tablo: 3) "Portföy 1"de elde edilen sonuçları MS Office Excel çözücü eklentisi yardımıyla, en yüksek getiriyi elde etmek amacıyla, portföy riskinin hisse senetleri içindeki en düşük riskli hisse senedi ile aynı ya da daha az riskli bir sonuç optimize edilmiştir. "Portföy 2" olarak bilgileri verilen 4 (dört) varlıklı yeni portföyün riski %1,020 olup daha düşük iken, %0,364 bulunan getirisi daha yüksektir. Dolayısıyla Sharpe Oranı %35,704 gibi daha makul bir değerde görünmektedir. Benzer şekilde kısıtlar uygulanarak minimum risk kısıtlı tek varlıklı "Portföy 3" ve maksimum Sharpe oranı kısıtlı dört varlıklı "portföy 4" elde edilmiştir. (Tablo 3)

Elton-Gruber yöntemi ile elde edilen "Portföy 5"de elde edilen risk ve getiri değerleri Markowitz'in kuadratik programlamasında bir kısıt olarak eklenerek denenmiştir. Riski "Portföy 5"in riskine eşit olan maksimum getirili bir optimal portföy arandığında "Portföy 3", riski ve getirisi birebir aynı olan tek varlıklı portföy elde edilmiştir. Buradan elde edilebilecek en yüksek getirili portföyün tek varlıklı "Portföy 3" olduğu "Portföy 6"nın varlığı ile de bir kez daha teyit edilmiştir.

Yine, "Portföy 5"de elde edilen getiri değeri Markowitz'in kuadratik programlamasında bir kısıt olarak eklenerek bir kez daha denenmiştir. Getirisi "Portföy 5"in getirisine eşit olan minumum riskli bir optimal portföy arandığında, sonuç farklı olmuştur. Zira elde edilen yedi varlıklı "Portföy 7" nin getirisi %0,503 , riski ise bulduğumuz en düşük riskten bile daha düşük %0,7320 olarak bulunmuştur. Dolayısıyla en yüksek Sharpe oranı olan %68,6867 değeri bu yöntemle elde edilmiş bulunmaktadır. Başka bir ifade ile birim riske düşen, en yüksek getiri burada elde edilmiş bulunmaktadır.

Elde edilen sonuçlar incelendiğinde, Elton-Gruber yönteminden elde edilen portföyün risk ve getiri değerleri kısıt olarak Markowitz kuadratik programlama yöntemine uygulandığında, varlık sayısı, riski, getirisi ve Sharpe oranı tamamen farklı yeni ve daha etkin olan bir "Portföy 7" elde edilmiştir. İki yöntemin birleşimi niteliğindeki "portföy 7", her iki yönteme göre elde edilen portföylerden daha az riskli ve daha yüksek Sharpe oranlı etkin bir portföy olarak karşımıza çıkmaktadır.

Riski daha düşük, getirisi daha yüksek bir portföy elde edebilmek amacıyla, BIST50 Endeksinde işlem gören hisse senetleri içinden önce en düşük riskli iki hisse senedinden, sonra en yüksek getirili iki hisse senedinden oluşan portföylerin riski, getirisi ve Sharpe oranlarında bakılmıştır. İki varlıklı portföylerin her ikisinin de yeterince etkin birer portföy oldukları söylenememektedir. “Portföy 7” nin getirisi %0,503, riski ise %0,7320 olarak bulunmuş iken, iki varlıklı portföylerin ikisinde de bu risk-getiri bileşimini elde etmek hiçbir şekilde mümkün olmamaktadır. (Tablo 5 ve Tablo 6)

En yüksek getirili iki hisse senedinden oluşan portföyde en yüksek getiriyi elde etmek mümkün iken, portföy riskinin oldukça yükseklerde kaldığı görülmektedir. En düşük riskli iki hisse senedinden oluşan portföyde ise, “portföy 7” kadar olmasa da düşük bir risk değerini elde etmek mümkün iken, portföy getirisinin oldukça düşük kaldığı görülmektedir. Buradan anlaşılmaktadır ki, en düşük riskli ya da en yüksek getirili hisse senetlerinden oluşturulan portföyün hem riskini minumum yapmak, hem getirisini maksimum yapmak pek mümkün görünmemektedir. Bu açıdan bakıldığında kullanılan optimizasyon yöntemleri bu konuda oldukça başarılıdır. (Tablo 7)

