Süleyman Demirel Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler
Fakültesi Dergisi
Y.2008, C.13, S.2 s.335-350.

Suleyman Demirel University
The Journal of Faculty of Economics
and Administrative Sciences
Y.2008, vol.13, No.2 pp.335-350.

PORTFÖY OPTİMİZASYONUNDA ORTALAMA MUTLAK SAPMA MODELİ VE MARKOWITZ MODELİNİN KULLANIMI VE İMKB VERİLERİNE UYGULANMASI

THE USE OF MEAN ABSOLUTE DEVIATION MODEL AND MARKOWITZ MEAN VARIANCE MODEL IN PORTFOLIO OPTIMIZATION AND THE APPLICATION OF THEM IN IMKB DATA

Araş.Gör. Filiz KARDİYEN*

ÖZET

Portföy teorisinin temelini oluşturan Markowitz'in Ortalama-Varyans Modelinin kullanımında büyük boyutlu veri kullanıldığında, işlem zorlukları ile karşılaşılması nedeniyle, alternatif bir çok model önerilmiştir. Ortalama Mutlak Sapma Modeli, bu amaçla önerilen bir portföy optimizasyon modelidir. Bu çalışmada Ortalama-Varyans Modeli ile Ortalama Mutlak Sapma Modeli teorik anlamda tanıtılmış, İMKB verileri ve bir simülasyon modeli için her iki modele ait sonuçlar karşılaştırmalı olarak incelenmiştir.

ABSTRACT

Markowitz's Mean-Variance Model, the basic of portfolio theory, have calculation difficulties when it is used with large scale data. A number of alternative models have been proposed to overcome this problem. Mean Absolute Deviation Model (MAD) is a portfolio optimization model proposed for this purpose. In this study, Markowitz's Model and MAD Model are theorically presented, the results obtained from these models using IMKB data and a simulation model are analyzed comparatively.

Markowitz Ortalama-Varyans Modeli, Ortalama Mutlak Sapma Modeli, Durağan Pareto Pazar.

Markowitz's Mean Variance Model, Mean Absolute Deviation Model, Stable Paretian Market.

* Gazi Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara

1. GİRİŞ

Geleneksel portföy optimizasyonu problemi, menkul kıymetler için getiri oranı ve risk arasında makul bir tercih ile bir yatırım planı oluşturmaktır. Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli, minimum riskli, belirli bir ortalama getiri oranını sağlayan portföy elde etmek için tek periyotlu statik bir modeldir. Markowitz'in çalışması temel alınarak, aynı problem için çok sayıda alternatif model önerilmiştir. Bu alternatif modellerin temel amacı, orijinal karesel programlama problemine ait hesaplama karmaşıklığının üstesinden gelmektir. Ortalama Mutlak Sapma (MAD) ve Minimax (MM) modelleri bu modellere verilebilecek örneklerdir.[1]

Markowitz'in 1950'li yıllarda doktora tezi olarak başladığı ve daha sonra portföy yönetiminin temel taşlarından biri olan çalışması ile portföy yönetimi anlayışında köklü değişiklikler olmuştur. Daha önceleri portföy yönetiminde esas ağırlık bireysel varlık seçimi üzerineyken, Markowitz ile beraber risk-getiri değişimi çerçevesinde varlıkların birbirleriyle ilişkisi ortaya konulmuş, dolayısıyla çeşitlendirme ve portföyün tümünün değerlendirilmesi gündeme gelmiştir.[2]

Markowitz'in portföy optimizasyon modeli, teorik anlamdaki ününe rağmen büyük boyutlu (large-scale) portföyleri oluşturmada yaygın olarak kullanılmamaktadır. Bunun en önemli nedeni, büyük boyutlu bir karesel problemin çözümünde karşılaşılan hesaplama zorluklarıdır. Ayrıca büyük boyutlu portföyler için, optimal çözümün yorumlanması konusunda da zorluklarla karşılaşılmaktadır.

1960'lı yıllardan itibaren bir çok araştırmacı [3,4], Markowitz'in Ortalama-Varyans Modelinin bahsedilen dezavantajlarını hafifletmek amacıyla çeşitli modeller geliştirmişlerdir. Hisse senedi fiyatlarını etkileyen faktörlerin dikkate alındığı indeks modellerin kullanımı, araştırmacılara işlem miktarını azaltma imkanı vermiştir. Sermaye varlıklarını fiyatlama ve arbitraj fiyatlama gibi varlık fiyatlarını açıklamaya yönelik denge modelleri ise oldukça popüler olmuştur. Sermaye Varlıklarını Fiyatlama Modeli, Markowitz'in kuramına dayanmaktadır ancak iki model arasında önemli farklar bulunmaktadır. Özellikle, denge modelleri pazar portföyü ile

---

1 Jong Soo KIM, Yong Chan KIM and Ki Young SHIN, "An Algorithm for Portfolio Optimization Problem", **Informatica**, C. 16, S. 1, 2005, s. 93.

2 Mustafa Özçam, **Varlık Fiyatlama Modelleri Aracılığıyla Dinamik Portföy Yönetimi**, Sermaye Piyasası Kurulu Yayınları, Ya. No. 104,Tisamat Basım Sanayi, Ankara 1997, s. 5.

