

BULANIK VERİ ZARFLAMA ANALİZİ MODELLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI* : SINIRLANDIRILMIŞ VERİLER İÇİN

COMPARISON OF FUZZY DATA ENVELOPMENT ANALYSIS MODELS: FOR INTERVAL DATA

Dr. Kenan Oğuzhan ORUÇ**
Prof.Dr. İbrahim GÜNGÖR***

ÖZET

Bu çalışmada; sınırlandırılmış bulanık girdi-çıkıtı verilerine sahip işletmelerin göreceli etkinliğinin ölçülmesinde kullanılan bulanık veri zarflama analizi (BVZA) modellerinden 7 tanesi incelenerek örneklerle karşılaştırmalı analizi yapılmıştır.

ABSTRACT

In this study; 7 of the fuzzy data envelopment analysis models, which are used to measure the relative efficiency of the enterprises having interval fuzzy input-output data, examined and compared with examples.

Sınırlandırılmış Veri, Bulanık Kümeler, Veri Zarflama Analizi
Interval Data, Fuzzy Sets, Data Envelopment Analysis

1. GİRİŞ

VZA, birden çok girdi kullanılarak birden çok çıktının üretildiği durumlarda işletmelerin (karar verme birimleri-KVB) göreceli etkinliğini ölçmeyi amaçlayan parametresiz bir etkinlik ölçme yöntemidir.¹

Veri tabanlı bir yöntem olan VZA ile etkinlik analizi yapılabilmesi için verilerin kesin değerlerinin bilinmesi gerekmektedir. Fakat birçok uygulamada girdi-çıkıtlar tam ve doğru olarak elde edilememekte, belirsizlik

* Bu makale *Veri Zarflama Analizi İle Bulanık Ortamda Etkinlik Ölçümleri ve Üniversitelerde Bir Uygulama* adlı doktora tezinden hazırlanmıştır.

** Süleyman Demirel Üniversitesi, Strateji Geliştirme Daire Başkanlığı

*** Akdeniz Üniversitesi Alanya İşletme Fakültesi

¹ M. SOLEIMANI-DAMANEH, G.R. JAHANSHALOO, S. ABBASBANDY, "Computational and theoretical pitfalls in some current performance measurement techniques; and a new approach", *Applied Mathematics and Computation*, Vol: 181, (2006), s.1199.

içermektedir. Verilerin belirsiz olduğu durumlarda etkinlik ölçümlerinin yapılabilmesi için ise bulanık kümeler kullanılarak BVZA modelleri geliştirilmiştir.

Bulanık VZA [Girdiye yönelik CCR (Charnes, Cooper ve Rhodes)] modeli genel olarak aşağıdaki gibi ifade edilebilir:²

$$E_o = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{io}}$$

Kısıtlar,

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{io}} \leq 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ij}} \leq 1$$

$$j=1,2,\dots,n \quad j \neq o$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon$$

$$r=1,2,\dots,s$$

$$i=1,2,\dots,m$$

Burada,

- n : KVB sayısı j=1,2,\dots,n
s : Çıktı sayısı r=1,2,\dots,s
m : Girdi sayısı i=1,2,\dots,m
 u_r : o. KVB tarafından r. çıktıya verilen ağırlık değeri
 v_i : o. KVB tarafından i. girdiye verilen ağırlık değeri
 x_{io} : o. KVB'nin kullandığı i. bulanık girdi miktarı
 y_{ro} : o. KVB'nin elde ettiği r. bulanık çıktı miktarı
 x_{ij} : j. KVB'nin kullandığı i. bulanık girdi miktarı
 y_{rj} : j. KVB'nin elde ettiği r. bulanık çıktı miktarı

BVZA modellerinde veriler:

1. Sınırlandırılmış veriler (Alt ve üst sınır değerlerinin ya da üyelik fonksiyonunun bilindiği bulanık sayı verileri)
2. Sıralı veriler (KVB'lerin; herhangi i. girdi ya da r. çıktı verileri arasındaki büyük-küçük-eşit ya da çok önemli-önemli-önemsiz gibi sözel sıralı ilişkinin bilindiği veriler)
3. Hiçbir şekilde elde edilememiş veriler
4. Kesin değerleri bilinen veriler

olmak üzere 4 sınıfa ayrılmıştır.

² Chinag KAO ve Shiang Tai LIU, "Fuzzy Efficiency Measures in Data Envelopment Analysis", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol: 113, (2000), s.431.

Bu çalışmada sınırlandırılmış ve kesin değeri bilinen veriler için önerilmiş olan 7 model incelenerek örnekler ile karşılaştırması yapılmıştır. Tüm modeller girdiye yönelik CCR modeli olarak kurulmuştur.

2. SINIRLANDIRILMIŞ VERİLER İÇİN ÖNERİLEN BVZA MODELLERİ

2.1. Kao-Liu Modeli³

α -kesim yöntemi ve genişleme ilkesi kullanılarak bulanık VZA'nın geleneksel VZA'ya çevrilmesi üzerine kurulmuştur.

\tilde{X}_{ij} ve \tilde{Y}_{rj} girdi-çıkıtlı verilerinin α -kesimleri alınarak, herhangi $\mu \geq \alpha$ üyelik derecesindeki alt ve üst sınırları:

$$(\tilde{X}_{ij})_{\alpha} = [(\tilde{X}_{ij})_{\alpha}^L, (\tilde{X}_{ij})_{\alpha}^U] \quad (\tilde{Y}_{rj})_{\alpha} = [(\tilde{Y}_{rj})_{\alpha}^L, (\tilde{Y}_{rj})_{\alpha}^U]$$

şeklinde ifade edilebilir.

VZA modelleri girdi ve çıktı verilerinin bir fonksiyonu olduğu için genişleme ilkesine göre o. KVB'nin etkinlik değerinin üyelik fonksiyonu:

$$\mu_{\tilde{E}_o}(z) = \sup_{x,y} \min \{ \mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj}), \forall i, j, r \mid z = E_o(x, y) \} \text{ olur.}$$

o. KVB'nin etkinlik değerinin üyelik fonksiyonunu oluşturmak için $\mu_{\tilde{E}_o}(z) = \alpha$ 'nın oluşturulması yani $\min [\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}), \mu_{\tilde{Y}_{rj}}(y_{rj})] = \alpha$ eşitliğinin sağlanması gerekmektedir ve girdi-çıkıtlı verilerinin herhangi bir α kesimindeki verilerinin kullanılması ile elde edilecek etkinlik değeri $(E_o)_{\alpha}$ olacaktır. Buradan, herhangi bir α kesimindeki etkinlik değerinin alt ve üst sınırları için:

$$(E_o)_{\alpha}^L = \min_{\substack{(\tilde{X}_{ij})_{\alpha}^L \leq x_{ij} \leq (\tilde{X}_{ij})_{\alpha}^U \\ (\tilde{Y}_{rj})_{\alpha}^L \leq y_{rj} \leq (\tilde{Y}_{rj})_{\alpha}^U \\ \forall i, j, r}} \left\{ \begin{array}{l} E_o = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \\ \text{Kısıtla, } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \end{array} \right.$$

$$(E_o)_{\alpha}^U = \max_{\substack{(\tilde{X}_{ij})_{\alpha}^L \leq x_{ij} \leq (\tilde{X}_{ij})_{\alpha}^U \\ (\tilde{Y}_{rj})_{\alpha}^L \leq y_{rj} \leq (\tilde{Y}_{rj})_{\alpha}^U \\ \forall i, j, r}} \left\{ \begin{array}{l} E_o = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{io}} \\ \text{Kısıtla, } \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1 \end{array} \right.$$

³ Chinag KAO ve Shiang Tai LIU, s.427-437.

yazılabilir. o. KVB'nin herhangi bir α kesimindeki etkinlik değerinin alt sınırı; o. KVB'nin aynı α kesimindeki, çıktı verisinin minimumunun girdi verisinin maksimumunun ve diğer KVB'lerin çıktı verilerinin maksimumunun girdi verilerinin minimumunun alınması ile mümkündür. Buradan:

$$(E_o)_\alpha^L = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{ro})_\alpha^L}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{io})_\alpha^U}$$

Kısıtlar,

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{ro})_\alpha^L}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{io})_\alpha^U} \leq 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{rj})_\alpha^U}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{ij})_\alpha^L} \leq 1 \quad j=1,2,\dots,n \quad j \neq 0$$

$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m \quad \text{olurken,}$

o. KVB'nin etkinlik değerinin üst sınırı aşağıdaki gibi olur:

$$(E_o)_\alpha^U = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{ro})_\alpha^U}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{io})_\alpha^L}$$

Kısıtlar,

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{ro})_\alpha^U}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{io})_\alpha^L} \leq 1$$

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{rj})_\alpha^L}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{ij})_\alpha^U} \leq 1 \quad j=1,2,\dots,n \quad j \neq 0$$

$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m \quad \text{olur}$

2.2. Saati-Memariani-Jahanshahloo Modeli⁴

Bulanık girdi ve çıktı verilerinin üçgen üyelik fonksiyonuna sahip olduğu veriler için geliştirilmiş 2 aşamalı bir modeldir.

⁴ S. SAATI – A. MEMARIANI ve G.R. JAHANSHAHLOO, "Efficiency Analysis and Ranking of DMUs with Fuzzy Data", **Fuzzy Optimization and Decision Making**, Vol: 1, (2002), s.255-267.

