Süleyman Demirel Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi
Y.2004, C.9, S.2 s.131–140.

KUSURLU ÜRÜNLER İÇİN BİR EKONOMİK ÜRETİM MİKTARI MODELİ

AN EPQ MODEL WITH DEFECTIVE PRODUCTS

Yrd.Doç.Dr. Abdullah EROĞLU[*]
Arş.Gör. Meltem KARAATLI[**]
Arş.Gör. Yavuz KILIÇ[***]

ÖZET

Ekonomik üretim miktarı modelinin (EPQ) temel varsayımı, üretilen ürünlerin % 100 ünün kusursuz olmasıdır. Üretim süreçleri için bu varsayım her zaman geçerli değildir. Bu makalede, üretilen ürünlerin kusurlu oranının belli bir olasılık dağılımı gösterdiği durum için bir ekonomik üretim miktarı modeli geliştirilmiştir. Geliştirilen model için sayısal örnekler verilerek, kusurlu ürün oranının optimal çözüm üzerine etkisi incelenmiştir.

ABSTRACT

The basic assumption of an economic production quantity model (EPQ) is that 100% of produced products are non-defective. This assumption is not valid for production processes every time. In this paper, an economic production quantity model is developed for fraction defective of produced products with a probability distribution function. It is analyzed that the effect of fraction defective product on optimal solution while some quantitative examples are given

Ekonomik Üretim Miktarı, Kusurlu Ürün.
EPQ, Defective Products.

1. GİRİŞ

Ekonomik üretim miktarı modeli, genel olarak üretim, hazırlık, stok ve stoksuzluk maliyetlerini dikkate alarak, her bir periyot için optimum üretim miktarını bulmak için kullanılan bir tekniktir. Klasik ekonomik üretim miktarı modelinin temel varsayımı üretilen ürünlerin % 100 ünün kusursuz olmasıdır. Çoğu üretim ortamları için bu varsayım geçerli olmayabilir. Bu noktadan hareketle, araştırmacılar kusurlu üretimin olduğu üretim sistemleri için modeller geliştirmişlerdir.

[*] SDÜ İİBF İşletme Bölümü Öğretim Üyesi.
[**] SDÜ İİBF İşletme Bölümü Öğretim Elemanı.
[***] SDÜ SBE Öğretim Elemanı.

Rosenblatt ve Lee [1986] kusurlu ürünler içeren bir üretim sistemi için bir ekonomik üretim miktarı modeli önermişlerdir. Onların modelinin temel varsayımı, üretimin başlangıcından, rassal değişken olan bir zaman noktasına kadar sistem % 100 kusursuz ürün üretir. Bu noktada sistem kontrol dışına çıkarak üretim periyodunun sonuna kadar belli bir oranda kusurlu ürün üretir. Sistemin kontrol dışına çıktığı ana kadar geçen sürenin dağılımının, üstel dağılım olduğu varsayılmıştır. Onların modelinde stoksuzluğa izin verilmemiştir. Kim ve Hong [1999], Rosenblatt ve Lee [1986] nin modelini, sistemin kontrol dışına çıktığı ana kadar geçen sürenin dağılımını, genel rassal dağılım varsayımı ile genişlettiler. Chung ve Hou [2003], ise temelde yukarıda sözü edilen modelleri, stoksuzluğa izin verilmesi varsayımı ile birleştirdiler. Yukarıdaki modellerin tümü, kusurlu ürünlerin yeniden işleme alınarak (rework) kusursuz hale getirilmesi için gerekli süreyi dikkate almamışlardır (sıfır kabul etmişlerdir).

Salameh ve Jaber [2000], sipariş verilen partinin belli bir oranının kusurlu olduğu ve kusur oranının tekdüze (uniform) dağılıma uyduğu durum için bir ekonomik sipariş miktarı modeli geliştirdiler. Chan ve diğerleri [2003], üretilen ürünlerin, sayısal olarak ifade edilebilen temel özelliğinin normal dağılıma uyduğu varsayımı ile üç ekonomik üretim miktarı modeli geliştirdiler. Onlar ürünleri kusursuz, yeniden işlemek suretiyle kusursuz, düşük kalite ve ıskarta olarak sınıflandırmışlardır. Modellerin temel varsayımları: stoksuzluğa izin verilmemekte, yeniden işlem süresi sıfır, düşük kalite ürünler indirimli fiyattan satılmaktadır. Modellerin her birini diğerlerinden ayıran temel varsayım düşük kalite ürünlerin satış zamanlarının farklı (dolayısıyla stok maliyetlerinin farklılaşması) olmasıdır.