3 William F. SHARPE , "A Simplified Model for Portfolio Analysis" , **Management Science**, C. 9, S.2, 1967, s. 277-293.

4 Bernell K. STONE, "A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Model", **Journal of Financial and Quantative Analysis**, C.8,1973, s. 621-636.

varlıkların getiri oranları arasındaki basit ilişkiyi elde etmek için gerçekçi olmayan varsayımlar gerektirmektedir.[5]

Konno ve Yamazaki [6] , Markowitz'in Ortalama-Varyans portföy seçim modeline alternatif olarak, bir portföy optimizasyon modeli olan Ortalama Mutlak Sapma (MAD) modelini önermişlerdir. MAD Modeli, Ortalama-Varyans Modelindeki amaç fonksiyonunda minimize edilmek üzere ele alınan varyans yerine ortalama mutlak sapmayı kullanmıştır. Böylece portföy seçim problemi, bir karesel programdan doğrusal programa dönüşmüştür.[7]

Markowitz'in Modeline alternatif olarak önerilen bir başka model de Young [8] tarafından geliştirilen Minimax portföy seçim modelidir. Bu modelde, portföy seçimi tarihi getiri verileri ile yapılmakta ve optimal portföy basit bir doğrusal programlama probleminin çözümü olarak elde edilmektedir. Prensip, minimum getirinin maksimize edilmesi ya da maksimum kaybın minimize edilmesi düşüncesine dayanmaktadır. Minimax Modelde riskin ölçüsü olarak ise varyans yerine minimum getiri kullanılmıştır.[9]

Bu çalışmada, Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli ile birlikte, bu modele alternatif olarak önerilen Ortalama Mutlak Sapma (MAD) Modeli tanıtılmış ve bu modeller İMKB hisse senetleri üzerinde uygulanarak, portföy performansları karşılaştırılmıştır. II. ve III. bölümde sözü edilen modellerin matematiksel gösterim ve işleyişlerine yer verilmiş, IV. Bölümde İMKB üzerinde bu modellerin uygulamaları yapılmış ve her iki modelle elde edilen en iyi portföyler için performans karşılaştırmaları bir durağan pazar için simülasyon modeli tasarlanarak elde edilmiştir.. Son bölümde ise tartışma ve sonuçlar yer almaktadır.

2. MARKOWİTZ'İN ORTALAMA-VARYANS MODELİ

Markowitz, modern portföy teorisinin kurucusu olarak kabul edilir. Orijinal kitabı ve makalesinde modern portföy teorisi ilk kez açıkça tanımlanmıştır. Kitap, alandaki gelişmelere temel oluşturan kavram ve öneriler içermektedir. Markowitz 1959'da yayınladığı bu eserinde, çok sayıda menkul kıymet içeren portföylerin analizi üzerinde durmuş ve menkul kıymet seçimi değil portföy seçimi üzerine yoğunlaşmıştır. Portföy problemini,

---

5 Hiroshi KONNO, Hiroaki YAMAZAKI, "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market ", **Management Science**, C.37, 1991, S.5, s. 519.

6 KONNO ,YAMAZAKİ , s. 519-531.

7 Yusif SIMAAN, "Estimation Risk in Portfolio Selection: The Mean Variance Model Versus the Mean Absolute Deviation Model", **Management Science**,C. 43, S.10,1997, s. 1437.

8 Martin R. YOUNG, "A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution", **Management Science**, C. 44, S. 5, 1998, s. 673.

9 YOUNG, s. 673.

varlıklardan oluşan portföyün ortalama ve varyansının seçim problemi olarak formüle etmiştir.[10]

Markowitz'e göre portföy analizi, bireysel menkul kıymetlerle ilgili bilgiyle başlar ve portföyün bütünüyle ilgili sonuçlarla son bulur. Bu analizin amacı yatırımcının amacıyla en iyi uyuşan portföyleri bulmaktır. Menkul kıymetlerin bireysel olarak geçmiş performansları önemli bir bilgi kaynağıdır. Ancak portföy seçimi yalnız geçmiş performanslara değil, gelecek hakkında makul inançlara da dayanmalıdır. Geçmiş performanslara dayanan seçimlerde, geçmiş getirilerin ortalamalarının gelecekteki muhtemel getiri için iyi tahminler olduğu ve getirinin geçmişteki değişkenliğinin gelecekteki belirsizliği için iyi bir ölçü olduğu varsayılır.

Markowitz'in ele aldığı önemli bir nokta da, menkul kıymetlerin göze çarpan bir özelliği olan getiriler arasındaki ilişkidir. Bu teorinin önemli mesajı, varlıkların yalnızca menkul kıymetlerin kendi özeliklerine göre seçilmemeleri gerektiğidir. Bunun yerine, bir yatırımcı her menkul kıymetin diğer menkul kıymetlerle olan karşılıklı hareketlerini de dikkate almalıdır. Birçok ekonomik nicelik gibi, menkul kıymetlerin getirileri de birlikte artıp, azalma eğilimindedir. Bu korelasyon mükemmel değildir. Eğer menkul kıymet getirileri ilişkili değilse, çeşitlendirme riski elimine edebilir. Tüm menkul kıymetlerin getirileri mükemmel bir uyum içinde artıp, azaldığı durumda ise çeşitlendirme riski elimine etmek için bir şey yapamaz. [11]

Markowitz istenilen risk düzeyinde maksimum getiriyi sağlayan ya da istenilen getiri düzeyinde minimum riske sahip portföylere etkin portföy, risk-getiri grafiğinde etkin portföyleri birleştiren eğriye ise etkin sınır adını vermiştir. Modelin varsayımları; yatırımcıların riskten kaçan bireyler oldukları ve yatırımların olasılık dağılımlarının yaklaşık normal olduğudur.

