Süleyman Demirel Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi
Y.2005, C.10, S.1 s.77-84.

PİYASA FİYATI DEĞİŞİMİNİ AÇIKLAYAN MODELLER

MODELS EXPLAINING MARKET PRICE CHANGES

Doç.Dr.Sırgak KIDIRALİYEV*
Doç.Dr.Anarkül URDALETOVA**

ÖZET

Makalede, talep ve arz fonksiyonlarının değişimi sonucunda piyasa fiyatı değişimini tarif eden modellere karşı standart olmayan yaklaşımlar sunulmaktadır.

Birinci bölümde piyasaya giren ek mal miktarının arz edilmesi sonucunda ortaya çıkan durum incelenmiştir. İkinci bölümde ise, birinci derecedeki doğrusal fark denklemlerin tanımı verilmiş ve çözüm formülü geliştirilmiştir.

Bu denklemler, Örümcek ve Evans modellerine dayanarak piyasa fiyatının nasıl oluştuğunu açıklamak için üçüncü ve dördüncü bölümlerde kullanılmıştır.

ABSTRACT

The article deals with the non-standard approach to several price changing models concerning the character of market prices depending on demand and supply.

The first paragraph considers the situation when some additional goods are thrown on the market.

In the second paragraph the definition of linear difference equations and the formula of their solution have been suggested. These equations have been used in the third and fourth paragraphs to explain the ways that the market prices are formed (regulated) according to Evans and Cobbweb models.

Örümcek modeli, Evans modeli, Arz-talep fonksiyonu
Spider model, Evans model, supply-demand functions

* Orta Asya Amerikan Üniversitesi
** Kırgızistan-Türkiye Manas Üniversitesi

PİYASA FİYATI DEĞİŞİMİNİ AÇIKLAYAN MODELLER

Genel olarak Mikro İktisat kitapları, birim başına vergi veya sübvansiyon uygulaması sonucunda mal fiyatlarının değişmesini gösteren örnekleri içermektedirler.

Makalede, talep ve arz fonksiyonlarının değişimi sonucunda piyasa fiyatı değişimini tarif eden modellere karşı standart olmayan yaklaşımlar sunulmaktadır.

Birinci bölümde piyasaya giren ek mal miktarının arz edilmesi sonucunda ortaya çıkan durum incelenmiştir. İkinci bölümde ise, birinci derecedeki doğrusal fark denklemlerin tanımı verilmiş ve çözüm formülü geliştirilmiştir.

Bu denklemler, Örümcek ve Evans modellerine dayanarak piyasa fiyatının nasıl oluştuğunu açıklamak için üçüncü ve dördüncü bölümlerde kullanılmıştır.

1).Piyasanın İlave Ürün Miktarının Ortaya Çıkmasına Tepkisi :

Örnek: Bedavya[1] ülkesinde buğdayın talep fonksiyonu

q^d*=2600-100*p^d şeklindedir. Bedavya hükümeti belli bir miktar ürün piyasadaki mevcut buğday miktarına ilave olarak piyasaya sunmaktadır. Sonuçta, 1 kilo buğdayın piyasa fiyatı 10 bedavcık[2], satılan miktarı 1600 ton olarak belirlenmiştir.

Bunun sonucu Bedavya'nın Çiftçiler Birliği aşağıdaki delilleri göstererek devletten 37800 bin bedavcık dolayında tazminat ödenmesini istemektedir: 1 kilo buğday 28 bedavcık iken çiftçiler 1600 ton buğday satabileceklerdi, ama fiyat 10 bedavcık düzeyinde oluştuğundan sadece 700 ton satabilmişlerdir.

Dolayısıyla piyasaya hükümet tarafından buğday sunulması sonucunda çiftçilerin zararı $28\cdot1600000-10\cdot700000=37800000$ bedavcıktır.

Şimdi bu durumu incelemeye çalışalım ve Bedavya'nın buğday piyasasında arz fonksiyonunun $q^s=e+fp^s$ gibi doğrusal olduğunu farzedelim.