1. Aşama:

Üçgen üyelik fonksiyonuna sahip girdiler $\tilde{X}_{ij} = (x_{ij}^L, x_{ij}^M, x_{ij}^U)$ ve çıktılar $\tilde{Y}_{ij} = (y_{ij}^L, y_{ij}^M, y_{ij}^U)$ için α -kesim kümeleri:

$$\mu_{\tilde{X}_{ij}}(x_{ij}) \geq \alpha = \begin{cases} \frac{x_{ij} - x_{ij}^L}{x_{ij}^M - x_{ij}^L} \geq \alpha \\ \frac{x_{ij}^U - x_{ij}}{x_{ij}^U - x_{ij}^M} \geq \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^L \leq x_{ij} \leq \alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^U$$

$$\mu_{\tilde{Y}_{ij}}(y_{ij}) \geq \alpha = \begin{cases} \frac{y_{ij} - y_{ij}^L}{y_{ij}^M - y_{ij}^L} \geq \alpha \\ \frac{y_{ij}^U - y_{ij}}{y_{ij}^U - y_{ij}^M} \geq \alpha \end{cases} \Rightarrow \alpha y_{ij}^M + (1-\alpha)y_{ij}^L \leq y_{ij} \leq \alpha y_{ij}^M + (1-\alpha)y_{ij}^U$$

ve \tilde{X}_{ij} ve \tilde{Y}_{ij} 'nin alt ve üst sınırlarının α kesimi ile ifadesi:

$$\tilde{X}_{ij} = [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^L, \alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^U]$$

$$\tilde{Y}_{ij} = [\alpha y_{ij}^M + (1-\alpha)y_{ij}^L, \alpha y_{ij}^M + (1-\alpha)y_{ij}^U] \quad \text{olur.}$$

Buradan, o. KVB için model aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$(E_o)_\alpha = \max \sum_{r=1}^s u_r y_{ro}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i=1}^m v_i x_{io} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^L \leq x_{ij} \leq \alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^U \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\alpha y_{ij}^M + (1-\alpha)y_{ij}^L \leq y_{ij} \leq \alpha y_{ij}^M + (1-\alpha)y_{ij}^U \quad r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m$$

2. Aşama:

Hem girdi-çıkıtı miktarları hem de girdi ve çıktılara verilecek ağırlıklar bilinmediği için doğrusal olmayan VZA modeli, $\bar{y}_{ij} = u_r y_{ij}$ ve $\bar{x}_{ij} = v_i x_{ij}$ tanımlamaları ile değişken dönüşümleri yapılarak doğrusal VZA modeline çevrilebilir:

$$(E_o)_\alpha = \max \sum_{r=1}^s \bar{y}_{ro}$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i=1}^m \bar{x}_{io} = 1$$

$$\sum_{r=1}^s \bar{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$v_i [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^L] \leq \bar{x}_{ij} \leq v_i [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^U]$$

$$u_r [\alpha y_{ij}^M + (1-\alpha)y_{ij}^L] \leq \bar{y}_{ij} \leq u_r [\alpha y_{ij}^M + (1-\alpha)y_{ij}^U]$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m \quad \text{olur.}$$

Model amaç fonksiyonunu maksimize etmek için herhangi bir α kesiminde $[\bar{y}_{r0} = u_r(y_{r0})_\alpha^U, \bar{x}_{i0} = v_i(x_{i0})_\alpha^L]$ ve $[\bar{y}_{rj} = u_r(y_{rj})_\alpha^L, \bar{x}_{ij} = v_i(x_{ij})_\alpha^U, j \neq 0]$ değerlerine ulaşılmasına izin vermektedir. Bu sebeple bu model ile bulunacak etkinlik değeri, Kao-Liu modeli ile bulunacak $(E_o)_\alpha^U$ değeri ile aynı olacaktır.

2.3. Saati-Memariani Modeli⁵

VZA, her KVB'ye girdi ve çıktıları ağırlıklandırmada esneklik tanıyarak, KVB'lerin kendi etkinlik değerini maksimize edecek şekilde ağırlıklarını seçmesine olanak sağlayan bir modeldir. Bununla birlikte ağırlık seçmedeki bu esneklik aynı veri seti kullanılmasına rağmen, bazen çok farklı ağırlık değerlerinin verilmesine sebep olmaktadır. Saati ve Memariani ağırlıklardaki bu esnekliğin kontrol edilebildiği ve tüm KVB'ler için aynı ağırlık kümesinin kullanıldığı BVZA modeli önermişlerdir. Model 3 aşamadan oluşmakta olup, bulanık girdi ve çıktı verilerinin üçgen üyelik fonksiyonuna sahip olduğu veriler için geliştirilmiştir.

1. Aşama:

Bulanık girdi-çıkıtı verilerinin alabileceği ağırlıkların üst sınırlarının belirlenmesi için aşağıdaki modeller tanımlanabilir:

p. çıktının üst sınırı:

$$\max u_p$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ij} \leq 1 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m$$

t. girdinin üst sınırı:

$$\max v_t$$

Kısıtlar,

$$\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ij} \leq 1 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$\sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ij} \leq 0 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m$$

Yukarıdaki bulanık veriler içeren modellere Saati-Memariani-Jahanshahloo modelindeki aşamalar uygulanırsa:

p. çıktının üst sınırı için:

$$\max u_p$$

⁵ S. SAATI – A. MEMARIANI, "Reducing Weight Flexibility in Fuzzy DEA", **Applied Mathematics and Computation**, Vol: 161, (2005), s.811-822.

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} &\leq 1 & j=1,2,\dots,n \\ \sum_{r=1}^s \bar{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} &\leq 0 & j=1,2,\dots,n \\ v_i [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^L] &\leq \bar{x}_{ij} \leq v_i [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^U] & r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \\ u_r [\alpha y_{rj}^M + (1-\alpha)y_{rj}^L] &\leq \bar{y}_{rj} \leq u_r [\alpha y_{rj}^M + (1-\alpha)y_{rj}^U] & r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \\ v_i, u_r &\geq \varepsilon & r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

t. girdinin üst sınırı için:

$$\max v_t$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} &\leq 1 & j=1,2,\dots,n \\ \sum_{r=1}^s \bar{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} &\leq 0 & j=1,2,\dots,n \\ v_i [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^L] &\leq \bar{x}_{ij} \leq v_i [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^U] & r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \\ u_r [\alpha y_{rj}^M + (1-\alpha)y_{rj}^L] &\leq \bar{y}_{rj} \leq u_r [\alpha y_{rj}^M + (1-\alpha)y_{rj}^U] & r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \\ v_i, u_r &\geq \varepsilon & r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

modelleri elde edilir.

Yukarıdaki doğrusal modeller farklı $\mu \geq \alpha$ 'daki veriler için çözümlenerek, her ağırlığın $\mu \geq \alpha$ 'daki üst sınırları belirlenebilir.

2. Aşama:

Bütün KVB'lerin ağırlıklarındaki sapma oranının aynı olduğu kabul edilerek, ortak ağırlık kümesinin belirlenmesi için aşağıdaki model yazılabilir:

$$\max \phi$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s \bar{y}_{rj} - \sum_{i=1}^m \bar{x}_{ij} &\leq 0 & j=1,2,\dots,n \\ v_i [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^L] &\leq \bar{x}_{ij} \leq v_i [\alpha x_{ij}^M + (1-\alpha)x_{ij}^U] & r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \\ u_r [\alpha y_{rj}^M + (1-\alpha)y_{rj}^L] &\leq \bar{y}_{rj} \leq u_r [\alpha y_{rj}^M + (1-\alpha)y_{rj}^U] & r=1,2,\dots,s, \quad i=1,2,\dots,m, \quad j=1,2,\dots,n \\ \varepsilon + \phi(U_r - \varepsilon) &\leq u_r \leq (1-\phi)(U_r - \varepsilon) & r=1,2,\dots,s \\ \varepsilon + \phi(V_i - \varepsilon) &\leq v_i \leq (1-\phi)(V_i - \varepsilon) & i=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

modeli ile girdi ve çıktılara verilecek ortak ağırlıklar belirlemiş olur.

Burada,

U_r : Bir önceki modelle elde edilen r. çıktının üst sınırı (r=1,2,...,s)

V_i : Bir önceki modelle elde edilen i. girdinin üst sınırı (i=1,2,...,m)

φ : Ağırlıklardaki sapma oranı

3. Aşama:

Yukarıdaki modelle elde edilmiş olan ağırlıklara u_r^*, v_i^* denirse, bu ağırlıkları:

$$(\tilde{E}_o)_\alpha = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* \tilde{Y}_{ro}}{\sum_{i=1}^m v_i^* \tilde{X}_{io}}$$

formülünde kullanarak o. KVB'nin etkinlik değerleri belirlenebilir.

Üçgen üyelik fonksiyonuna sahip bulanık sayılar için geliştirilmiş olan bölme işlemi formülü kullanılarak $(\tilde{E}_o)_\alpha = (E_o^L, E_o^M, E_o^U)_\alpha$ sayısının alt-üst sınırları ve orta noktası belirlenebilir:

$$(E_o^M)_\alpha = \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}^M}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io}^M}$$

$$(E_o^L)_\alpha = (E_o^M)_\alpha - \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}^M \sum_{i=1}^m v_i^* (x_{io}^U - x_{io}^M) + \sum_{r=1}^s u_r^* (y_{ro}^M - y_{ro}^L) \sum_{i=1}^m v_i^* x_{io}^M}{(\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io}^M)^2}$$

$$(E_o^U)_\alpha = (E_o^M)_\alpha + \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{ro}^M \sum_{i=1}^m v_i^* (x_{io}^M - x_{io}^L) + \sum_{r=1}^s u_r^* (y_{ro}^U - y_{ro}^M) \sum_{i=1}^m v_i^* x_{io}^M}{(\sum_{i=1}^m v_i^* x_{io}^M)^2}$$

Etkinlik değeri hesaplanırken bulanık sayılarda aritmetik işlem uygulandığı için herhangi bir KVB'nin etkinlik değeri 1'den büyük ya da tüm KVB'lerin etkinlik değeri 1'den küçük çıkabilmektedir. Böyle durumlarda:

$$U_r^* = \frac{u_r^*}{E_{\max}}, \quad r=1,2,\dots,s$$

$$V_i^* = v_i^* \quad i=1,2,\dots,m$$

$$E_{\max} = \max_{1 \leq j \leq n} \{E_j^U\}$$

tanımlamaları ile ölçek dönüşümü yapılarak yeni ortak ağırlık seti (U_r^*, V_i^*) oluşturulur ve etkinlik değerleri tekrar hesaplanır.

2.4. Lertworasirikul Modeli⁶

Üyelik fonksiyonu tanımlanmış olan veriler için geliştirilmiş ve 2001 yılında "Fuzzy Data Envelopment Analysis for Supply Chain Modeling and Analysis" isimli çalışmayla yayımlanmış 2 aşamalı bir modeldir.

⁶ Saowanee LERTWORASIRIKUL – Shu Cherng FANG – Jeffrye A. JOINES ve Henry L.W. NUTTLE, "Fuzzy Data Envelopment Analysis (DEA): A Possibility Approach", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol: 139, (2003), s.390-392.

1. Aşama:

o. KVB'nin herhangi bir $\mu \geq \alpha$ 'daki girdiye yönelik CCR modeli:

$$(\tilde{E}_o)_\alpha = \max \frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{ro})_\alpha}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{io})_\alpha}$$

Kısıtlar,

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{rj})_\alpha}{\sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{ij})_\alpha} \leq 1 \quad j=1,2,\dots,n$$

$$v_i, u_r \geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m$$

şeklinde yazılabilir.