Birden fazla menkul kıymetten oluşan bir portföyün beklenen getirisi ve riski (1) ve (2) nolu formüller ile hesaplanmaktadır:

$$E(r_p) = \sum_{i=1}^{n} E(r_i)\, x_i \qquad (1)$$

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \operatorname{cov}(r_i, r_j)\, x_i\, x_j \qquad (2)$$

x_i : i menkul kıymetinin portföydeki oranı

$E(r_p)$: portföyün beklenen getirisi

σ_p^2 : portföy varyansı (riski)

---

[10] Edwin J. ELTON, Martin J. GRUBER, " Modern Portfolio Theory, 1950 to Date" , **Journal** of Banking and Finance, C. 21, 1997, s.1744.

[11] Harry M. MARKOWITZ, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment**, New York, Wiley, 1959,s.3-5.

$E(r_i)$: i menkul kıymetinin beklenen getirisi

$\operatorname{cov}(r_i, r_j)$: i ve j menkul kıymetlerinin getirilerinin kovaryansı

n : mevcut menkul kıymet sayısı

İki menkul kıymetten oluşan bir portföyün riskini veren formül (3)' te verilmiştir:

$$\sigma_p^2 = x_i^2 \sigma_i^2 + x_j^2 \sigma_j^2 + 2 x_i x_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} \tag{3}$$

ρ_{ij} : i ve j menkul kıymetlerinin getirileri arasındaki korelasyon katsayısı

Markowitz'in etkin sınırını elde etmek için amaç fonksiyonu ve kısıtlar (4)'te verilmiştir:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

kısıtlar

$$\sum_{i=1}^{n} x_i E(r_i) \geq R \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \; i = 1, 2, ..., n$$

R: hedeflenen beklenen getiri düzeyi

Modelde portföy riski, portföy beklenen getirisinin belirli bir hedef getiri düzeyine eşit yada bu düzeyden büyük olması, menkul kıymetlere portföy içinde verilen ağırlıkların sıfır ile bir arasında olması ve bu ağırlıkların toplamlarının bire eşit olması kısıtları altında minimize edilmektedir.

Hedeflenen getiri düzeyinin değişik değerleri için, yukarıdaki karesel programın çözülmesi ile her R değeri için en küçük varyanslı portföy elde edilir. [12]

3. ORTALAMA MUTLAK SAPMA (MAD) MODELİ

Konno [13], 1988 yılındaki çalışmasında, önerdiği yeni bir portföy optimizasyon modeli ile Markowitz'in modelini teorik ve hesaplama anlamında geliştirerek, karesel programlamanın getirdiği geniş portföylerdeki hesaplama zorluklarını doğrusal programlama ile aşmaya çalışmıştır.

---

[12] Harry M.MARKOWITZ, **Mean-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets**, New York, Basil Blackwell, 1987, s. 3-4.

[13] KONNO , YAMAZAKI, s. 519-531.

Önerilen bu modelde risk, portföy getirisinin varyans veya standart sapma fonksiyonu yerine mutlak sapma fonksiyonu ile ifade edilmiştir.

$$w(x) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] \qquad (5)$$

Burada, E[.] parantez içindeki rasgele değişkenin beklenen değerini göstermektedir. R_j : j varlığının getiri oranı, x_j : j varlığına yatırılacak olan miktar olmak üzere, $w(x)$: riski temsil eden ve minimize edilecek olan getirilerin ortalama mutlak sapma fonksiyonunu ifade etmektedir.

Varlık getirilerinin ortak olasılık dağılımı normal dağılım ise, portföy getirileri tek değişkenli normal dağılıma sahip olacaktır. Konno ve Yamazaki [14], normal dağılımın ortalama mutlak sapmasının standart sapması ile orantılı olduğunu göstermişlerdir. Sonuç olarak, varlık getirilerinin ortak normalliği altında, MAD Modeli ile Markowitz Modeli aynı etkin seti vermektedir. Bu, $(R_1, R_2, ..., R_n)$ getiri oranları, çok değişkenli normal dağılıma sahip iseler iki ölçü aynıdır. Yani $(R_1, R_2, ..., R_n)$ getiri oranları çok değişkenli normal dağıldıklarında, $w(x)$ fonksiyonunu minimize etmenin $\sigma(x)$ fonksiyonunu minimize etmek olduğu anlamına gelmektedir.[15]

$$\begin{aligned} &\text{minimize } w(x) = E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} E(R_j) x_j \geq \rho M_0 \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ &\qquad 0 \leq x_j \leq u_j \qquad j = 1, ..., n \end{aligned} \qquad (6)$$

R_j : rasgele değişken, j varlığının getiri oranı

x_j : M_0 toplam paradan, j varlığına yatırılacak olan para miktarı

u_j : j varlığına yatırılabilecek maksimum para miktarı

ρ : yatırımcının istediği minimal getiri oranı

M_0 : yatırım yapılacak toplam para miktarı

r_{jt} : t zaman periyodu $(t = 1, ..., T)$ için getiri oranıdır ve bu getiri oranının tarihi verilerden veya bazı gelecek ile ilgili tahminlerden elde edilebilir olduğu varsayılır. Ayrıca, rasgele değişkenin beklenen değerinin bu verilerden elde edilen ortalamaya yakınsayacağı da varsayılır.