Hayek ve Salameh [2001], kusurlu ürün oranının tekdüze dağılıma uyduğu durum için bir ekonomik üretim miktarı modeli geliştirdiler. Modelin temel varsayımları: stoksuzluğa izin verilmesi, kusurlu ürünlerin tümü yeniden işleme alınarak kusursuz hale getirilmesi, yeniden işlem süresinin dikkate alınmasıdır. Chiu [2003], Hayek ve Salameh [2001]'in modelini, kusurlu ürünlerin tümü yerine belli bir oranının yeniden işleme alınarak kusursuz hale getirilmesi ve diğerlerinin ıskartaya ayrılması varsayımı ile birleştirmek suretiyle bir model geliştirmiştir.

Bazı durumlarda kusurlu ürünleri yeniden işleme almak yerine indirimli fiyattan satmak daha uygun olabilir. Bu makalede; kusurlu ürünlerin, oranının sürekli tekdüze dağılım göstermesi, üretimin sona ermesi anında indirimli fiyata toptan satılması ve stoksuzluğa izin verilmesi varsayımları altında bir ekonomik üretim miktarı modeli türetilmiştir. Ayrıca farklı kusur oranlarının parti hacmi ve beklenen toplam kar üzerine etkileri incelenmiştir.

2. VARSAYIMLAR VE SİMGELER

1. Üretim süreci birim zamanda α miktarda üretim yapmakta, üretimin kusurlu oranı x dir. Kusurlu oranı rassal değişken olup olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ dir.

2. Birim zamanda kusursuz ürünlere olan talep miktarı β olup talebin tamamının karşılanabilmesi için $(1-x)\alpha > \beta$ veya $0 < x < 1-\beta/\alpha$ şartı sağlanmalıdır.

3. Üretim tamamlandığında kusurlu ürünler tek parti halinde indirimli fiyattan satılmaktadır.

4. Stoksuzluğa izin verilmektedir.

y : Bir periyottaki üretim miktarı

z : Kusursuz ürünler için maksimum stok miktarı

w : Kusursuz ürünler için maksimum stoksuzluk miktarı

α : Birim zamandaki üretim miktarı

β : Birim zamandaki talep miktarı

x : Kusurlu üretim oranı (rassal değişken)

$f(x)$: Kusurlu üretim oranının olasılık yoğunluk fonksiyonu

E : Beklenen değer operatörü

c : Birim üretim ve muayene maliyeti

s : Kusursuz ürünler için birim satış fiyatı

v : Kusurlu ürünler için birim satış fiyatı

k : Hazırlık maliyeti

h : Birim stok maliyeti

π : Birim stoksuzluk maliyeti

3. MATEMATİKSEL MODEL

Stok seviyesinin zamanla değişimi şekil 1 ile verilmektedir. Maksimum stoksuzluğa ulaşmak için geçen süre (t_1),

$$t_1 = \frac{w}{\beta} \tag{1}$$

ve maksimum stoksuzluğu elimine etmek için geçen süre (t_2),

$$t_2 = \frac{w}{\alpha A} \tag{2}$$

eşitlikleri ile yazılabilir. Burada: $A = 1 - x - \beta/\alpha$

Maksimum stoğa ulaşmak için geçen süre (t_3) , (üretim süresi $t_2 + t_3 = \dfrac{y}{\alpha}$ olduğundan)