2. Aşama:

Yukarıda model girdi-çıkıtı verilerinin α ile ifade edildiği bulanık bir modeldir. Lertworasirikul bu aşamada etkinlik değeri hesaplanacak o. KVB ve diğer KVB'lerin $\mu \geq \alpha$ 'daki sınırlandırılmış girdi ve çıkıtı verilerinin üst ya da alt sınırdaki değerlerinin kullanımına göre çizelge 1'de gösterilmiş olan 4 model geliştirmiştir.

Çizelge 1: Lertworasirikul Modelleri

Model Adı	Etkinliği hesaplanacak olan KVB'nin $\mu \geq \alpha$ üyelik derecesindeki		Diğer KVB'lerin $\mu \geq \alpha$ üyelik derecesindeki	
	Girdilerin	Çıktıların	Girdilerin	Çıktıların
En İyi-En İyi	Minimum	Maksimum	Minimum	Maksimum
En İyi-En Kötü	Minimum	Maksimum	Maksimum	Minimum
En Kötü-En İyi	Maksimum	Minimum	Minimum	Maksimum
En Kötü-En Kötü	Maksimum	Minimum	Maksimum	Minimum

2.5. Lertworasirikul-Fang-Joines-Nuttle Modeli⁷

Modelde, Zadeh'in olasılık teorisinden hareketle ortaya attığı olabilirlik teorisi kullanılmıştır. Zadeh olabilirlik teorisinde; olasılık teorisindeki rasgele değişkenlerin olasılık dağılımı ile ifade edildiği gibi bulanık değişkenlerin de olabilirlik dağılımı ile ifade edilebileceğini söylemiştir.

Bulanık doğrusal programlama modellerinde; her bulanık katsayı bulanık bir değişken, her bulanık kısıt da bulanık bir olay olarak düşünülebilir. Bu yüzden olabilirlik teorisi ile bulanık kısıtların olabilirliğine karar verilebilir ve o. KVB için VZA modeli aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$E_o = \max_{u, v, f} \bar{f}$$

Kısıtlar,

⁷ Saowanee LERTWORASIRIKUL vd., s.379-394.

$$\begin{aligned} \pi\left(\sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{r0} \geq \bar{f}\right) &\geq \beta \\ \pi\left(\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{i0} = 1\right) &\geq \alpha_0 \\ \pi\left(\sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{rj} - \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ij} \leq 0\right) &\geq \alpha_j \quad j=1,2,\dots,n \\ v_i, u_r &\geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m \\ 0 \leq \beta, \alpha_j &\leq 1 \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

Burada,

π : Olabilirlik ölçümü β : 1. kısıtın olabilirliği
 α_0 : 2. kısıtın olabilirliği α_j : 3. kısıtın olabilirliği
 \bar{f} : β olabilirliğinde o. KVB'nin çıktılarının ağırlıklı toplamının alabileceği değer

Olabilirlik teorisine göre n tane bulanık sayının toplamında,

1. $\pi(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n \leq b) \geq \alpha$ eşitliği ancak, $(\tilde{X}_1)_\alpha^L + (\tilde{X}_2)_\alpha^L + \dots + (\tilde{X}_n)_\alpha^L \leq b$ koşulunun
2. $\pi(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n \geq b) \geq \alpha$ eşitliği ancak, $(\tilde{X}_1)_\alpha^U + (\tilde{X}_2)_\alpha^U + \dots + (\tilde{X}_n)_\alpha^U \geq b$ koşulunun
3. $\pi(\tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + \dots + \tilde{X}_n = b) \geq \alpha$ eşitliği ancak, $(\tilde{X}_1)_\alpha^L + (\tilde{X}_2)_\alpha^L + \dots + (\tilde{X}_n)_\alpha^L \leq b$ ve $(\tilde{X}_1)_\alpha^U + (\tilde{X}_2)_\alpha^U + \dots + (\tilde{X}_n)_\alpha^U \geq b$

koşulunun sağlanması ile gerçekleşir.

Buradan model:

$$E_o = \max_{u_r, v_i, \bar{f}} \bar{f}$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^s (u_r \tilde{Y}_{r0})_\beta^U &\geq \bar{f} \\ \sum_{i=1}^m (v_i \tilde{X}_{i0})_{\alpha_0}^U &\geq 1 \\ \sum_{i=1}^m (v_i \tilde{X}_{i0})_{\alpha_0}^U &\leq 1 \\ \sum_{r=1}^s u_r (\tilde{Y}_{rj})_\alpha^L - \sum_{i=1}^m v_i (\tilde{X}_{ij})_\alpha^L &\leq 0 \quad j=1,2,\dots,n \\ v_i, u_r &\geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m \\ 0 \leq \beta, \alpha_j &\leq 1 \quad j=1,2,\dots,n \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

Örneğin, yamuk üyelik fonksiyonuna sahip olan girdiler $\tilde{X}_{ij} = (x_{ij}^M - t_{ij}, x_{ij}^M, \bar{x}_{ij}^M, \bar{x}_{ij}^M + w_{ij})$ ve çıktılar $\tilde{Y}_{0j} = (y_{0j}^M - z_{0j}, y_{0j}^M, \bar{y}_{0j}^M, \bar{y}_{0j}^M + q_{0j})$ için model aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$\tilde{E}_o = \max_{u_r, v_i, \bar{f}} \bar{f}$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned}
 (1-\beta)\sum_{r=1}^s u_r (\bar{y}_{ro}^M + q_{ro}) + \beta\sum_{r=1}^s u_r \bar{y}_{ro}^M &\geq \bar{f} \\
 (1-\alpha_0)\sum_{i=1}^m v_i (\bar{x}_{io}^M + w_{io}) + \alpha_0\sum_{i=1}^m v_i \bar{x}_{io}^M &\geq 1 \\
 (1-\alpha_0)\sum_{i=1}^m v_i (\underline{x}_{io}^M - t_{io}) + \alpha_0\sum_{i=1}^m v_i \underline{x}_{io}^M &\geq 1 \\
 (1-\alpha_j)\left[\sum_{r=1}^s u_r (y_{rj}^M - z_{rj}) - \sum_{i=1}^m v_i (x_{ij}^M - t_{ij})\right] + \alpha\left[\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}^M - \sum_{i=1}^m v_i x_{ij}^M\right] &\leq 0 \quad j=1,2,\dots,n \\
 v_i, u_r &\geq \varepsilon \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m \\
 0 \leq \beta, \alpha_j &\leq 1 \quad j=1,2,\dots,n
 \end{aligned}$$

Tanım: Kısıtların (β, α_j) olabirliğinde; $\bar{f} \geq 1$ olduğu zaman o. KVB etkindir, diğer durumlarda etkin değildir.

2.6. Guo-Tanaka Modeli⁸

Bulanık girdi ve çıktı verilerinin simetrik üçgen üyelik fonksiyonuna sahip olduğu veriler için geliştirilmiş 4 aşamalı bir modeldir. Guo ve Tanaka o. KVB için girdiye yönelik CCR modelini:

$$\tilde{E}_o = \max \sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{ro}$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{io} &\approx \tilde{1} \\
 \sum_{r=1}^s u_r \tilde{Y}_{rj} &\leq \sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{ij} \quad j=1,2,\dots,n \\
 v_i, u_r &\geq 0 \quad r=1,2,\dots,s \quad i=1,2,\dots,m
 \end{aligned}$$

şeklinde kısıtlardaki eşitsizliği ve $\tilde{1}$ sayısını da bulanıklaştırarak tanımlamıştır.

1. Aşama:

Bulanık girdi-çıkıtı verilerinin ve $\tilde{1}$ sayısının α -kesim kümeleri oluşturularak, alt ve üst sınırları belirlenir.

Simetrik üçgen üyelik fonksiyonuna sahip girdi $\tilde{X}_{ij} = (x_{ij}^M - w_{ij}, x_{ij}^M, x_{ij}^M + w_{ij})$, çıktı $\tilde{Y}_{rj} = (y_{rj}^M - q_{rj}, y_{rj}^M, y_{rj}^M + q_{rj})$ ve $\tilde{1} = (1 - \Phi, 1, 1 + \Phi)$ 'in alt ve üst sınırlarının α cinsinden ifadesi:

$$\begin{aligned}
 \tilde{X}_{ij} &= [x_{ij}^M - (1-\alpha)w_{ij}, x_{ij}^M + (1-\alpha)w_{ij}] \\
 \tilde{Y}_{rj} &= [y_{rj}^M - (1-\alpha)q_{rj}, y_{rj}^M + (1-\alpha)q_{rj}] \\
 \tilde{1} &= [1 - (1-\alpha)\Phi, 1 + (1-\alpha)\Phi] \quad \text{olur.}
 \end{aligned}$$

Burada,

⁸ Peijun GUO – Hideo TANAKA, “Fuzzy DEA: A Perceptual Evaluation Method”, **Fuzzy Sets and Systems**, Vol: 119, (2001), s.149-160.

$$w_{ij} \leq x_{ij}^M, \quad q_{rj} \leq y_{rj}^M, \quad \Phi \leq 1$$

Sınır değerleri cinsinden model:

$$(\tilde{E}_\alpha)_\alpha = \max \sum_{r=1}^s u_r [y_{r0}^M - (1-\alpha)q_{r0}, y_{r0}^M + (1-\alpha)q_{r0}]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m v_i [x_{i0}^M - (1-\alpha)w_{i0}, x_{i0}^M + (1-\alpha)w_{i0}] &\approx [1 - (1-\alpha)\Phi, 1 + (1-\alpha)\Phi] \\ \sum_{r=1}^s u_r [y_{rj}^M - (1-\alpha)q_{rj}, y_{rj}^M + (1-\alpha)q_{rj}] &\approx \sum_{i=1}^m v_i [x_{ij}^M - (1-\alpha)w_{ij}, x_{ij}^M + (1-\alpha)w_{ij}] \quad j=1,2,..n \\ v_i, u_r &\geq 0 \quad r=1,2,..,s \quad i=1,2,..,m \end{aligned}$$

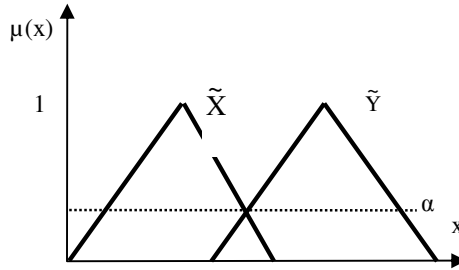
şeklinde yazılabilir.