[14] KONNO, YAMAZAKI, s. 519-531.
[15] SIMAAN, s.1437.

$$r_j = E\left(R_j\right) = \sum_{t=1}^{T} r_{jt} \Big/ T \tag{7}$$

olsun. Bu durumda $w(x)$, (8)'deki gibi olur:

$$E\left[\left|\sum_{j=1}^{n} R_j x_j - E\left[\sum_{j=1}^{n} R_j x_j\right]\right|\right] = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n}\left(r_{jt} - r_j\right) x_j\right| \tag{8}$$

$a_{jt} = r_{jt} - r_j$, $j = 1,...,n$, $t = 1,...,T$ olsun.

$$\begin{aligned} &\min imize\, w(x) = \sum_{t=1}^{T}\left|\sum_{j=1}^{n} a_{jt}\, x_j\right| \Big/ T \\ &\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} r_j\, x_j \geq \rho M_0 \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ &\qquad 0 \leq x_j \leq u_j \qquad j = 1,...,n \end{aligned} \tag{9}$$

Bu durumda problem, (9)'da verilen en küçükleme problemine dönüşür:

Bu model, (10)'da verilen doğrusal programlama modeline denktir:

$$\begin{aligned} &\min imize\, w(x) = \sum_{t=1}^{T} y_t \Big/ T \\ &\text{s.t.} \quad y_t + \sum_{j=1}^{n} a_{jt}\, x_j \geq 0, \quad t = 1,...,T \\ &\qquad y_t - \sum_{j=1}^{n} a_{jt}\, x_j \geq 0, \quad t = 1,...,T \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} r_j\, x_j \geq \rho M_0 \\ &\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = M_0 \\ &\qquad 0 \leq x_j \leq u_j \qquad j = 1,...,n \end{aligned} \tag{10}$$

Modelin amaç fonksiyonunda, her bir periyotta ortalama sapmalar minimize edilmektedir.

Bu modelin bazı avantajları şunlardır:

- Modeli kurmak için varyans-kovaryans matrisi hesaplanmak zorunda değildir. Ayrıca, yeni veri eklendiğinde, modeli güncellemek oldukça kolaydır.

- Doğrusal bir programı çözmek diğerlerine göre daha kolaydır. Ayrıca modelde içerilen menkul kıymet sayısı ne olursa olsun, fonksiyonel kısıtların sayısı sabit kalır, böylece binden fazla varlık için problem çözülebilir.
- Modelin bir optimal çözümü $x^* = \left(x_1^*, ..., x_n^*\right)$ eğer $u_j = \infty$, $j = 1, ..., n$ ise en fazla 2T+2 pozitif bileşen içerir. Bu, bir optimal portföyün n hangi genişlikte olursa olsun en fazla 2T+2 varlıktan oluşacağı anlamına gelir. Diğer yandan Markowitz Modeli ile elde edilen portföy n kadar varlık içerebilir. N, 1000'in üzerinde olduğunda aradaki fark oldukça fazladır.
- Portföydeki varlık sayısını kısıtlamak istediğimizde, T kontrol değişkeni olarak kullanılabilir.[16]

Modelin bu avantajlarının yanı sıra, varyans-kovaryans matrisini görmezden gelmenin faydasından daha önemli büyük tahmin risklerine yol açtığı görüşleri de yer almaktadır.

4. UYGULAMALAR

Bu bölümde, Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli ve MAD Modeli İMKB'den elde edilen gerçek bir veri setine ve simülasyon ile üretilmiş veri setlerine uygulanarak, her iki modelin portföy seçimindeki performansları incelenmiştir.

4.1. İMKB Verisi

Gerçek veri çalışmasında, 2000-2005 yılları arasında İMKB-50 endeksinde yer alan hisse senetlerinden 15 tanesi rasgele seçilerek, bu hisse senetlerinin Haziran 2000 –Aralık 2003 dönemleri arasındaki aylık getiri değerleri kullanılmış ve bu tarihi getiri verisine MAD Modeli ve Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli uygulanmıştır. Hesaplamalar çeşitli aylık hedef beklenen getiri değerleri için yapılmıştır. Çalışmada kullanılan hisse senetleri ; Ak Sigorta (AKGRT), Arçelik (ARCLK), Aygaz (AYGAZ), Beko (BEKO), Doğan Holding (DOHOL), Finansbank (FINBN), Garanti Bankası (GARAN), Gima (GIMA), Hürriyet Gazetesi (HURGZ), Kardemir (KRDMD), Migros (MIGRS), Petrol Ofisi (PTOFS), Sabancı Holding (SAHOL), Tansaş (TNSAS), Trakyacam (TRKCAM) dır.

Değişik hedef getiri düzeyleri için, hisse senetlerinin portföyde yer alma oranları Markowitz Modeli ve MAD Modeli için Tablo 1 ve Tablo 2 'de verilmiştir.

[16] KONNO, YAMAZAKI,s. 520-525.

Tablo 1:Markowitz Ortalama-Varyans Modeli Analiz Sonuçları

HİSSE SENEDİ	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
AKGRT	0	0	0	0,0007	0,05	0,04	0	0	0	0
ARCLK	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AYGAZ	0,04	0,04	0	0	0	0	0	0	0	0
BEKO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,02
DOHOL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FINBN	0,01	0,01	0,04	0,09	0,13	0,15	0,20	0,23	0,25	0,26
GARAN	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
GIMA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
HURGZ	0	0	0	0	0	0,04	0,20	0,37	0,54	0,72
KRDMD	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
MIGRS	0,64	0,64	0,57	0,37	0,17	0	0	0	0	0
PTOFS	0	0	0	0,0023	0,005	0,004	0	0	0	0
SAHOL	0	0	0	0	0	0,045	0	0	0	0
TNSAS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TRKCAM	0,31	0,31	0,39	0,53	0,65	0,71	0,60	0,40	0,20	0
HEDEF GETİRİ	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035	0,04	0,045	0,05	0,055