Yukarıdaki verileri yerlerine koyarak denklemler sistemini elde ederiz: $\begin{cases} 1600 = e + f \cdot 28, \\ 700 = e + f \cdot 10, \end{cases}$ ve çözerek arz fonksiyonunun katsayılarını belirlemiş olacağız, yani e=200, f=50 buluruz.

Buradan $\begin{cases} p^s = p^d, \\ q^s = q^d \end{cases}$ müdahalesiz piyasa denge koşulunu kullanarak;

---

1 Hayali bir ülke
2 Bedavya ülkesinin para birimi

$$\begin{cases} p^s = p^d = p, \\ 200 + 50p = 2600 - 100p \end{cases}$$ elde ederiz.

Bu denklemi çözerek denge fiyatını 16, buradan da denge miktarını 1000 ton olarak buluruz.

Böylece müdahale olmadıkça çiftçiler $16 \cdot 1000000$ bedavcık kazanabileceklerdi; dolayısıyla Bedavya Çiftçiler Birliğinin isteyebileceği azami tazminat miktarı $16 \cdot 1000000 - 10 \cdot 700000 = 15300000$ bedavcığa eşittir.

Verilen veriler çerçevesinde adil tazminat miktarının belirlenmesinin, yanısıra hükümet tarafından piyasaya sürülen ürün de belirlenebilecektir. Onu Q harfi ile işaretleyerek bağış miktarının piyasaya sürülmesinden sonra piyasa arz fonksiyonu $q^s=200+50p^s+Q$ şeklini alacaktır.

Son denklemde fiyat ve miktar değerleri yerlerine konulduğunda $1600 = 200 + 50 \cdot 10 + Q$ elde edilir. Buradan da kolayca bulunabileceği gibi, Bedavya hükümeti 900 ton civarında buğday sunmuştur.

2) <u>Doğrusal Fark Denklemlerine Genel Bir Bakış:</u>

Birinci başlıkta gösterilen olayda piyasa dengesi denklemler sisteminin çözümü sonucunda bulunmaktaydı. Ama gerçek piyasalarda bunun gibi sistemleri kim çözmektedir? Diğer bir deyişle, piyasa denge düzeyine nasıl ulaşmaktadır?

Bu soruya cevap verebilmek için aşağıda iki model incelenecektir. Ancak bu modellerden önce, kısaca fark denklemlerinden bahsetmekte yarar bulunmaktadır. Fark denklemlerinin avantajlı yönü, denklem yardımıyla sınırlı matematik bilgisi kullanılarak geniş uygulamalı problemlerin, ayrıca ekonomik problemlerin matematiksel olarak yorumlanabilmesi, modelleştirilebilmesidir.

$$x_n=ax_{n-1}+b \qquad (1)$$

denklemi sabit katsayılı birinci mertebe doğrusal fark denklemi olarak adlandırılır. a ve b denklemin katsayılarını; x_n, k döneminde sistemin durumunu ifade eden değişkeni göstermektedir.

(1) no'lu denklemin en önemli özelliği, sistemin durumunun denklemin bir önceki durumu ile belirlenmesidir. Bundan dolayı (1) türündeki denklem indirgemeli (difference equations, recurrence relations) olarak adlandırılır.

(1) no'lu denklemi çözebilmek için aşağıdaki gibi bir yol izlenebilir:

$x_1=ax_0+b;$

$x_2=ax_1+b$ ve x_1 yerine önceki eşitliğin değeri konularak

$x_2=a(ax_0+b)+b=a^2x_0+ab+b;$ süreç tekrarlanarak

$x_3=ax_2+b,$

$x_3=a(a^2x_0+ab+b)+b=a^3x_0+a^2b+ab+b;$

$x_4=ax_3+b=a(a^3x_0+a^2b+ab+b)+b=a^4x_0+a^3b+a^2b+ab+b$; elde edilir.

Eğilimden açıkça görüldüğü gibi burada indüksiyon yöntemi kullanılabilir:

$x_{n-1} = a^{n-1}x_0 + a^{n-2}b + a^{n-3}b + \ldots + ab + b.$

İndüksiyon geçişi

$x_n = ax_{n-1}+b = a(a^{n-1}x_0 + a^{n-2}b + a^{n-3}b + \ldots + ab + b)+b.$

varsayımımızı doğrulamaktadır:

$$x_n=a^nx_0+a^{n-1}b+a^{n-2}b+\ldots+ab+b. \qquad (2)$$

(2) no'lu eşitliğin dönüştürülmesiyle;

$$x_n=a^nx_0+b(a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1) \qquad (3)$$

elde edilir.