2. Aşama:

Bulanık eşitsizlikler bulanıklıktan kurtararak eşitsizlik haline getirilir. Bulanık 2 sayı arasında:

$[\tilde{X}_{ij} = (x_{ij}^M - w_{ij}, x_{ij}^M, x_{ij}^M + w_{ij})] \approx [\tilde{Y}_{ij} = (y_{rj}^M - q_{rj}, y_{rj}^M, y_{rj}^M + q_{rj})]$ ilişkisi varsa grafik 1’de de görüldüğü gibi bulanık sayıların α -kesimleri ile ilgili olarak:

$[x_{ij}^M - (1-\alpha)w_{ij}] \leq [y_{rj}^M - (1-\alpha)q_{rj}]$ ve $[x_{ij}^M + (1-\alpha)w_{ij}] \leq [y_{rj}^M + (1-\alpha)q_{rj}]$ ilişkisi de vardır.



Grafik 1: $\tilde{X} \approx \tilde{Y}$ Bulanık Eşitsizliğin Açıklanması

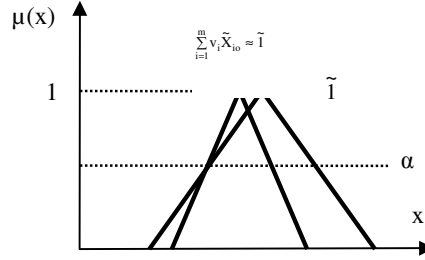
Bu ilişkiden faydalanarak modelin 2. kısıttaki bulanık eşitsizlik:

$$\begin{aligned} u_r [y_{rj}^M - (1-\alpha)q_{rj}] &\leq v_i [x_{ij}^M - (1-\alpha)w_{ij}] & j=1,2,..,n \\ u_r [y_{rj}^M + (1-\alpha)q_{rj}] &\leq v_i [x_{ij}^M + (1-\alpha)w_{ij}] & j=1,2,..,n \end{aligned}$$

şeklinde yazılarak eşitsizlik haline getirilebilir.

Tüm VZA modellerinde; modele, incelenen o. KVB'nin ağırlıklı girdilerinin toplamının 1'e eşit olması ($\sum_{i=1}^m v_i x_{i0} = 1$) kısıtının eklenmesi ile kesirsel doğrusal programlama modeli doğrusal programlama modeline dönüştürülüyor ve girdilere verilecek ağırlıklar (v_i) bulunuyordu. Fakat bulanık modelde $\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{i0} \approx \tilde{1}$ kısıtı ile v_i 'yi bulmamız ve modeli çözmemiz

olanaksızdır. Bu yüzden simetrik üçgen üyelik fonksiyonuna sahip \tilde{I} sayısının üyelik fonksiyonundaki Φ değeri için $\Phi = \max_{j=1,\dots,n} \left[\max_{i=1,\dots,m} (w_{ij} / x_{ij}^M) \right]$ tanımlaması yapılarak; grafik 2’de gösterildiği gibi \tilde{X}_{i_0} ve \tilde{I} sayılarının herhangi bir α -kesiminde üyelik fonksiyonlarının sol son noktaları üst üste getirilirken, \tilde{X}_{i_0} sayısının sağ son noktasının \tilde{I} sayısının sağ son noktasına olabildiğince yaklaşması sağlanır.



Grafik 2: $\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{i_0} \approx \tilde{I}$ Kısıtının Açıklanması

Böylece $\sum_{i=1}^m v_i \tilde{X}_{i_0} \approx \tilde{I}$ kısıtı aşağıdaki optimizasyon problemine çevirerek, girdilere verilecek ağırlıklar bulunabilir:

$$g_o = \max \sum_{i=1}^m v_i w_{i_0}$$

Kısıtlar,

$$v_i [x_{i_0}^M - (1 - \alpha)w_{i_0}] = [1 - (1 - \alpha)\Phi]$$

$$v_i [x_{i_0}^M + (1 - \alpha)w_{i_0}] \leq [1 + (1 - \alpha)\Phi]$$

$$\Phi = \max_{j=1,\dots,n} \left[\max_{i=1,\dots,m} (w_{ij} / x_{ij}^M) \right]$$

$$v_i \geq \varepsilon \quad i=1,2,\dots,m$$

3. Aşama:

Amaç fonksiyonu ve çıktılara verilecek ağırlıklar belirlenir. Simetrik üçgen üyelik fonksiyonuna sahip bulanık çıktı verileri hala alt ve üst sınır değerleri olarak bilinmektedir ve amaç fonksiyonu

$\max \sum_{r=1}^s u_r [y_{r_0}^M - (1 - \alpha)q_{r_0}, y_{r_0}^M + (1 - \alpha)q_{r_0}]$ şeklinde tanımlanmıştır. Tanımlı olan amaç fonksiyonunun maksimize edilmesi için $[y_{r_0}^M - (1 - \alpha)q_{r_0}]$ ve $[y_{r_0}^M + (1 - \alpha)q_{r_0}]$ değerlerinin ikisinin de maksimize edilmesi gerekir.

Burada bulanık sayının sol ve sağ taraflarına verilecek ağırlıklar için $\sigma_1 + \sigma_2 = 1$ tanımlaması ile $\sigma_1 [y_{r_0}^M - (1 - \alpha)q_{r_0}] + \sigma_2 [y_{r_0}^M + (1 - \alpha)q_{r_0}]$ bulanık çıktı verisi kesinleştirilebilir. $\sigma_1 = 1$ alınması incelenen KVB için kötümser, $\sigma_2 = 1$ alınması incelenen KVB için iyimser bir yaklaşım olacaktır.

Kötümser yaklaşım ile $\sigma_1 = 1$ alınması durumunda, etkinlik değeri hesaplanacak o. KVB için model aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$(E_o)_\alpha = \max \sum_{r=1}^s u_r [y_{r0}^M - (1-\alpha)q_{i0}]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} v_i w_{i0} &\geq g_o \\ v_i [x_{i0}^M - (1-\alpha)w_{i0}] &= [1 - (1-\alpha)\Phi] \\ v_i [x_{i0}^M + (1-\alpha)w_{i0}] &\leq [1 + (1-\alpha)\Phi] \\ u_r [y_{rj}^M - (1-\alpha)q_{ij}] &\leq v_i [x_{ij}^M - (1-\alpha)w_{ij}] & j=1,2,\dots,n \\ u_r [y_{rj}^M + (1-\alpha)q_{ij}] &\leq v_i [x_{ij}^M + (1-\alpha)w_{ij}] & j=1,2,\dots,n \\ \Phi &= \max_{j=1,\dots,n} \left[\max_{i=1,\dots,m} (w_{ij} / x_{ij}^M) \right] \\ v_i, u_r &\geq \varepsilon & r=1,2,\dots,s & i=1,2,\dots,m \end{aligned}$$

Son modelde $v_i w_{i0} \geq g_o$ kısıtına 1. model ile elde edilen v_i 'lerin son modele aynı değerle yansıtılabilmesi için yer verilmiştir.

4. Aşama:

3. aşamadaki modelin çözümü sonucu elde edilen v_i, u_r ağırlık değerlerinden faydalanılarak etkinlik değerleri bulunur.

Tanım: Simetrik üçgen üyelik fonksiyonu ile tanımlanan girdi ve çıktı verilerine sahip KVB'ler için hesaplanan etkinlik değeri simetrik olmayan üçgen üyelik fonksiyonuna sahip bulanık sayı olacaktır. Yukarıdaki modelin çözümü sonucunda elde edilen girdi ve çıktı verilerine verilen ağırlık değerleri sırası ile v_i^* ve u_r^* , etkinlik değeri $E = (\eta - (1-\alpha)\kappa, \eta, \eta + \tau(1-\alpha))$ üyelik fonksiyonu ile gösterildiğinde aşağıdaki tanımlamalar yapılabilir:

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* y_{r0}^M}{\sum_{i=1}^m v_i^* x_{i0}^M} & \kappa &= \eta - \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* (y_{r0}^M - (1-\alpha)q_{i0})}{\sum_{i=1}^m v_i^* (x_{i0}^M + (1-\alpha)w_{i0})} \\ \tau &= \frac{\sum_{r=1}^s u_r^* (y_{r0}^M + (1-\alpha)q_{i0})}{\sum_{i=1}^m v_i^* (x_{i0}^M - (1-\alpha)w_{i0})} - \eta \end{aligned}$$

Guo ve Tanaka modelinde de etkinlik değerinin üst sınırı $v_i [x_{i0}^M - (1-\alpha)w_{i0}] = [1 - (1-\alpha)\Phi]$ ve $v_i [x_{i0}^M + (1-\alpha)w_{i0}] \leq [1 + (1-\alpha)\Phi]$ kısıtlarından dolayı 1'den büyük çıkabilmektedir. Bu modelde, incelenen o. KVB için $\eta + \kappa \geq 1$ ise etkindir, $\eta + \tau < 1$ ise etkin değildir.

2.7. Leon-Liern-Ruiz-Sirvent Modeli⁹

Bulanık girdi ve çıktı verilerinin yamuk üyelik fonksiyonuna sahip olduğu veriler için geliştirilmiş bir modeldir. Leon-Liern-Ruiz ve Sirvent o. KVB için girdiye yönelik dual-CCR modelini:

$$\tilde{E}_o = \min \theta$$

Kısıtlar,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{X}_{ij} \approx \leq \theta \tilde{X}_{io} \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j \tilde{Y}_{rj} \approx \geq \tilde{Y}_{ro} \quad r=1,2,\dots,s$$

şeklinde kısıtlardaki eşitsizliği de bulanıklaştırarak tanımlamışlardır.