Tablo 2: MAD Ortalama Mutlak Sapma Modeli Analiz Sonuçları

HİSSE	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
AKGRT	0	0	0	0	0	0,0004	0	0	0	0
ARCLK	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
AYGAZ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
BEKO	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
DOHOL	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
FINBN	0	0	0,02	0,06	0,06	0,05	0,10	0,09	0,07	0,054
GARAN	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0,005
GIMA	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
HURGZ	0	0	0	0	0,12	0,25	0,25	0,42	0,61	0,80
KRDMD	0	0	0	0	0	0,02	0	0	0	0
MIGRS	0,58	0,58	0,57	0,35	0,25	0,17	0	0	0	0
PTOFS	0	0	0	0,02	0,08	0,13	0,04	0	0	0
SAHOL	0	0	0	0	0	0,02	0	0	0	0
TNSAS	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
TRKCAM	0,42	0,42	0,41	0,57	0,49	0,36	0,61	0,49	0,32	0,14
HEDEF GETİRİ	**0,01**	**0,015**	**0,02**	**0,025**	**0,03**	**0,035**	**0,04**	**0,045**	**0,05**	**0,055**

İMKB verilerine her iki modelin uygulanması sonucunda elde edilen portföylerin getiri ve varyansları (riskleri) Tablo-3'te yer almaktadır.

Tablo 3: Markowitz ve MAD Modeli ile İMKB Verilerinden Elde Edilen Portföylerin Getiri ve Varyansları

Portföy	Hedef getiri	Markowitz Modeli		MAD Modeli	
		Getiri	**Varyans**	**Getiri**	**Varyans**
P_1	0,010	0,0177	0,0189	0,0194	0,0190
P_2	0,015	0,0177	0,0189	0,0194	0,0190
P_3	0,020	0,0200	0,0190	0,0200	0,0190
P_4	0,025	0,0250	0,0202	0,0250	0,0202
P_5	0,030	0,0300	0,0226	0,0300	0,0234
P_6	0,035	0,0350	0,0260	0,0350	0,0294
P_7	0,040	0,0400	0,0311	0,0400	0,0318
P_8	0,045	0,0450	0,0391	0,0450	0,0401
P_9	0,050	0,0500	0,0501	0,0500	0,0518
P_{10}	0,055	0,0550	0,0641	0,0550	0,0670

Tablo 3 incelendiğinde, Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli ve MAD Modeli ile elde edilen portföylerin getirilerinin genelde birbirleriyle aynı ya da çok yakın oldukları gözlenmektedir. Portföy varyansları incelendiğinde ise, Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli ile elde edilen portföylerin MAD Modeli ile elde edilen portföylerle ya aynı ya da daha küçük varyansa sahip oldukları görülmektedir.

Modellerin İMKB verisine uygulanması ile elde edilen bu sonuçların, denemelerin daha farklı hisse senedi sayısı, zaman periyodu sayısı ve bir durağan dağılım varsayımı altında tekrarlanması halinde sonuçların nasıl olacağını görmek amacıyla bir sonraki bölümde bir simülasyon modeli kurulmuş ve uygulanmıştır.

4.2. Simülasyon Çalışması

Bir rasgele değişkenin hareketini karakterize etmenin ve özetlemenin en uygun yöntemi, onu dağılım fonksiyonu ile tanımlamaktır. Gerçekte herhangi bir analitik fonksiyon, bir değişkenin dağılımına tam olarak uysa bile, hangi özel fonksiyonun değişkenin dağılımını belirleyeceği hakkında doğal bir kural yoktur. Pratikte, örnekleme dağılımının özellikleri dağılım fonksiyonunun özellikleri ile karşılaştırılarak uygun bir fonksiyon şeçilebilmektedir. Menkul kıymet getirilerinin dağılımı da portföy yönetimi içerisinde incelenen ve araştırılan bir konudur.[17]

1960'lı yıllara kadar genellikle fiyat değişimlerinin normal dağılıma uyduklarına inanılmaktaydı ve üzerinde araştırma ve çalışmaların yoğunluk

[17] R.R. OFFICER, The Distribution of Stock Returns**, Journal of American Statistical Association**, C. 67, S. 340, 1972, s. 807.

kazandığı modern portföy kuramı bu varsayım üzerine kurulmuştur. Ancak spekülatif fiyat hareketlerinden kaynaklanan hisse senetlerindeki aşırı düşüş ve yükselişler normal dağılım varsayımını zorlamaktadır. Durağan dağılımlar ise normal dağılıma göre uçdeğerleri bünyesinde bulundurma olasılığı daha yüksek olan dağılımlardır. Kalın kuyruk (fat-tailed) tipindeki durağan dağılımlar bunlara iyi örnektir.[18]

Çalışmanın bu bölümünde amaç, ele alınan portföy seçim yöntemlerin performanslarını menkul kıymet getirilerinin dağılım özelliklerini de dikkate alarak, değişik parametreler için tekrarlanan denemelerde gözlemleyerek, karşılaştırmalı sonuçlar elde etmektir.

Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli ile MAD Modeli için getiri oranları çok değişkenli normal dağılıma sahip iseler, iki ölçünün aynı olduğuna değinilmişti. Normal dağılıma bir alternatif olarak önerilen durağan dağılımların portföy analizinde kullanılması yukarıda da değinildiği gibi bir takım avantajları beraberinde getirmektedir. Getirilere ilişkin aykırı ve uç değerleri bünyesinde tutma olasılığının yüksek oluşu ve doğrusal birleşimlerin durağan dağılımlar altında incelenmesinin daha kolay oluşu (portföylerin de menkul kıymetlerin doğrusal birleşimleri olması nedeniyle bu özellik önemlidir) bu tür dağılımların iki önemli avantajıdır. Bu nedenlerle simülasyon çalışması getirilerin simetrik durağan Pareto dağılımının özel bir türü olan Cauchy dağılımına sahip olduğu varsayımı altında gerçekleştirilmiştir.