$$t_3 = \frac{A\,y - w}{\alpha\,A} \tag{3}$$

elde edilir. Diğer yandan şekil 1 den

$$t_3 = \frac{z}{\alpha\,A} \tag{4}$$

olduğu için (3) ve (4) eşitliklerinden

$$z = A\,y - w \tag{5}$$

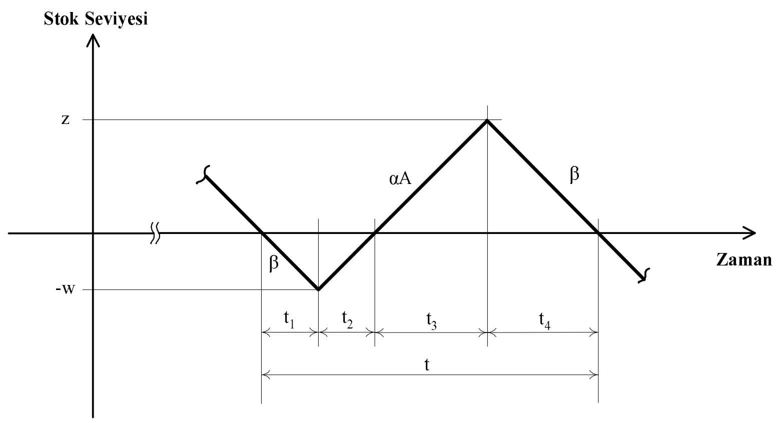
elde edilir. Yine şekil 1 den

$$t_4 = \frac{z}{\beta} = \frac{A\,y - w}{\beta} \tag{6}$$

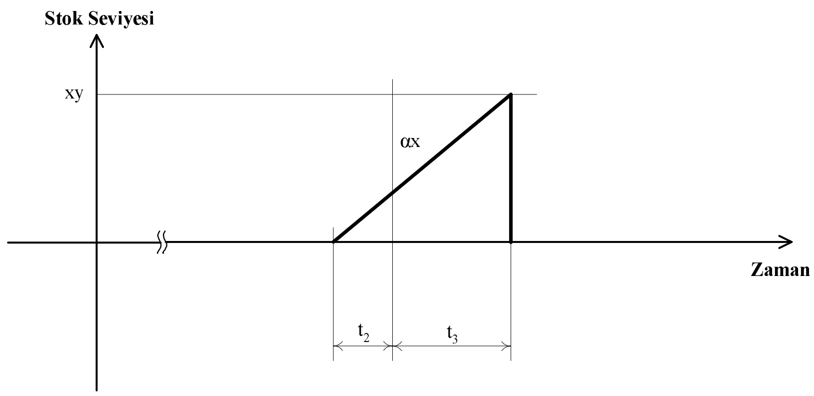
ifadesi yazılabilir. Diğer yandan periyot süresi (t), ilgili periyotta üretilen kusursuz ürün miktarının birim zamandaki talep miktarına oranlanmasıyla elde edilir. Yani,

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{(1-x)y}{\beta} \tag{7}$$

Şekil 1: Kusursuz Ürünlerin Stok Seviyesinin Zamanla Değişimi



Şekil 2: Kusursuz Ürünlerin Stok Seviyesinin Zamanla Değişimi



Böylece, bir periyottaki stok maliyeti (*HC),* stoksuzluk maliyeti (*BC*), üretim maliyeti (*PC*) ve üretim geliri (*TR*) aşağıdaki gibi elde edilir.

$$HC = h\left[\frac{z}{2}(t_3 + t_4) + \frac{\alpha x}{2}(t_2 + t_3)^2\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left\{\left[\frac{(1-x)^2}{\beta} + \frac{2x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right]y^2 - \left[\frac{2(1-x)}{\beta}\right]wy + \left(\frac{1-x}{\beta A}\right)w^2\right\} \quad (8)$$

$$BC = \pi\left(\frac{w}{2}(t_1 + t_2)\right) = \pi\left(\frac{1-x}{2\beta A}\right)w^2 \quad (9)$$

$$PC = k + cy \quad (10)$$

$$TR = s(1-x)y + vxy \quad (11)$$

Bir periyottaki toplam kar (*TP*);

$$TP = TR - PC - HC - BC$$

$$= [(1-x)\,s + vx - c]\,y - k$$

$$-\frac{h}{2}\left\{\left[\frac{(1-x)^2}{\beta} + \frac{2x}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right]y^2 - \left[\frac{2(1-x)}{\beta}\right]wy\right\}$$

$$-\left(\frac{(h+\pi)(1-x)}{2\beta A}\right)w^2 \tag{12}$$

birim zamandaki toplam kar (*TPU*)

$$TPU = \frac{TP}{t} = \left(\frac{\beta}{(1-x)y}\right)TP$$

$$= \beta\left\{s + v\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{k}{(1-x)y} - \frac{c}{(1-x)}\right\}$$

$$-\frac{h}{2}\left\{\left[1 - x + \frac{2x\beta}{\alpha(1-x)} - \frac{\beta}{\alpha(1-x)}\right]y - 2w\right\}$$

$$-\frac{(h+\pi)w^2}{2Ay} \tag{13}$$

ve birim zamandaki beklenen toplam kar (*ETPU*)

$$ETPU = \beta\left\{s + vE\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{k}{y}E\left(\frac{1}{1-x}\right) - cE\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}$$

$$-\frac{h}{2}\left\{\left[1 - E(x) + \frac{2\beta}{\alpha}E\left(\frac{x}{1-x}\right) - \frac{\beta}{\alpha}E\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]y - 2w\right\}$$

$$-\frac{(h+\pi)w^2}{2y}E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right) \tag{14}$$

biçiminde yazılabilir.