Guo ve Tanaka modelinde değinildiği gibi bulanık 2 sayı arasında:

$$\tilde{X}_{ij} = (\underline{x}_{ij}^M - t_{ij}, \underline{x}_{ij}^M, \bar{x}_{ij}^M, \bar{x}_{ij}^M + w_{ij}) \approx \leq \tilde{Y}_{rj} = (\underline{y}_{rj}^M - z_{rj}, \underline{y}_{rj}^M, \bar{y}_{rj}^M, \bar{y}_{rj}^M + q_{rj})$$

ilişkisi varsa bulanık sayıların sınırları ile ilgili olarak,

$$(\underline{x}_{ij}^M - (1-\alpha)t_{ij}) \leq (\underline{y}_{rj}^M - (1-\alpha)z_{rj}) \quad \text{ve}$$

$$(\bar{x}_{ij}^M + (1-\alpha)w_{ij}) \leq (\bar{y}_{rj}^M + (1-\alpha)q_{rj}) \quad \text{ilişkisi de vardır.}$$

Buradan, dual modeldeki bulanık eşitsizlikler eşitsizliğe çevirerek:

$$(E_o)_\alpha = \min \theta$$

Kısıtlar,

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (\underline{x}_{ij}^M - (1-\alpha)t_{ij}) \leq \theta (\underline{x}_{io}^M - (1-\alpha)t_{io}) \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (\bar{x}_{ij}^M + (1-\alpha)w_{ij}) \leq \theta (\bar{x}_{io}^M + (1-\alpha)w_{io}) \quad i=1,2,\dots,m$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (\underline{y}_{rj}^M - (1-\alpha)z_{rj}) \geq (\underline{y}_{ro}^M - (1-\alpha)z_{ro}) \quad r=1,2,\dots,s$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j (\bar{y}_{rj}^M + (1-\alpha)q_{rj}) \geq (\bar{y}_{ro}^M + (1-\alpha)q_{ro}) \quad r=1,2,\dots,s$$

Modeli elde edilir. Leon-Liern-Ruiz ve Sirvent bulanık VZA modelini dual-CCR olarak tanımlayarak, Guo ve Tanaka'nın modelindeki incelenen o. KVB'nin girdilerinin ağırlıklı toplamının 1'e eşit olma kısıtındaki 1 sayısı ve kısıtın bulanık eşitlik olarak alınması gerekliliğini ortadan kaldırmıştır.

3. MODELLERİN KARŞILAŞTIRILMASI

Örnek: 2 girdi ve 2 çıktı içeren 5 adet KVB için veriler çizelge 2'deki gibidir. (veriler simetrik üçgen üyelik fonksiyonuna sahiptir).

Çizelge 2: Sınırlandırılmış Veri Modelleri Örneği için Veri Çizelgesi

⁹ T. LEON – V. LIERN – J.L. RUIZ – I. SIRVENT, "A Fuzzy Mathematical Programming Approach to the Assessment of Efficiency with DEA Models", **Fuzzy Sets and Systems**, Vol: 139, (2003), s.407-419.

KVB	ÇIKTILAR (y_{ri})		GİRDİLER (x_{ji})	
	(y_{1i})	(y_{2i})	(x_{1j})	(x_{2j})
1	(4, 5, 6)	(5, 6, 7)	(1, 2, 3)	(3, 4, 5)
2	(3, 4, 5)	(7, 8, 9)	(4, 5, 6)	(6, 7, 8)
3	(2, 3, 4)	(9, 10, 11)	(6, 7, 8)	(10, 11, 12)
4	(7, 8, 9)	(10, 11, 12)	(2, 3, 4)	(11, 12, 13)
5	(1, 2, 3)	(12, 13, 14)	(10, 11, 12)	(8, 9, 10)

Açıklama: Önerilen her model tüm KVB'ler için girdiye yönelik CCR modeli olarak kurulmuş, 5 farklı α değeri (0, 0.25, 0.5, 0.75, 1) için hesaplamalar yapılmış, fakat sadece KVB1 için kurulumları yazılmıştır.

Her veri için α -kesim kümesi Çizelge 3'teki gibi olur.

Çizelge 3. Verilerin α -Kesim Kümeleri

KVB	ÇIKTILAR (y_{ri})		GİRDİLER (x_{ji})	
	(y_{1i})	(y_{2i})	(x_{1j})	(x_{2j})
1	($4+\alpha, 6-\alpha$)	($5+\alpha, 7-\alpha$)	($1+\alpha, 3-\alpha$)	($3+\alpha, 5-\alpha$)
2	($3+\alpha, 5-\alpha$)	($7+\alpha, 9-\alpha$)	($4+\alpha, 6-\alpha$)	($6+\alpha, 8-\alpha$)
3	($2+\alpha, 4-\alpha$)	($9+\alpha, 11-\alpha$)	($6+\alpha, 8-\alpha$)	($10+\alpha, 12-\alpha$)
4	($7+\alpha, 9-\alpha$)	($10+\alpha, 12-\alpha$)	($2+\alpha, 4-\alpha$)	($11+\alpha, 13-\alpha$)
5	($1+\alpha, 3-\alpha$)	($12+\alpha, 14-\alpha$)	($10+\alpha, 12-\alpha$)	($8+\alpha, 10-\alpha$)

3.1. Kao-Liu Modeli

Etkinlik değerinin alt sınırı:

$$(E_1)_\alpha^L = \max[u_1(4 + \alpha) + u_2(5 + \alpha)]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} & [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] = 1 \\ & [u_1(4 + \alpha) + u_2(5 + \alpha)] - [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] \leq 0 \\ & [u_1(5 - \alpha) + u_2(9 - \alpha)] - [v_1(4 + \alpha) + v_2(6 + \alpha)] \leq 0 \\ & [u_1(4 - \alpha) + u_2(11 - \alpha)] - [v_1(6 + \alpha) + v_2(10 + \alpha)] \leq 0 \\ & [u_1(9 - \alpha) + u_2(12 - \alpha)] - [v_1(2 + \alpha) + v_2(11 + \alpha)] \leq 0 \\ & [u_1(3 - \alpha) + u_2(14 - \alpha)] - [v_1(10 + \alpha) + v_2(8 + \alpha)] \leq 0 \\ & v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-6} \end{aligned}$$

Etkinlik değerinin üst sınırı:

$$(E_1)_\alpha^U = \max[u_1(6 - \alpha) + u_2(7 - \alpha)]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} & [v_1(1 + \alpha) + v_2(3 + \alpha)] = 1 \\ & [u_1(6 - \alpha) + u_2(7 - \alpha)] - [v_1(1 + \alpha) + v_2(3 + \alpha)] \leq 0 \\ & [u_1(3 + \alpha) + u_2(7 + \alpha)] - [v_1(6 - \alpha) + v_2(8 - \alpha)] \leq 0 \\ & [u_1(2 + \alpha) + u_2(9 + \alpha)] - [v_1(8 - \alpha) + v_2(12 - \alpha)] \leq 0 \\ & [u_1(7 + \alpha) + u_2(10 + \alpha)] - [v_1(4 - \alpha) + v_2(13 - \alpha)] \leq 0 \\ & [u_1(1 + \alpha) + u_2(12 + \alpha)] - [v_1(12 - \alpha) + v_2(10 - \alpha)] \leq 0 \\ & v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-6} \end{aligned}$$

3.2. Memariani-Jahanshahloo Modeli

$$(E_1)_\alpha = \max[\bar{y}_{11} + \bar{y}_{21}]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} \bar{x}_{11} + \bar{x}_{21} &= 1 \\ [\bar{y}_{11} + \bar{y}_{21}] - [\bar{x}_{11} + \bar{x}_{21}] &\leq 0 & [\bar{y}_{12} + \bar{y}_{22}] - [\bar{x}_{12} + \bar{x}_{22}] &\leq 0 \\ [\bar{y}_{13} + \bar{y}_{23}] - [\bar{x}_{13} + \bar{x}_{23}] &\leq 0 & [\bar{y}_{14} + \bar{y}_{24}] - [\bar{x}_{14} + \bar{x}_{24}] &\leq 0 \\ [\bar{y}_{15} + \bar{y}_{25}] - [\bar{x}_{15} + \bar{x}_{25}] &\leq 0 \\ (1 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{11} &\leq (3 - \alpha)v_1 & (3 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{21} &\leq (5 - \alpha)v_2 \\ (4 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{12} &\leq (6 - \alpha)v_1 & (6 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{22} &\leq (8 - \alpha)v_2 \\ (6 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{13} &\leq (8 - \alpha)v_1 & (10 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{23} &\leq (12 - \alpha)v_2 \\ (2 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{14} &\leq (4 - \alpha)v_1 & (11 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{24} &\leq (13 - \alpha)v_2 \\ (10 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{15} &\leq (12 - \alpha)v_1 & (8 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{25} &\leq (10 - \alpha)v_2 \\ (4 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{11} &\leq (6 - \alpha)u_1 & (5 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{21} &\leq (7 - \alpha)u_2 \\ (3 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{12} &\leq (5 - \alpha)u_1 & (7 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{22} &\leq (9 - \alpha)u_2 \\ (2 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{13} &\leq (4 - \alpha)u_1 & (9 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{23} &\leq (11 - \alpha)u_2 \\ (7 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{14} &\leq (9 - \alpha)u_1 & (10 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{24} &\leq (12 - \alpha)u_2 \\ (1 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{15} &\leq (3 - \alpha)u_1 & (12 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{25} &\leq (14 - \alpha)u_2 \\ v_1, v_2, u_1, u_2 &\geq 10^{-6} \end{aligned}$$

3.3. Saati-Memariani Modeli

1. Aşama:

1. çıktılar için üst sınır:

$$U_1 = \max u_1$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} \bar{x}_{11} + \bar{x}_{21} &\leq 1 & \bar{x}_{12} + \bar{x}_{22} &\leq 1 \\ \bar{x}_{13} + \bar{x}_{23} &\leq 1 & \bar{x}_{14} + \bar{x}_{24} &\leq 1 \\ \bar{x}_{15} + \bar{x}_{25} &\leq 1 \\ [\bar{y}_{11} + \bar{y}_{21}] - [\bar{x}_{11} + \bar{x}_{21}] &\leq 0 & [\bar{y}_{12} + \bar{y}_{22}] - [\bar{x}_{12} + \bar{x}_{22}] &\leq 0 \\ [\bar{y}_{13} + \bar{y}_{23}] - [\bar{x}_{13} + \bar{x}_{23}] &\leq 0 & [\bar{y}_{14} + \bar{y}_{24}] - [\bar{x}_{14} + \bar{x}_{24}] &\leq 0 \\ [\bar{y}_{15} + \bar{y}_{25}] - [\bar{x}_{15} + \bar{x}_{25}] &\leq 0 \\ (1 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{11} &\leq (3 - \alpha)v_1 & (3 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{21} &\leq (5 - \alpha)v_2 \\ (4 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{12} &\leq (6 - \alpha)v_1 & (6 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{22} &\leq (8 - \alpha)v_2 \\ (6 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{13} &\leq (8 - \alpha)v_1 & (10 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{23} &\leq (12 - \alpha)v_2 \\ (2 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{14} &\leq (4 - \alpha)v_1 & (11 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{24} &\leq (13 - \alpha)v_2 \\ (10 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{15} &\leq (12 - \alpha)v_1 & (8 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{25} &\leq (10 - \alpha)v_2 \\ (4 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{11} &\leq (6 - \alpha)u_1 & (5 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{21} &\leq (7 - \alpha)u_2 \\ (3 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{12} &\leq (5 - \alpha)u_1 & (7 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{22} &\leq (9 - \alpha)u_2 \\ (2 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{13} &\leq (4 - \alpha)u_1 & (9 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{23} &\leq (11 - \alpha)u_2 \\ (7 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{14} &\leq (9 - \alpha)u_1 & (10 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{24} &\leq (12 - \alpha)u_2 \\ (1 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{15} &\leq (3 - \alpha)u_1 & (12 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{25} &\leq (14 - \alpha)u_2 \\ v_1, v_2, u_1, u_2 &\geq 10^{-6} \end{aligned}$$

2. çıktılar için üst sınır:

$$U_2 = \max u_2$$

Kısıtlar,

1. çıktılar için üst sınır modeli ile aynı kısıtlar

1. girdiler için üst sınır:

$$V_1 = \max v_1$$

Kısıtlar,

1. çıktılar için üst sınır modeli ile aynı kısıtlar

2. girdiler için üst sınır:

$$V_2 = \max v_2$$

Kısıtlar,

1. çıktılar için üst sınır modeli ile aynı kısıtlar

Yukarıdaki modeller çeşitli $\mu \geq \alpha$ 'da çözüldüğü zaman çizelge 4'teki değerler elde edilir.