4.2.1. Durağan Pareto Dağılımı

Durağan Pareto dağılımları α,β,δ ve γ olmak üzere dört parametreye sahiptir. α parametresi dağılımın karakteristik üssü olarak tanımlanır. Bu parametre dağılımın extrem kuyruklarının yüksekliğini belirler ve 0 ile 2 arasında değerler alır.($0 < \alpha \leq 2$) $\alpha = 2$ olduğunda ilgili Perto dağılımı normal dağılıma dönüşür. $0 < \alpha < 2$ olduğunda, durağan pareto dağılımının extrem kuyrukları normal dağılımınkinden yüksek olur. Dağılımın ancak $\alpha = 2$ iken varyansı ve $\alpha > 1$ iken ortalaması vardır.

β parametresi -1 ile 1 arasında herhangi bir değeri alabilen bir çarpıklık indeksidir ($-1 \leq \beta \leq 1$). $\beta = 0$ olduğunda dağılım simetriktir. $\beta > 0$ olduğunda dağılım sağa çarpık, $\beta < 0$ olduğunda dağılım sola çarpıktır.

δ parametresi durağan Pareto dağılımının konum parametresidir. $\alpha > 1$ olduğunda, δ dağılımın beklenen değeri veya ortalaması olur. $\alpha \leq 1$ olduğunda ise dağılımın ortalaması sonsuzdur. Bu durumda δ, dağılımın konumunu belirleyecek başka bir parametre olacaktır (örneğin; $\beta = 0$ iken medyan).

---

[18] İbrahim E. ÜSTÜNEL, **Durağan Portföy Analizi ve İMKB Verilerine Uygulanması ,** İstanbul**,** , İMKB Yayınları, 2000, s.75-76

γ parametresinin değeri durağan Pareto dağılımının ölçüsünü belirler. Örneğin, $\alpha = 2$ iken (normal dağılım), γ varyansın 1.5 katıdır. $\alpha < 2$ iken, durağan Pareto dağılımının varyansı sonsuz olur. Bu durumda dağılımın ölçüsünü belirleyen sonlu bir γ parametresi olacaktır ancak bu varyans olmayacaktır. Örneğin, $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ iken (Cauchy dağılımı), γ çeyrek ayrılıştır.

Durağan Pareto dağılımının portföy analizi için anahtar özelliği durağan olmasıdır. Bir durağan Pareto dağılımı, herhangi bir toplam altında sabit ya da durağan olan dağılımdır. Bunun anlamı; bağımsız ve aynı dağılımlı durağan Pareto değişkenlerinin toplamlarının dağılımı durağan Pareto dağılımı olmalı ve bireysel toplama elemanlarının dağılımlarıyla aynı formda olmalıdır. Daha basit olarak durağanlık, toplama işlemi α ve β parametrelerinin değerlerinin sabit kalması anlamına gelir.[19]

4.2.2. Portföy Analizi Modeli

Durağan bir Pareto market için genel bir portföy modeli oluşturulmak istendiğinde, iki problemle karşılaşılmaktadır. Bu problemlerden birincisi, getirilerin dağılımlarının karakteristik üssü α parametresinin değerinin 2'den küçük olması durumunda bu dağılımların varyansları sonsuz olur ve bu durum dağılma ölçüsü olarak başka bir parametrenin kullanılması gerekliliğini ortaya çıkarır. γ parametresi bu anlamda en doğal adaydır. İkinci problem, $\alpha < 2$ iken kovaryansın iyi tanımlı bir istatistiksel kavram olmadığı görülebilir. Bu nedenle bir durağan Pareto portföy modeli kurulduğunda menkul kıymetler arası ilişkiyi tanımlamada kovaryans kavramından kaçınmalıdır.

N tane menkul kıymetten oluşan bir pazar düşünülsün. Getiri dağılımlarının $\alpha = 1$ ve $\beta = 0$ parametrelerine sahip durağan Pareto dağılımının özel bir hali olan Cauchy Dağılımına sahip oldukları varsayılmıştır. i menkul kıymetinin getirisi R_i ve her bir R_i kendi olasılık dağılımına sahip rasgele değişkendir. Farklı menkul kıymetlerin getirilerinin, birbirleriyle ilişkili olanların modelde I ile gösterilen ve kendi olasılık dağılımına sahip ortak bir faktörle (pazar faktörü) ilişkili olmalarından kaynaklandığı varsayılsın. Bu durumda model aşağıdaki gibidir:

$$R_i = A_i + b_i I + C_i \qquad i = 1,2,...,N \tag{11}$$

b_i, R_i getirisi ile I endeks sayısı arasındaki ilişkinin bir ölçüsüdür. C_i modelde rasgele hatayı ifade eden rasgele değişkendir. Bu terimlerin beklenen değerinin sıfır ($E(C_i) = 0$, $i = 1,2,...,N$) olduğu ve farklı menkul kıymetler için ilişkisiz oldukları varsayılır.