“Portföy 3” ve “Portföy 6” sadece getiri baz alındığında tercih sebebi olabilir. Fakat rasyonel bir yatırımcı için getiri ne kadar önemli ise risk de o kadar önemlidir. Şayet risk önemsiz olsaydı bugün portföy teorilerinden bahsetmek mümkün olmazdı. Elde edilen bütün portföyler incelendiğinde, en iyi risk-getiri bileşenini “portföy 7” oluşturmaktadır. Birim riske düşen getiri oranı olarak ifade edebileceğimiz Sharpe oranı en yüksek olan portföy yine “portföy 7” olarak karşımıza çıkmaktadır.

Tablo 8: Etkin Portföyler

En Etkin Portföy	Portföy	Getirisi	Riski	Sharpe Oranı	His.Sen. Sayısı
Maksimum Getiriye Göre	Portföy 3 Portföy 6	**0,780%**	4,549%	17,152%	1
Minumum Riske Göre	Portföy 7	0,503%	**0,732%**	68,687%	7
Maksimum Sharpe Oranına Göre	Portföy 7	0,503%	0,732%	**68,687%**	7

6. SONUÇ

Sonuç olarak, yukarıda değerlendirme kısmında detaylı şekilde anlatıldığı üzere çalışmada farklı yöntem ve tekniklerle ikisi aynı olmak üzere dokuz portföy elde edilmiştir. Elton-Gruber portföy seçim yöntemi ile elde edilen risk ve getiri değerleri Markowitz kuadratik programlama yöntemi için bir kısıt olarak eklendiğinde, portföylerin içinde daha etkin (riski en düşük getirisi en yüksek) bir portföy olarak, risk ve getiri bileşeni diğerlerine benzemeyen yeni bir portföy elde edilmiştir.

Küçükkocaoğlu (2002), Yalçıner vd.(2005),Çetin (2007), Bilgili ve Tuna (2010), Kaya ve Kocadağlı’nın (2012) elde ettikleri sonuçlar Markowitz Yönteminin optimum portföy elde etmek için etkin bir yöntem olduğunu ortaya koymaktadır. Bu çalışmada elde edilen sonuçlara göre ise, Markowitz yöntemi etkin bir portföy seçim yöntemidir fakat tek başına en etkin yöntem olduğu söylenememektedir. Elton-Gruber portföy seçim yöntemi ile elde edilen risk ve getiri kısıtı ile Markowitz portföy seçim yöntemi daha etkin bir portföy seçim yöntemi olarak karşımıza çıkmaktadır.

KAYNAKÇA

ALEXANDER, G.J., ve RESNİCK, B.G. (1985). "More On Estimation Risk And Simple Rules For Optimal Portfolio Selection", Journal of Finance, 40(1): 125-133.

ATAN, M. (2004). "Karesel Programlama İle Portföy Optimizasyonu", www.ekonometridernegi.org/bildiriler/o8s3.pdf, 11.12.2013

BAİ, Z., LİU, H. ve WONG, W.-K. (2010). "Making Markowitz's Portfolio Optimization Theory Practically Useful" Available at SSRN:http://ssrn.com/abstract=900972

BİLGİLİ, E. ve TUNA, G. (2010). "Markowitz Ve Tek Endeks Modellerinin Uygulanması: İmkb 30 Endeksi Üzerinde Karşılaştırmalı Analiz", Süleyman Demirel Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 15(3): 1-18.

BODİE, Z., KANE, A. ve MARCUS, A.J. (2011). "Investments", 9th ed., McGraw-Hill/Irwin, New York, N.Y.

BOLAK, A. (2004). "Risk ve Yönetimi", Birsen Yayınevi, İstanbul

BOZDAĞ, N., ALTAN, Ş. ve DUMAN, S. (2010). "Minimaks Portföy Modeli ile Markowitz Ortalama Varyans Portföy Modelinin Karşılaştırılması", http://www. ekonometridernegi.org/bildiriler/o24s1.pdf,.

CARTER, D.A., DARE, W.H. ve ELLIOTT, W.B. (2002). "Determination of Mean-Variance Efficient Portfolios Using an Electronic Spreadsheet," Journal of Financial Education, vol. 28(3, Fall/Winter), p. 63-78.