$$E\left(\frac{x}{1-x}\right) = E\left(\frac{1}{1-x} - 1\right) = -1 + E\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

olduğundan (14) eşitliği (15) eşitliğine dönüşür.

$$ETPU = \beta\left\{s - v + \left(v - c - \frac{k}{y}\right)E\left(\frac{1}{1-x}\right)\right\}$$

$$-\frac{h}{2}\left\{\left[1 - \frac{2\beta}{\alpha} - E(x) + \frac{\beta}{\alpha}E\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]y - 2w\right\}$$

$$-\frac{(h+\pi)w^2}{2y}E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right) \qquad (15)$$

(15) eşitliğinin w ve y değişkenlerine göre kısmi türevleri alınır ve sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial ETPU(w,y)}{\partial w}=-\frac{(h+\pi)w}{y}E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right)+h=0 \qquad (16)$$

$$\frac{\partial ETPU(w,y)}{\partial y}=\frac{k\beta}{y^2}E\left(\frac{1}{1-x}\right)+\frac{(h+\pi)w^2}{2y^2}E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right)$$
$$-\frac{h}{2}\left[1-\frac{2\beta}{\alpha}-E(x)+\frac{\beta}{\alpha}E\left(\frac{1}{1-x}\right)\right]=0 \qquad (17)$$

karar değişkenlerinin optimum değerleri (16) ve (17) eşitliklerinden aşağıda verildiği biçimde elde edilir.

$$w^*=\frac{hy^*}{(h+\pi)\,E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right)} \qquad (18)$$

$$y^*=\sqrt{\frac{2k\beta\,E\left(\frac{1}{1-x}\right)}{h\left[1-\frac{2\beta}{\alpha}-E(x)+\frac{\beta}{\alpha}E\left(\frac{1}{1-x}\right)-\frac{h}{(h+\pi)\,E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right)}\right]}} \qquad (19)$$

Böylece (18) ve (19) eşitliklerinden elde edilen karar değişkenlerinin değerleri (15) eşitliğinde yerine konularak, birim zamandaki beklenen toplam karın, (*ETPU*), optimum değeri, elde edilir.

4. SAYISAL ÖRNEK

Bir şirket çoğu endüstride kullanılmak üzere bir ürün üretmektedir. Fabrikanın yıllık üretim kapasitesi (kusurlu ve kusursuz üretim miktarı olarak) 10 000 birim, yıllık kusursuz ürün talebi ise 4 000 birimdir. Bir periyot için üretime hazırlık maliyeti 500 YTL (Yeni Türk Lirası), yıllık birim stok ve stoksuzluk maliyeti sırasıyla 4 ve 2 YTL dır. Diğer yandan birim üretim ve muayene (kusurlu ürünleri ayıklamak için) maliyeti 20 YTL, kusursuz ve kusurlu ürünlerin birim satış fiyatı sırasıyla 40 ve 10 YTL dır. Üretimdeki kusurlu oranı, rassal değişken olup tekdüze dağılıma uyduğu varsayımı ile aşağıda verilen olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahiptir. Böylece modelin parametreleri:

$$\alpha = 10000,\ \beta = 4000,\ \ k = 500,\ c = 20,\ s = 40,\ v = 10,\ \ h = 4,\ \pi = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} 20\,, & 0 \le x \le 0.05 \\ 0\,, & d.d \end{cases}$$

dir. Tekdüze dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}\,, & a \le x \le b \\ 0\,, & d.d \end{cases}$$

ve

$$E(x) = \int x f(x)dx = 0.025$$

$$E\left(\frac{1}{1-x}\right) = \int\left(\frac{1}{1-x}\right)f(x)dx = 1.025866$$

$$E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right) = \int\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right)f(x)dx = 1.740228$$

olmak üzere, optimum çözüm değerleri ,

$$y^* = 2252\ birim, \quad w^* = 863\ birim \quad ve \quad ETPU^* = 77143\ YTL$$

elde edilir.

Diğer taraftan, kusurlu oranının farklı üst sınırları (*b*) için optimal çözüm sonuçları tablo 1 ile verilmektedir. Kusurlu oranı yükseldikçe, beklenen toplam kar ve maksimum stoksuzluk miktarı düşmekte, buna karşılık parti hacmi, kusurlu oranının yaklaşık %16 sı civarına kadar artmakta ve bu noktadan sonra giderek azalmaktadır.