Çizelge 4. Ağırlıklar için Üst Sınırlar

	U_1	U_2	V_1	V_2
$\alpha=0$	0.1250	0.0833	0.1	0.0909
$\alpha=0.25$	0.1083	0.0816	0.0976	0.0889
$\alpha=0.5$	0.0939	0.0769	0.0952	0.0870
$\alpha=0.75$	0.0815	0.0673	0.093	0.0851
$\alpha=1$	0.0706	0.0588	0.0909	0.0833

2. Aşama:

max ϕ

$$[\bar{y}_{11} + \bar{y}_{21}] - [\bar{x}_{11} + \bar{x}_{21}] \leq 0$$

$$[\bar{y}_{12} + \bar{y}_{22}] - [\bar{x}_{12} + \bar{x}_{22}] \leq 0$$

$$[\bar{y}_{13} + \bar{y}_{23}] - [\bar{x}_{13} + \bar{x}_{23}] \leq 0$$

$$[\bar{y}_{14} + \bar{y}_{24}] - [\bar{x}_{14} + \bar{x}_{24}] \leq 0$$

$$[\bar{y}_{15} + \bar{y}_{25}] - [\bar{x}_{15} + \bar{x}_{25}] \leq 0$$

$$(1 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{11} \leq (3 - \alpha)v_1$$

$$(3 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{21} \leq (5 - \alpha)v_2$$

$$(4 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{12} \leq (6 - \alpha)v_1$$

$$(6 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{22} \leq (8 - \alpha)v_2$$

$$(6 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{13} \leq (8 - \alpha)v_1$$

$$(10 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{23} \leq (12 - \alpha)v_2$$

$$(2 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{14} \leq (4 - \alpha)v_1$$

$$(11 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{24} \leq (13 - \alpha)v_2$$

$$(10 + \alpha)v_1 \leq \bar{x}_{15} \leq (12 - \alpha)v_1$$

$$(8 + \alpha)v_2 \leq \bar{x}_{25} \leq (10 - \alpha)v_2$$

$$(4 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{11} \leq (6 - \alpha)u_1$$

$$(5 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{21} \leq (7 - \alpha)u_2$$

$$(3 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{12} \leq (5 - \alpha)u_1$$

$$(7 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{22} \leq (9 - \alpha)u_2$$

$$(2 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{13} \leq (4 - \alpha)u_1$$

$$(9 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{23} \leq (11 - \alpha)u_2$$

$$(7 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{14} \leq (9 - \alpha)u_1$$

$$(10 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{24} \leq (12 - \alpha)u_2$$

$$(1 + \alpha)u_1 \leq \bar{y}_{15} \leq (3 - \alpha)u_1$$

$$(12 + \alpha)u_2 \leq \bar{y}_{25} \leq (14 - \alpha)u_2$$

$$10^{-6} + \phi(U_1 - 10^{-6}) \leq u_1 \leq (1 - \phi)(U_1 - 10^{-6})$$

$$10^{-6} + \phi(U_2 - 10^{-6}) \leq u_2 \leq (1 - \phi)(U_2 - 10^{-6})$$

$$10^{-6} + \phi(V_1 - 10^{-6}) \leq v_1 \leq (1 - \phi)(V_1 - 10^{-6})$$

$$10^{-6} + \phi(V_2 - 10^{-6}) \leq v_2 \leq (1 - \phi)(V_2 - 10^{-6})$$

Model çeşitli $\mu \geq \alpha$ 'da çözüldüğü zaman çizelge 5'teki ortak ağırlık değerleri elde edilir.

Çizelge 5.Ortak Ağırlıklar

	u_1	u_2	v_1	v_2
$\alpha=0$	0.0564	0.0376	0.0548	0.0499
$\alpha=0.25$	0.0542	0.0408	0.0488	0.0653
$\alpha=0.5$	0.0401	0.0328	0.0546	0.0499
$\alpha=0.75$	0.0346	0.0286	0.0535	0.0490
$\alpha=1$	0.0298	0.0248	0.0526	0.0482

3. Aşama:

KVB 1 ve $\alpha=0$ için:

$$(E_o^M)_0 = 1.6417 \quad (E_o^L)_0 = 0.7818 \quad (E_o^U)_0 = 2.5016 \quad \text{olur.}$$

Etkinlik değeri 1'den büyük çıktığı için ölçek dönüşümü yapılmış yeni ağırlık değerleri çizelge 6'daki gibi olur.

Çizelge 6.Ölçek Dönüşümü Yapılmış Ağırlıklar

	U_1^*	U_2^*	V_1^*	V_2^*
$\alpha=0$	0.02255	0.01503	0.0548	0.0499
$\alpha=0.25$	0.02510	0.01889	0.0488	0.0653
$\alpha=0.5$	0.02048	0.01675	0.0546	0.0499
$\alpha=0.75$	0.01999	0.01653	0.0535	0.0490
$\alpha=1$	0.01960	0.01631	0.0526	0.0482

Yeni ağırlık değerleriyle KVB 1 ve $\alpha=0$ için:

$$(E_o^M)_0 = 0.656 \quad (E_o^L)_0 = 0.313 \quad (E_o^U)_0 = 1 \quad \text{olur.}$$

3.4. Lertworasirikul ModeliEn iyi-En iyi Modeli:

$$(E_1)_\alpha = \max[u_1(6-\alpha) + u_2(7-\alpha)]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} [v_1(1+\alpha) + v_2(3+\alpha)] &= 1 \\ [u_1(6-\alpha) + u_2(7-\alpha)] - [v_1(1+\alpha) + v_2(3+\alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(5-\alpha) + u_2(9-\alpha)] - [v_1(4+\alpha) + v_2(6+\alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(4-\alpha) + u_2(11-\alpha)] - [v_1(6+\alpha) + v_2(10+\alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(9-\alpha) + u_2(12-\alpha)] - [v_1(2+\alpha) + v_2(11+\alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(3-\alpha) + u_2(14-\alpha)] - [v_1(10+\alpha) + v_2(8+\alpha)] &\leq 0 \end{aligned}$$

$$v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-6}$$

En iyi-En kötü Modeli:

$$(E_1)_\alpha = \max[u_1(6-\alpha) + u_2(7-\alpha)]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} [v_1(1+\alpha) + v_2(3+\alpha)] &= 1 \\ [u_1(6-\alpha) + u_2(7-\alpha)] - [v_1(1+\alpha) + v_2(3+\alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(3+\alpha) + u_2(7+\alpha)] - [v_1(6-\alpha) + v_2(8-\alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(2+\alpha) + u_2(9+\alpha)] - [v_1(8-\alpha) + v_2(12-\alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(7+\alpha) + u_2(10+\alpha)] - [v_1(4-\alpha) + v_2(13-\alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(1+\alpha) + u_2(12+\alpha)] - [v_1(12-\alpha) + v_2(10-\alpha)] &\leq 0 \end{aligned}$$

$$v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-6}$$

En kötü-En iyi Modeli:

$$(E_1)_\alpha = \max[u_1(4 + \alpha) + u_2(5 + \alpha)]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] &= 1 \\ [u_1(4 + \alpha) + u_2(5 + \alpha)] - [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(5 - \alpha) + u_2(9 - \alpha)] - [v_1(4 + \alpha) + v_2(6 + \alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(4 - \alpha) + u_2(11 - \alpha)] - [v_1(6 + \alpha) + v_2(10 + \alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(9 - \alpha) + u_2(12 - \alpha)] - [v_1(2 + \alpha) + v_2(11 + \alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(3 - \alpha) + u_2(14 - \alpha)] - [v_1(10 + \alpha) + v_2(8 + \alpha)] &\leq 0 \end{aligned}$$

$$v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-6}$$

En kötü-En kötü Modeli:

$$(E_1)_\alpha = \max[u_1(4 + \alpha) + u_2(5 + \alpha)]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] &= 1 \\ [u_1(4 + \alpha) + u_2(5 + \alpha)] - [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(3 + \alpha) + u_2(7 + \alpha)] - [v_1(6 - \alpha) + v_2(8 - \alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(2 + \alpha) + u_2(9 + \alpha)] - [v_1(8 - \alpha) + v_2(12 - \alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(7 + \alpha) + u_2(10 + \alpha)] - [v_1(4 - \alpha) + v_2(13 - \alpha)] &\leq 0 \\ [u_1(1 + \alpha) + u_2(12 + \alpha)] - [v_1(12 - \alpha) + v_2(10 - \alpha)] &\leq 0 \end{aligned}$$

$$v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-6}$$

3.5. Lertworasirikul-Fang-Joines-Nuttle Modeli

$\beta = \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = \alpha$ olabilirlik seviyesinde model:

$$\tilde{E}_o = \max_{u, v, \bar{f}} \bar{f}$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} (1 - \alpha)(6u_1 + 7u_2) + \alpha(5u_1 + 6u_2) &\geq \bar{f} \\ (1 - \alpha)(3v_1 + 5v_2) + \alpha(2v_1 + 4v_2) &\geq 1 \\ (1 - \alpha)(v_1 + 3v_2) + \alpha(2v_1 + 4v_2) &\leq 1 \\ (1 - \alpha)[(4u_1 + 5u_2) - (v_1 + 3v_2)] + \alpha[(5u_1 + 6u_2) - (2v_1 + 4v_2)] &\leq 0 \\ (1 - \alpha)[(3u_1 + 7u_2) - (4v_1 + 6v_2)] + \alpha[(4u_1 + 8u_2) - (5v_1 + 7v_2)] &\leq 0 \\ (1 - \alpha)[(2u_1 + 9u_2) - (6v_1 + 10v_2)] + \alpha[(3u_1 + 10u_2) - (7v_1 + 11v_2)] &\leq 0 \\ (1 - \alpha)[(7u_1 + 10u_2) - (2v_1 + 11v_2)] + \alpha[(8u_1 + 11u_2) - (3v_1 + 12v_2)] &\leq 0 \\ (1 - \alpha)[(u_1 + 12u_2) - (10v_1 + 8v_2)] + \alpha[(2u_1 + 13u_2) - (11v_1 + 9v_2)] &\leq 0 \end{aligned}$$

$$v_1, v_2, u_1, u_2 \geq \varepsilon$$

3.6. Guo-Tanaka Modeli

$$g_1 = \max[v_1 + v_2]$$

Kısıtlar,

$$\begin{aligned} [v_1(1 + \alpha) + v_2(3 + \alpha)] &= 0.5 + 0.5\alpha \\ [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] &\leq 1.5 - 0.5\alpha \end{aligned}$$

$$\Phi = \max_{j=1,\dots,n} \left[\max_{i=1,\dots,m} (w_{ij} / x_{ij}^M) \right] = \frac{1}{2}$$

$$v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-6}$$

1. KVB için kurulan model tüm KVB'ler için model kurulup, çeşitli α 'larda çözüldüğü zaman çizelge 7'deki g_i değerleri elde edilir.

Çizelge 7: Girdilere Verilecek Ağırlıkların Maksimumu

	KVB1(g_1)	KVB2(g_2)	KVB3(g_3)	KVB4(g_4)	KVB5(g_5)
$\alpha=0$	0.4999980	0.1249995	0.08333267	0.2499955	0.06249975
$\alpha=0.25$	0.4999984	0.1470584	0.09999935	0.2777738	0.07575733
$\alpha=0.5$	0.4999987	0.1666662	0.11538400	0.2999964	0.08823505
$\alpha=0.75$	0.4999989	0.1842101	0.12962900	0.3181786	0.09999977
$\alpha=1$	0.4999990	0.1999996	0.14285660	0.3333304	0.11111109

1. KVB için girdi ve çıktılara verilecek ağırlıklar:

$$(E_1)_\alpha = \max [u_1(4 + \alpha) + u_2(5 + \alpha)]$$

Kısıtlar,

$$v_1 + v_2 \geq 0.4999980$$

$$[v_1(1 + \alpha) + v_2(3 + \alpha)] = 0.5 + 0.5\alpha$$

$$[v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] \leq 1.5 - 0.5\alpha$$

$$[u_1(6 - \alpha) + u_2(7 - \alpha)] - [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(3 + \alpha) + u_2(7 + \alpha)] - [v_1(4 + \alpha) + v_2(6 + \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(2 + \alpha) + u_2(9 + \alpha)] - [v_1(6 + \alpha) + v_2(10 + \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(7 + \alpha) + u_2(10 + \alpha)] - [v_1(2 + \alpha) + v_2(11 + \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(1 + \alpha) + u_2(12 + \alpha)] - [v_1(10 + \alpha) + v_2(8 + \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(6 - \alpha) + u_2(7 - \alpha)] - [v_1(3 - \alpha) + v_2(5 - \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(5 - \alpha) + u_2(9 - \alpha)] - [v_1(6 - \alpha) + v_2(8 - \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(4 - \alpha) + u_2(11 - \alpha)] - [v_1(8 - \alpha) + v_2(12 - \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(9 - \alpha) + u_2(12 - \alpha)] - [v_1(4 - \alpha) + v_2(13 - \alpha)] \leq 0$$

$$[u_1(3 - \alpha) + u_2(14 - \alpha)] - [v_1(12 - \alpha) + v_2(10 - \alpha)] \leq 0$$

$$v_1, v_2, u_1, u_2 \geq 10^{-6}$$

1. KVB için kurulan model tüm KVB'ler için model kurulup, çeşitli α 'larda çözüldüğü zaman çizelge 8'deki u_i ve v_i değerleri elde edilir.

Çizelge 8: Girdi ve Çıktılara Verilecek Ağırlıklar

	Ağırlık	Karar Verme Birimi				
		KVB1	KVB2	KVB3	KVB4	KVB5
$\alpha=0$	u_1	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
	u_2	0.099999	0.024999	0.016666	0.04999	0.037499
	v_1	0.49999	0.124999	0.083317	0.24999	10^{-6}
	v_2	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	0.062499
$\alpha=0.25$	u_1	0.090904	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
	u_2	0.045459	0.032281	0.021951	0.06097	0.0469
	v_1	0.499997	0.147057	0.099998	0.2778	10^{-6}
	v_2	10^{-6}	$1.13*10^{-6}$	10^{-6}	10^{-6}	0.07576
$\alpha=0.5$	u_1	0.16666	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
	u_2	$4*10^{-6}$	0.039683	0.027473	0.071428	0.05615
	v_1	0.499998	0.16667	0.11538	0.29999	10^{-6}
	v_2	10^{-6}	$1.07*10^{-6}$	10^{-6}	10^{-6}	0.08823
$\alpha=0.75$	u_1	0.177419	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
	u_2	10^{-6}	0.047124	0.03316	0.08139	0.06522
	v_1	0.499998	0.184209	0.129628	0.3182	10^{-6}
	v_2	10^{-6}	10^{-6}	$1.06*10^{-6}$	$1.02*10^{-6}$	0.099999
$\alpha=1$	u_1	0.187499	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}
	u_2	10^{-6}	0.054454	0.03896	0.09091	0.074073
	v_1	0.499998	0.199999	0.14286	0.3333	10^{-6}
	v_2	$1.03*10^{-6}$	10^{-6}	$1.03*10^{-6}$	$1.02*10^{-6}$	0.11111

1. KVB için etkinlik değeri ($\alpha=0$ için):

$$\eta = \frac{10^{-6} * 5 + 0.099999 * 6}{0.49999 * 2 + 10^{-6} * 4} = 0.60$$

$$\kappa = 0.60 - \frac{10^{-6} * 4 + 0.099999 * 5}{0.49999 * 3 + 10^{-6} * 5} = 0.267$$

$$\tau = \frac{10^{-6} * 6 + 0.099999 * 7}{0.49999 * 1 + 10^{-6} * 3} - 0.60 = 0.8$$

$$E_1^0 = (\eta - (1 - \alpha)\kappa, \eta, \eta + \tau(1 - \alpha)) = (0.333, 0.60, 1.4) \quad \text{olur.}$$

3.7. Leon-Liern-Ruiz-Sirvent Modeli

1. KVB için girdiye yönelik dual CCR modeli:

$$(E_1)_\alpha = \min \theta$$

$$\lambda_1(1 + \alpha) + \lambda_2(4 + \alpha) + \lambda_3(6 + \alpha) + \lambda_4(2 + \alpha) + \lambda_5(10 + \alpha) \leq \theta(1 + \alpha)$$

$$\lambda_1(3 + \alpha) + \lambda_2(6 + \alpha) + \lambda_3(10 + \alpha) + \lambda_4(11 + \alpha) + \lambda_5(8 + \alpha) \leq \theta(3 + \alpha)$$

$$\lambda_1(3 - \alpha) + \lambda_2(6 - \alpha) + \lambda_3(8 - \alpha) + \lambda_4(4 - \alpha) + \lambda_5(12 - \alpha) \leq \theta(3 - \alpha)$$

$$\lambda_1(5 - \alpha) + \lambda_2(8 - \alpha) + \lambda_3(12 - \alpha) + \lambda_4(13 - \alpha) + \lambda_5(10 - \alpha) \leq \theta(5 - \alpha)$$

$$\lambda_1(4 + \alpha) + \lambda_2(3 + \alpha) + \lambda_3(2 + \alpha) + \lambda_4(7 + \alpha) + \lambda_5(1 + \alpha) \geq (4 + \alpha)$$

$$\lambda_1(5 + \alpha) + \lambda_2(7 + \alpha) + \lambda_3(9 + \alpha) + \lambda_4(10 + \alpha) + \lambda_5(12 + \alpha) \geq (5 + \alpha)$$

$$\lambda_1(6 - \alpha) + \lambda_2(5 - \alpha) + \lambda_3(4 - \alpha) + \lambda_4(9 - \alpha) + \lambda_5(3 - \alpha) \geq (6 - \alpha)$$

$$\lambda_1(7 - \alpha) + \lambda_2(9 - \alpha) + \lambda_3(11 - \alpha) + \lambda_4(12 - \alpha) + \lambda_5(14 - \alpha) \geq (7 - \alpha)$$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \geq 0$$

Modellerinin karşılaştırılması için ele alınan örneğin tüm modeller için çözüm sonuçları ek çizelge 1’de gösterilmiştir.

4. SONUÇLAR

Kao-Liu, Lertworasirikul, Lertworasirikul-Fang-Joines-Nuttle modellerinin bir probleme uygulanabilmesi için sınırlandırılmış bulanık verilerin üyelik fonksiyonu ile ilgili herhangi bir sınırlama yokken, Saati-Memariani-Jahanshahloo ve Saati-Memariani modellerinin uygulanabilmesi için bulanık verilerin üçgen üyelik fonksiyonuna sahip olması gerekmektedir.

Guo-Tanaka modelinin bir probleme uygulanabilmesi için sınırlandırılmış bulanık verilerin simetrik üçgen üyelik fonksiyonuna sahip olması gerekirken, Leon-Liern-Ruiz-Sirvent modelinin uygulanabilmesi için yamuk üyelik fonksiyonuna sahip olması gerekmektedir.

Kao-Liu, Saati-Memariani ve Guo-Tanaka modellerinin uygulanması sonucunda elde edilen etkinlik değeri üyelik fonksiyonu bilinen bulanık sayı olmaktadır.

Modeller aynı probleme uygulandığı zaman;

- Kao-Liu modeli ile elde edilen etkinlik değerinin alt sınırı ile Lertworasirikul (en kötü-en iyi) modelinin
- Kao-Liu modeli ile elde edilen etkinlik değerinin üst sınırı, Saati-Memariani-Jahanshahloo ve Lertworasirikul (en iyi-en kötü) modellerinin
- Lertworasirikul (en kötü-en kötü) modeli ile Leon-Liern-Ruiz-Sirvent

modellerinin sonuçları aynı olmaktadır.