Parantez içindeki ifade geometrik dizi toplamını vermektedir. Geometrik dizi taraflarının toplamı formülünü kullanarak (3) no'lu formülden (1) no'lu denklemin çözümü elde edilir:

$$x_n = a^n x_0 + b\frac{1-a^n}{1-a}. \qquad (4)$$

3) **<u>Evans Modeli</u>**: Malın ilk piyasa fiyatının p_0 olduğunu farzedelim. Dış etki sonucu bu piyasada arz ve talebin $q^d=a-bp^d$ ve $q^s=e+fp^s$ fonksiyonu ile açıklandığını kabul edersek (a,b,e katsayıları negatif değil) Marshall'ın ifadesine göre yeni denge fiyatı $\frac{a-e}{b+f}$'e eşit olacaktır. Evans ise piyasanın bu denge fiyatına nasıl gelindiğini açıklamaktadır.

Evans'a göre piyasa şartlarının değişmesi denge fiyatının değişmesine neden olmakta ve fiyatın değişmesi cari talep ve arz miktarları farkına doğrudan orantılı olmaktadır. Matematiksel olarak bu ifade aşağıdaki denklem ile gösterilmektedir:

$$p_n = p_{n-1} + k\,(q^d_{n-1} - q^s_{n-1}), \qquad (5)$$

burada k, fiyat dışı faktörlerle belirlenen orantılılık katsayasını göstermektedir. q^d ve q^s değerleri konularak sabit katsayılı birinci dereceden doğrusal fark denklemine ulaşılır:

$$p_n=p_{n-1}+k[(a-bp_{n-1} -(e + fp_{n-1})]. \qquad (6)$$

İlgili tarafları toplanmasıyla $p_n = p_{n-1}\,(1- kb - kf) + k\,(a - e)$ bulunur.

(6) no'lu denklem (4) no'lu formüle göre

$$p_n = (1 - kb - kf)^n p_0 + k(a - e)\frac{1 - (1 - kb - kf)^n}{kb - kf} \qquad (7)$$

fonksiyonunu vermektedir.

Ayrıca (7) no'lu formülden görüleceği gibi, eğer $1\text{-}kb\text{-}kf$ ifadesinin mutlak değeri 1'den küçükse $k \neq 0,\ n \to \infty$ olduğunda fiyat Marshall'ın vurguladığı $\frac{a - e}{b + f}$ ifadesine yaklaşacaktır.

<u>Örnek</u> Talep fonksiyonu $q^d = 10 - p^d$ denklemi, arz fonksiyonu $q^s = 1 + 2p^s$ denklemi ile verilsin, fiyat ise başlangıçta 2'ye eşit olsun. O zaman bu piyasada fiyatın değişmesi Evans modeline göre aşağıdaki gibi ardışıklık ile gösterilecektir.

$$p_n = (1 - k \cdot 3)^n\, 2 + k \cdot 9 \cdot \frac{1 - (1 - k \cdot 3)^n}{k \cdot 3} \quad . \qquad (8)$$

Eğer piyasada durum uzun süre değişmeyecekse, yani $n \to \infty$ ve $0 < |1 - k{\cdot}3| < 1$ ise fiyat 3'e yaklaşacaktır.

Bununla birlikte eğer $0 < k < 1/3$ ise fiyat ardışık 2'den 3'e yükselecek, eğer $1/3 < k < 2/3$ ise fiyat hem üstten hem de alttan 3'e yaklaşacaktır.

4) **<u>Örümcek Ağı Modeli:</u>** Evans modeli, bazen anlaşılması güç olan s***k*** katsayısını içermektedir. Bu sorun örümcek ağı modeli kullanıldığında ortadan kalkmasına karşın yeni problemler ortaya çıkmaktadır. Bu modeli aşağıdaki örnekle gösterelim.