CHEN, S.-N. ve STEPHEN, J.B. (1983). "Estimation Risk And Simple Rules For Optimal Portfolio Selection, Journal Of Finance", 38(4) 1087-1093.

ÇETİN, A. (2007). "Markowitz Kuadratik Programlama İle Optimal Portföy Seçimi" Süleyman Demirel Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi Dergisi, 12(1): 73-81.

DEMİGUEL, V. ve diğ. (2009). "A Generalized Approach To Portfolio Optimization: Improving Performance By Constraining Portfolio Norms", Management Science 55(5): 798-812.

ELTON, E.J., GRUBER, M.J., ve PADBERG, M.W. (1976). "Simple Criteria For Optimal Portfolio Selection", Journal of Finance, 31(5): 1341-1357.

ELTON, E.J., GRUBER, M.J., ve PADBERG, M.W. (1978). "Simple Criteria For Optimal Portfolio Selection: Tracing Out The Efficient Frontier", Journal of Finance, 33(1): 296-302.

ELTON, E.J. ve GRUBER, M.J. (1995). "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis", Wiley, New York.

http://www.iif.com.tr/index.php/iif/article/view/iif.2005.232.4348

KALE, J.K. (2009). "Portfolio Optimization Using The Quadratic Optimization System And Publicly Available Information On The WWW" , St Mary's College of California, Moraga, California, USA Managerial Finance, 35(5): 439-450

KAYA, C. ve KOCADAĞLI, O. (2012). "Etkin Sınır Ve Beta Katsayı Kısıtlı Portföy Seçim Modeli Üzerine Bir Uygulama" İstanbul Ticaret Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 11(22): 19-35

KAYA, C. (2012). “Doğrusal Olmayan Programlama İle Portföy Analizi”, Mimar Sinan Güzel Sanatlar Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Anabilim Dalı, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul.

KAYALIDERE, K. ve AKTAŞ, H. (2008). “Alternatif Portföy Seçim Modellerinin Performanslarının Karşılaştırılması (İMKB Örneği)”, DEÜ SBE Dergisi, 10(1): 290-312.

KORKMAZ, T., AYDIN, N. ve SAYILGAN, G. (2013). “Portföy Yönetimi”, Anadolu Üniversitesi Yayını No: 2852, Açıköğretim Fakültesi Yayını No: 1809

KÜÇÜKKOCAOĞLU, G. (2002). “Optimal Portföyün Seçimi ve İMKB Ulusal-30 Endeksi Üzerine bir Uygulama”, Active-Bankacılık ve Finans Dergisi 26, Eylül- Ekim.

LEDOİT, O. ve WOLF, M. (2004). “A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices” Journal of Multivariate Analysis, 88(2): 365-411.

LİVİNGSTON, L.S. (2013). “Adding Markowitz And Sharpe To Portfolio Investment Projects Business Four Horsemen Investments And University Of Puget Sound”, Education & Accreditation , 5(2).

MARKOWİTZ, H. (1952). “Portfolio Selection”, The Journal of Finance, 7(1).

SHARPE, F.W. (1964). “Capital Asset Prices, A Theory of Market, Equilibrium Under Conditions of Risk”, The Journal of Finance, 19: 425-442.

TARIM, A. ve ULUCAN, A. (2000). “Markowitz Kuadratik Programlama Portföy Seçim Modeli İçin Planlama Ufkunun Ampirik Olarak Belirlenmesi: İstanbul Menkul Kıymetler Borsası Uygulaması”, Ankara Üniversitesi, SBF Dergisi, 55(2).

TOBİN, J. (1958). “Liquidity Preference As Behavior Towards Risk, Review Of Economic Studies”, 25: 65-86.

ULUCAN, A. (2002). “Markowitz Kuadratik Programlama İle Portföy Seçim Modelinin Sermaye Piyasasında Endeks İle Aynı Risk- Getiri Yapısına Sahip Portföyün Elde Edilmesinde Kullanımı”, Hacettepe Üniversitesi, İ.İ.B.F. Dergisi, 20(2): 141-153. http://www.iibfdergi.hacettepe.edu.tr/2002_2.htm

YALÇINER, K., ATAN, M. ve BOZTOSUN, D. (2005). “Karesel Programlama Yönteminin İMKB 100 Endeksine Uygulanması ve Portföy Optimizasyonu”, İktisat, İşletme ve Finans Dergisi, Temmuz.