I ve C_i değişkenlerinin Cauchy dağılımına sahip, birbirinden bağımsız rasgele değişkenler oldukları varsayılsın. O halde

[19] Eugene. F. FAMA, " Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market", **Management Science**,C. 11, S. 3, 1965, s. 404-406.

$$D_i = A_i + C_i \tag{12}$$

şeklinde tanımlanacak yeni değişkenler de beklenen değeri A_i, $i = 1,2,...,N$ olan Cauchy dağılımına sahip olacaktır. $b_i I$ terimi i menkul kıymetinin getirisinin pazar bileşeni olarak düşünüldüğünde, D_i getirinin, yalnız firmayı etkileyen faktörlerden kaynaklanan kısmını ifade eden bireysel bileşeni olarak düşünülebilir. Model yeniden aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$R_i = D_i + b_i I \tag{13}$$

Menkul kıymet getirileri Cauchy değişkenlerin doğrusal bileşeni olarak ifade edildiğinden, yine Cauchy dağılımına sahip bir değişkendir.

Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli ile MAD Modeli sonuçlarını normallik varsayımı olmadığında incelemek amacıyla düzenlenen simülasyon çalışması için portföy analizi modeli kurulmasının ardından, değişik dağılım parametreleri için denemeler gerçekleştirilmiştir. Çalışmanın ilk aşamasında, aynı sayıda menkul kıymet, zaman periyodu ve aynı dağılım parametrelerine sahip olacak şekilde, getiriler için 250 adet Cauchy dağılımına sahip veri seti üretilmiştir. D_i ve I değişkenleri, $\gamma = 0.03$, $\delta = 0.001$ parametreli ve $\gamma = 0.14$, $\delta = -0.05$ parametreli Cauchy dağılımlarından üretilmişler, b_i değerleri ise deneysel bulgulardan yola çıkılarak -0.01 ile 0.01 aralığından rasgele seçilmiştir. Bu adımlar sonucunda, durağan bir market elde edilmiş olur.

Ardından, üretilen bu veri setleri için Markowitz Modeli ve MAD modeli uygulandıktan sonra elde edilen portföy beklenen getirileri ve varyanslarına ilişkin hipotez testleri gerçekleştirilmiştir. 1. hipotez testinde; H_0: Markowitz Modeli ile elde edilen portföylerin beklenen getirileri ile MAD Modeli ile elde edilen portföylerin beklenen getirileri benzer dağılıma sahiptir hipotezi, H_1: Markowitz Modeli ile elde edilen portföylerin beklenen getirileri, MAD Modeli ile elde edilen portföylerin beklenen getirilerinden büyük olma eğilimindedir hipotezine karşı test edilmiştir. 2. hipotez testinde ise; H_0: Markowitz Modeli ile elde edilen portföylerin varyansları ile MAD Modeli ile elde edilen portföylerin varyansları benzer dağılıma sahiptir hipotezi, H_1: Markowitz Modeli ile elde edilen portföylerin varyansları, MAD Modeli ile elde edilen portföylerin varyanslarından küçük olma eğilimindedir hipotezine karşı test edilmiştir. Her iki hipotez testi için de Mann Whitney U Test istatistiği kullanılmış ve bu işlemler 100 kez tekrar edildikten sonra, hipotezleri reddetme oranları hesaplatılmıştır. Bütün hesaplamalar için MATLAB 7.5 paket programı kullanılmıştır. Her bir denemeye ilişkin parametreler ve hipotez testlerinin sonuçları Tablo 4 de yer almaktadır:

Tablo 4: Simülasyon Sonuçları

		$\gamma = 0.03$ $\delta = 0.001$		$\gamma = 0.14$ $\delta = -0.05$	
Menkul kıymet sayısı (n)	**Zaman periyodu sayısı (T)**	**1. hip. red oranı**	**2. hip. red oranı**	**1. hip. red oranı**	**2. hip. red oranı**
n=4	12	0	1	0.19	0.72
	24	0	0.84	0.36	0.77
	36	0	0.84	0.36	0.73
	48	0	0.95	0.47	0.67
n=6	12	0	0.86	0	0.90
	24	0	0.92	0	0.83
	36	0	0.97	0	0.91
	48	0	0.95	0	0.91
n=8	12	0	0.96	0	0.95
	24	0	1	0	0.93
	36	0	0.99	0	0.99
	48	0	0.95	0	0.93
n=10	12	0	0.98	0	0.94
	24	0	1	0	0.95
	36	0	1	0	0.96
	48	0	1	0	0.98

Tabloda 1. hipotez testi sonuçları incelendiğinde, $\gamma = 0.03$ ve $\delta = 0.001$ parametreli Cauchy dağılımıyla elde edilen portföyler için, 1. hipotezin hiçbir zaman reddedilmediği görümektedir. $\gamma = 0.14$ ve $\delta = -0.05$ parametreli Cauchy dağılımı için ise menkul kıymet sayısının 4 olduğu durum dışında (ki bu durumda denemelerin yarısından çoğunda yine aynı sonuç söz konusudur), aynı sonuç gerçekleşmiştir. Portföy varyanslarına ilişkin 2. hipotez testi sonuçlarına bakıldığında ise; yine 2. dağılımda n=4 olduğu durum dışında (ki bu değerler de oldukça yüksektir) H_0 hipotezi yüksek oranlarda reddedilmiş ve denemelerin büyük çoğunluğunda Markowitz Modeli ile elde edilen portföy varyanslarının, MAD Modeli ile elde edilen portföy varyanslarından küçük olma eğiliminde olduğu sonucuna varılmıştır.

5. SONUÇ

Markowitz'in portföy yönetimi anlayışında köklü değişiklikler yaratan Ortalama-Varyans Modeli risk-getiri değişimi çerçevesinde varlıkların birbirleriyle ilişkisini ortaya koyan, dolayısıyla çeşitlendirme ve portföyün tümünün değerlendirilmesini gündeme getiren ve günümüzde halen kullanılabilirliği olan bir karesel programlama modelidir. Bu modelin büyük boyutlu portföyler için kullanımındaki zorlukları aşmak için zaman içinde önerilen bir çok modelden biri de Konno ve Yamazaki[20] tarafından önerilen MAD Modelidir. MAD Modeli, riskin varyans yerine ortalamadan mutlak sapma ile ifade edildiği bir doğrusal programlama modelidir.