Düşler adasına [3] *malları satmak üzere götüren Denizci Sinbad, ondan önce adaya gitmiş olan tüccarlardan her bir çikolata kutusunu 10 tane gümüş kuruşa sattıklarını öğrenerek kendisi ile birlikte 10 kutu götürmüştür. Adaya gelince her kutuyu 14 tane gümüş kuruşa satabileceğini görmüştür. Bu fiyattan memnun kalınca da, bir sonraki kez 14.8 kutu çikolata getirmiş, ancak, bu kez çikolataları ancak 11.6 gümüş kuruşa satabilmiştir. Bundan dolayı üçüncü kez Denizci Sinbad kendisi ile birlikte sadece 11.92 çikolata kutusu getirmiştir...*

Denizci Sinbad'ın yarattığı arzın ve adalıların çikolataya olan talebinin doğrusal olduğunu varsayarak, onların fonksiyonlarını yazalım. Sonra, bu adaya başka çikolata satıcılarının gelmeyeceğini ve arz ve talebin sabit kalacağını varsayarak, denge fiyat ve miktarını belirleyelim.

Verilerden bilindiği gibi, çikolata arzının hacmi daha önceki çikolatanın satıldığı fiyat tarafından belirlenecektir. Buradan arz fonksiyonu $q^s_n = e + fp_{n-1}$ şeklinde ifade edilebilir. Rakamlar yerine konularak,

---

[3] Hayali bir ada

$\begin{cases} 10 = e + f \cdot 10, \\ 14,8 = e + f \cdot 14 \end{cases}$ denklemler sistemi elde edilir. Bu sistemin yardımıyla arz fonksiyonunun katsayıları bulunabilecektir.

Denklemler sistemi çözüldüğünde, Denizci Sinbad'ın çikolata arzının şöyle bir fonksiyonla belirlendiği görülecekir: $q^s_n = 1,2p^d_{n-1}$ - 2. Bu sonucun doğru olduğu Sinbad'ın üçüncü kezdeki arz verileri denklemde yerine konularak kontrol edilebilir: 11,92 = 1,2 (11,6) – 2.

Adalıların çikolata talebi fonksiyonu katsayıları $q^d_n = a + bp_n$;

$\begin{cases} 10 = a + b \cdot 14, \\ 14,8 = a + b \cdot 11,6 \end{cases}$ denklemler sistemi ile belirlenir. Sistemin çözümü ile a = 38, b = - 2 olarak bulunur.

Dolayısıyla, Denizci Sinbad'ın her defa belirlediği çikolata fiyatı ve her defa adaya götürdüğü mal miktarı $\begin{cases} q_n^d = 38 - 2p_n, \\ q_n^s = 1,2p_{n-1} - 2 \end{cases}$

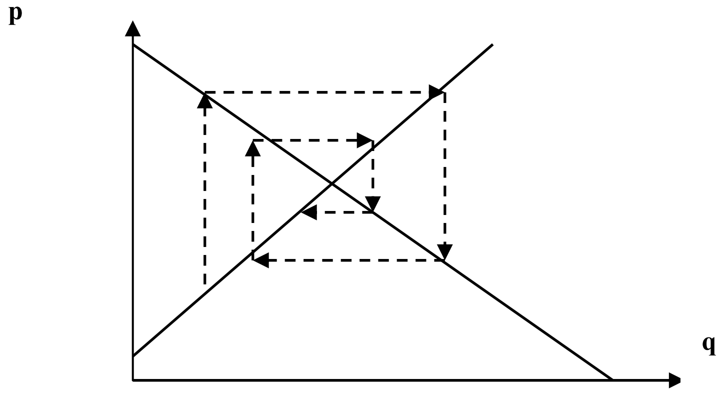
denklemler sistemi ile ve p_0=10 başlangıç koşulu ile belirlenecektir. Ayrıca, Denizci Sinbad her defasında malların tümünü sattığına göre, arz miktarı talep miktarına eşittir. Dolayısıyla, $38–2p_n=1,2p_{n-1}-2$ şeklinde bir eşitlik yer almaktadır. Buradan da $p_n=-0,6p_{n-1}+20$ sonucu elde edilir. Denklemin çözümü de:

$$p_n = (-0.6)^n p_0 + 20\frac{1-(-0.6)^n}{1-(-0.6)} = (-0.6)^n \cdot 10 + 20\frac{1-(-0.6)^n}{1+0.6}$$

olacaktır.

n'i sonsuza yaklaştırarak fiyatın 12,5 düzeyinde oluştuğunu ve bu fiyattan da 13 çikolata kutusu satıldığını buluruz.