Tüm modellerin bulanık verilerin üyelik fonksiyonu ve elde edilen etkinlik değerinin özelliğine göre karşılaştırılması çizelge 9’da gösterilmiştir.

Çizelge 9: BVZA Modellerinin Karşılaştırılması

Yazar	Bulanık Verilerin Üyelik Fonksiyonu	Elde Edilen Etkinlik Değeri
Kao-Liu	<ul style="list-style-type: none"> • Üyelik fonksiyonunun problemin başında karar verici tarafından tanımlanması şartı ile sınırlama yok 	<ul style="list-style-type: none"> • Tüm KVB'lerin $\mu \geq \alpha$'daki girdi ve çıktı verilerinin kullanılması durumunda, $\mu \geq \alpha$'daki etkinlik değerinin üst-alt sınırı ve üyelik fonksiyonu
Saati-Memariani-Jahanshahloo	<ul style="list-style-type: none"> • Üçgen 	<ul style="list-style-type: none"> • Tüm KVB'lerin $\mu \geq \alpha$'daki girdi ve çıktı verilerinin kullanılması durumunda, $\mu \geq \alpha$'daki etkinlik değerinin üst sınırı
Saati-Memariani	<ul style="list-style-type: none"> • Üçgen 	<ul style="list-style-type: none"> • Tüm KVB'lerin $\mu \geq \alpha$'daki girdi ve çıktı verilerinin kullanılması durumunda, önce girdi ve çıktılara verilecek ortak ağırlık kümesinin belirlenmesi ile hesaplanan etkinlik değeri ve üyelik fonksiyonu
Lertworasirikul	<ul style="list-style-type: none"> • Üyelik fonksiyonunun problemin başında karar verici tarafından tanımlanması şartı ile sınırlama yok 	<ul style="list-style-type: none"> • Tüm KVB'lerin $\mu \geq \alpha$'daki girdi ve çıktı verilerinin kullanılması durumunda, modele göre değişen etkinlik değeri
Lertworasirikul-Fang-Joines-Nuttle	<ul style="list-style-type: none"> • Üyelik fonksiyonunun problemin başında karar verici tarafından tanımlanması şartı ile sınırlama yok 	<ul style="list-style-type: none"> • Tüm kısıtların $\mu \geq \alpha$ olabilirliğinde olması durumunda $\mu \geq \alpha$'daki etkinlik değeri
Guo-Tanaka	<ul style="list-style-type: none"> • Simetrik üçgen 	<ul style="list-style-type: none"> • Tüm KVB'lerin $\mu \geq \alpha$'daki girdi ve çıktı verilerinin kullanılması durumunda, her KVB için önce girdilere sonra çıktılara verilecek ağırlıkların belirlenmesi ile hesaplanan etkinlik değeri ve üyelik fonksiyonu
Leon-Liern-Ruiz-Sirvent	<ul style="list-style-type: none"> • Yamuk 	<ul style="list-style-type: none"> • Tüm KVB'lerin $\mu = \alpha$'daki girdi ve çıktı verilerinin kullanılması durumunda, $\mu = \alpha$ üyelik derecesindeki etkinlik değeri

KAYNAKÇA

1. GUO P. – H. TANAKA, “Fuzzy DEA: A Perceptual Evaluation Method”, **Fuzzy Sets and Systems**, Volume: 119, s.149-160, 2001.
2. KAO C. ve S.T. LIU, “Fuzzy Efficiency Measures in Data Envelopment Analysis”, **Fuzzy Sets and Systems**, Volume: 113, s.427-437, 2000.
3. LEON T. – V. LIERN – J.L. RUIZ – I. SIRVENT, “A Fuzzy Mathematical Programming Approach to the Assessment of Efficiency with DEA Models”, **Fuzzy Sets and Systems**, Volume: 139, s.407-419, 2003.
4. LERTWORASIRIKUL S. – S.C. FANG – J.A. JOINES ve H.L.W. NUTTLE, “Fuzzy Data Envelopment Analysis (DEA): A Possibility Approach”, **Fuzzy Sets and Systems**, Volume: 139, s.390-392, 2003.
5. ORUÇ, K. O., **Veri Zarflama Analizi İle Bulanık Ortamda Etkinlik Ölçümleri ve Üniversitelerde Bir Uygulama**, Yayımlanmamış Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, Isparta, 2008
6. SAATI S. ve A. MEMARIANI, “Reducing Weight Flexibility in Fuzzy DEA”, **Applied Mathematics and Computation**, Volume: 161, s.811-822, 2005.
7. _____ ve G.R. JAHANSHALOO, “Efficiency Analysis and Ranking of DMU’s with Fuzzy Data”, **Fuzzy Optimization and Decision Making**, Volume: 1, s.255-267, 2002.
8. SOLEİMANİ-DAMANEH M., JAHANSHALOO G.R., ABBASBANDY S., “Computational and theoretical pitfalls in some current performance measurement techniques; and a new approach”, **Applied Mathematics and Computation**, Vol: 181, 2006, 1199–1207

EK Çizelge 1: Modellerin Etkinlik Değerlerinin Örnek ile Karşılaştırılması

Model	KVB	Etkinlik Değerleri				
		$\mu \geq 0$	$\mu \geq 0.25$	$\mu \geq 0.5$	$\mu \geq 0.75$	$\mu = 1$
Kao-Liu	KVB1	(0.9624, 1)	(1, 1)	(1, 1)	(1, 1)	1
	KVB2	(0.375, 1)	(0.4504, 1)	(0.5385, 1)	(0.6414, 0.8991)	0.7619
	KVB3	(0.3214, 1)	(0.3790, 0.9426)	(0.4448, 0.8122)	(0.5200, 0.7029)	0.6061
	KVB4	(0.3571, 1)	(0.5062, 1)	(0.6923, 1)	(0.9261, 1)	1
	KVB5	(0.5143, 1)	(0.6049, 1)	(0.7085, 1)	(0.8270, 1)	0.9629
Saati Memariani Jahanshahloo	KVB1	1	1	1	1	1
	KVB2	1	1	1	0.8991	0.7619
	KVB3	1	0.9426	0.8122	0.7029	0.6061
	KVB4	1	1	1	1	1
	KVB5	1	1	1	1	0.9629
Saati Memariani	KVB1	(0.313, 0.656, 1)	(0.331, 0.666, 1)	(0.314, 0.657, 1)	(0.314, 0.657, 1)	(0.314, 0.657, 1)
	KVB2	(0.221, 0.338, 0.455)	(0.238, 0.359, 0.480)	(0.229, 0.347, 0.465)	(0.229, 0.347, 0.465)	(0.230, 0.348, 0.466)
	KVB3	(0.167, 0.234, 0.3)	(0.181, 0.249, 0.318)	(0.178, 0.246, 0.313)	(0.178, 0.246, 0.314)	(0.179, 0.247, 0.315)
	KVB4	(0.342, 0.453, 0.564)	(0.338, 0.439, 0.541)	(0.345, 0.456, 0.568)	(0.345, 0.456, 0.568)	(0.345, 0.457, 0.568)
	KVB5	(0.170, 0.229, 0.287)	(0.197, 0.263, 0.329)	(0.186, 0.246, 0.306)	(0.187, 0.247, 0.308)	(0.188, 0.248, 0.308)
Lertworasirikul En İyi-En İyi	KVB1	1	1	1	1	1
	KVB2	0.6429	0.6741	0.7041	0.7333	0.7619
	KVB3	0.4714	0.5050	0.5385	0.5721	0.6061
	KVB4	0.8571	0.9671	1	1	1
	KVB5	0.75	0.8025	0.8552	0.9086	0.9629
Lertworasirikul En İyi-En Kötü	KVB1	1	1	1	1	1
	KVB2	1	1	1	0.8991	0.7619
	KVB3	1	0.9426	0.8122	0.7029	0.6061
	KVB4	1	1	1	1	1
	KVB5	1	1	1	1	0.9629
Lertworasirikul En Kötü-En İyi	KVB1	0.9624	1	1	1	1
	KVB2	0.375	0.4504	0.5385	0.6414	0.7619
	KVB3	0.3214	0.3790	0.4448	0.52	0.6061
	KVB4	0.3571	0.5062	0.6923	0.9261	1
	KVB5	0.5143	0.6049	0.7085	0.8270	0.9629
Lertworasirikul En Kötü-En Kötü	KVB1	1	1	1	1	1
	KVB2	0.8333	0.8173	0.8015	0.7859	0.7619
	KVB3	0.7337	0.6999	0.6683	0.6386	0.6061
	KVB4	1	1	1	1	1
	KVB5	1	1	1	1	0.9629
Lertworasirikul-Fang-Jönes-Nuttle Modeli	KVB1	1.5	1.3529	1.2222	1.1053	1
	KVB2	0.9	0.8667	0.8322	0.7971	0.7619
	KVB3	0.66	0.6492	0.6364	0.6218	0.6061
	KVB4	1.2	1.1818	1.1333	1.0645	1
	KVB5	1.05	1.0317	1.0107	0.9876	0.9629
Guo-Tanaka	KVB1	(0.333, 0.60, 1.4)	(0.523, 0.727, 1.178)	(0.717, 0.834, 1.028)	(0.853, 0.887, 0.931)	0.938
	KVB2	(0.233, 0.32, 0.45)	(0.297, 0.353, 0.428)	(0.354, 0.382, 0.417)	(0.401, 0.409, 0.418)	0.436
	KVB3	(0.225, 0.286, 0.367)	(0.276, 0.314, 0.362)	(0.322, 0.342, 0.364)	(0.360, 0.366, 0.371)	0.390
	KVB4	(0.500, 0.773, 1.2)	(0.652, 0.806, 1.062)	(0.793, 0.873, 0.984)	(0.915, 0.938, 0.965)	1
	KVB5	(0.720, 0.867, 1.05)	(0.807, 0.894, 0.997)	(0.878, 0.919, 0.964)	(0.931, 0.942, 0.953)	0.9629
Leon-Liern-Ruiz-Sirvent	KVB1	1	1	1	1	1
	KVB2	0.8333	0.8173	0.8015	0.7859	0.7619
	KVB3	0.7337	0.6999	0.6683	0.6386	0.6061
	KVB4	1	1	1	1	1
	KVB5	1	1	1	1	0.9629