Bu çalışmada, her iki model teorik olarak tanıtılmış, hem gerçek veri hem de simülasyon verisi için birbirileriyle karşılaştırılmıştır. Gerçek veri çalışmasında, İMKB-50 endeksinde yer alan hisse senetlerinden 15 tanesinin arasındaki Haziran 2000 –Aralık 2003 dönemleri arasındaki aylık getiri değerleri kullanılmış ve bu verilere her iki modelin uygulanması ile değişik hedef getiri düzeyleri için portföyler elde edilmiştir. İMKB verisi ile yapılan bu çalışmanın genellenebilir nitelikte olup olmadığını araştırmak, farklı parametreler için sonuçlarda meydana gelecek değişimleri incelemek için ise kapsamlı bir simülasyon modeli tasarlanmıştır.

Simaan[21] çalışmasında, gerçekçi şartlar altında MAD Modeli ve MV modeli iki farklı etkin setler vereceklerini, bunun her modelin farklı örnek istatistiklerinden yararlanmasından ve sonuç olarak aynı örnekten çekilen farklı bilgi setine dayanmasından kaynaklandığını vurgulamıştır. Markowitz'in Ortalama-Varyans Modelinde kullandığı örnek ortalama vektörü ve örnek kovaryans matrisinin ortak normal dağılım için ortak yeterli istatistikler olmak gibi bir üstünlükleri olduğunu belirtmiş, MAD Modelinde kovaryans matrisini göz ardı etmenin büyük tahmin hatasına yol açacak bir bilgi kaybı ile sonuçlanacağını ileri sürmüştür.

Gerçek veri ve simülasyon çalışmaları bu görüşe paralel sonuçlanmıştır. İMKB verisi ile yapılan çalışma sonucunda, Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli ve MAD Modeli ile elde edilen portföylerin getirilerinin genelde birbirleriyle aynı ya da çok yakın oldukları, Markowitz Modeli ile elde edilen portföylerin MAD Modeli ile elde edilen portföylerle ya aynı ya da daha küçük varyansa sahip oldukları görülmüştür. Durağan Pareto dağılımına sahip bir pazar için tasarlanan simülasyon çalışması sonucunda elde edilen sonuçların ise gerçek veri çalışmasının sonuçlarını destekler nitelikte olduğu görülmüştür.

Getiriler için normal dağılım varsayımı sağlandığında iki model birbiri yerine kullanılabilmektedir. Bu çalışma sonucunda, riskten kaçan bir yatırımcıya portföy seçim problemini MAD Modeli yerine, Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli ile çözmesi önerilebilir. Her iki modelin portföy getirileri bazında farklı sonuçlar vermemesi nedeniyle, risk sever bir yatırımcıya kullanımındaki pratiklik, işlem yükünün az olması, dağılım varsayımı gerektirmemesi gibi nedenlerle MAD Modeli ile portföy seçimi yapması önerilebilir.

[20] KONNO ,YAMAZAKI,s. 519-531.

[21] SIMAAN, s. 1437-1446.

KAYNAKÇA

1. ELTON, Elton J. and GRUBER, Martin J., " Modern Portfolio Theory, 1950 to Date" , **Journal of Banking and Finance 21**, 1997.
2. FAMA, Eugene. F., " Portfolio Analysis in a Stable Paretian Market", **Management Science 11**, No.3, 1965.
3. KIM, Jong S. , KIM, Yong C. and SHIN, Ki Y., "An Algorithm for Portfolio Optimization Problem", **Informatica 16**, No. 1, 2005.
4. KONNO, Hiroshi. and YAMAZAKI, Hiroaki, "Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Applications to Tokyo Stock Market ", **Management Science 37**, No.5, 1991.
5. MARKOWITZ, Harry, **Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment**, Wiley, New York, 1959.
6. MARKOWITZ, Harry, Mean**-Variance Analysis in Portfolio Choice and Capital Markets**, Basil Blackwell, New York, 1987.
7. OFFICER R.R., The Distibution of Stock Returns, **Journal of American Statistical Association 67**, No.340, 1972.
8. ÖZÇAM, Mustafa. **Varlık Fiyatlama Modelleri Aracılığıyla Dinamik Portföy Yönetimi**, Sermaye Piyasası Kurulu Yayınları, Ankara, 1997.
9. SHARPE, William F., "A Simplified Model for Portfolio Analysis" , **Management Science 9**, No. 2, 1967.
10. SIMAAN, Yusif., "Estimation Risk in Portfolio Selection: The Mean Variance Model Versus the Mean Absolute Deviation Model", **Management Science 43**, No.10, 1997.
11. STONE, Bernell K., "A Linear Programming Formulation of the General Portfolio Selection Model" , **Journal of Financial and Quantative Analysis**, **8**, 1973.
12. ÜSTÜNEL, İbrahim E., **Durağan Portföy Analizi ve İMKB Verilerine Uygulanması**, İMKB Yayınları, İstanbul, 2000.
13. YOUNG, Martin R., "A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution", **Management Science 44**, No. 5, 1998.
14. İMKB, "İMKB Şirketleri Aylık Fiyat ve Getiri Verileri", **http://www.imkb.gov.tr/sirket/fiyat_getiri.htm** (14.07.2006), (2006).