Arz ve talep eğrileri çizilip ilgili noktalar birleştirildiğinde, modelin niçin örümcek ağı olarak adlandırıldığı aşağıdaki şekil yardımı ile görülebilir.



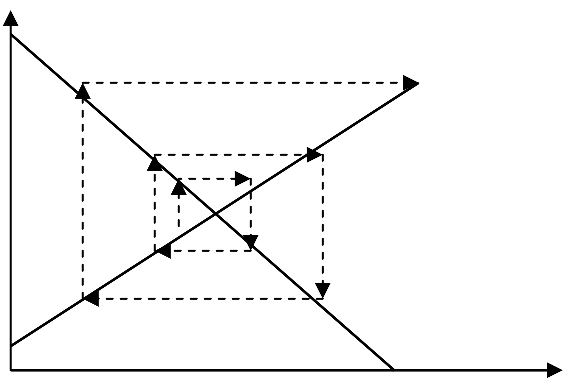
Örümcek ağı modelinin eksikliklerini açıklamak üzere aşağıdaki örneği inceleyelim. Örnek olarak çikolata talep ve arzının $q^d_n = 38\text{-}2p_n$ ve $q^s_n = 3p_{n-1}$ - 2 denklemleriyle verildiğini farzedelim. O zaman buna uygun fark denklemi $p_n = -1{,}5p_{n-1} + 20$ şeklini alacaktır.

Denklemin çözümü de:

$$p_n = (-1.5)^n p_0 + 20\frac{1-(-1.5)^n}{1-(-1.5)} = (-1.5)^n \cdot 10 + 20\frac{1-(-1.5)^n}{1+1.5}$$

şeklinde olacaktır.

Burada $(1{,}5)^n$ ifadesi sınır tanımayacağı için, bu piyasada fiyat artan bir dalgalanma gösterecek; istikrara yönelen bir yapı sergileyemeyecektir. İlgili grafik aşağıdaki gibi dönen spiral şeklini alacaktır:



Örümcekağı modeli şartlarında piyasada fiyatın istikrarlı olması koşullarını belirlemek için arz ve talep denklemlerini genel biçimde yazabiliriz: $q^s_n=e+fp_{n-1}$, $q^d_n=a-bp_n$. Sonra fark denklemi

$$p_n = \frac{f}{-b}p_{n-1} + \frac{e-a}{-b} \tag{7}$$

şeklinde yazılıp çözüldüğünde aşağıdaki sonuca ulaşılır:

$$p_n = \left(-\frac{f}{b}\right)^n p_0 + \frac{e-a}{(-b)}\cdot\frac{1-(-f/b)^n}{1-(-f/b)} = \left(-\frac{f}{b}\right)^n \cdot \left(p_0 + \frac{a-e)}{b+f}\right) + \frac{a-e}{b+f} \tag{8}$$

Son eşitlikte $\left|\frac{f}{b}\right| < 1$ ve $n\to\infty$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \frac{a-e}{b+f}$ olacaktır.

Diğer bir deyişle örümcek ağı modeli, ancak talep fonksiyonunun eğiminin mutlak değer olarak arz fonksiyonunun eğiminden büyük olması halinde, uzun dönemde piyasa fiyatının nasıl değişeceğini göstermektedir.

Sonuç olarak belirtmek gerekir ki, elde edilen denge fiyatı Evans modeli yardımıyla elde edilmiş fiyat ile aynı olmaktadır.

KAYNAKÇA

1. B. COZZENNS, R. D. PORTER. **Mathematics with Calculu**s.-USA, D. C. Heath and Company, 1987. - 910 p.
2. R. HARSHBARGER, J. REYNOLDS. **Calculus wıth Applıcatıon**s. - USA, D. C. Heath and Company, 1993. - 630 p.