Tablo 1: Farklı b değerleri için optimal çözüm sonuçları

b	*Y**	*w**	*ETPU*	--------	*b*	*y**	*w**	*ETPU*
0	2236	894	78211		0.20	2265	745	73401
0.01	2240	888	78004		0.25	2256	698	71931
0.02	2243	882	77793		0.30	2240	646	70320
0.03	2246	876	77580		0.35	2215	590	68545
0.04	2249	869	77363		0.40	2183	530	66577
0.05	2252	863	77143		0.45	2140	463	64376
0.10	2263	827	75993		0.50	2086	388	61890
0.14	2266.8	796	75007		0.55	2013	297	59042
0.15	2267.2	788	74750		0.57	1973	250	57772
0.16	2267.4	780	74489		0.58	1947	221	57099
0.17	2267.2	771	74224		0.59	1912	184	56391

$$\begin{pmatrix} \alpha = 10000, \ \beta = 4000, \ \ k = 500, \ c = 20 \\ s = 40, \ v = 10, \ \ h = 4, \ \pi = 2 \end{pmatrix}$$

5. SONUÇ

Belli bir oranı kusurlu üretim olan bir üretim sistemi için stok politikalarının belirlenmesi klasik ekonomik üretim miktarı modeli ile yapılamaz.Bu çalışmada, kusurlu ürünlerin, her bir periyot için üretim işlemi tamamlandığında indirimli fiyattan toptan satıldığı ve stoksuzluğa izin verildiği durum için bir ekonomik üretim miktarı modeli türetilmiştir. Farklı kusur oranları için optimal çözüm sonuçları elde edilmiştir. Kusur oranlarına göre modelin davranışı, kusur oranı yükseldikçe beklenen toplam kar azalmakta yönündedir. Bu davranış beklenen bir sonuçtur.

KAYNAKLAR

1. Chan W.M., Ibrahim R.N. and Lochert P.B., (2003), A new EPQ model: integrating lower pricing, rework and reject situations, **Production Planning and Control, 14**(7), 588-595.

2. Chiu Y.P. (2003), Determining the optimal lot size for the finite production model with random defective rate, the rework process, and backlogging, **Engineering Opt. , 35**(4), 427-437.

3. Chung K:J. and Hou K.L. (2003), An optimal production run time with imperfect production processes and allowable shortages, **Computers & Operations Research, 30**, 483-490.

4. Hayek P.A. and Salameh M.K. (2001), Production lot sizing with the reworking of imperfect quality items produced, **Production Planning and Control, 12**(6), 584-590.

5. Kim C.H. and Hong Y. (1999), An optimal production run length in deteriorating production processes, **International Journal of Production Economics, 58**, 183-189.

6. Rosenblatt M.J. and Lee H.L. (1986), Economic production cycles with imperfect production processes, **IEE Transactions 18**, 48-55.

7. Salameh M.K. and Jaber M.Y. (2000), Economic production quantity model for items with imperfect quality. **International Journal of Production Economics, 64**, 59-64.

Ek: ETPU fonksiyonunun dışbükeyliğinin ispatı

Aşağıdaki Hessian matrisi (H) göz önüne alalım.

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 ETPU(w,y)}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 ETPU(w,y)}{\partial y \partial w} \\ \dfrac{\partial^2 ETPU(w,y)}{\partial w \partial y} & \dfrac{\partial^2 ETPU(w,y)}{\partial w^2} \end{bmatrix}$$

Eğer,

$$[y \quad w] \times [H] \times \begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} < 0, \quad y, w \neq 0$$

ise $ETPU(y,w)$ fonksiyonu kesinlikle dışbükeydir.

$$\frac{\partial^2 ETPU(w,y)}{\partial y^2} = -\frac{2k\beta}{y^3} E\left(\frac{1}{1-x}\right) - \frac{(h+\pi)w^2}{y^3} E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial^2 ETPU(w,y)}{\partial w^2} = -\frac{(h+\pi)}{y} \times E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right)$$

$$\frac{\partial^2 ETPU(w,y)}{\partial y \partial w} = \frac{\partial^2 ETPU(w,y)}{\partial w \partial y} = \frac{(h+\pi)w}{y^2} \times E\left(\frac{1}{1-x-\beta/\alpha}\right)$$

$$[y \quad w]\,[H]\begin{bmatrix} y \\ w \end{bmatrix} = -\frac{2k\beta}{y} \times E\left(\frac{1}{1-x}\right) < 0$$

olduğundan $ETPU(y,w)$ fonksiyonu kesinlikle dışbükeydir. Dolayısıyla bu fonksiyonu maksimum yapan bir tek y^* ve w^* değerleri vardır.