Süleyman Demirel Üniversitesi
İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi
Y. 2000, C.5, S.1 s.87-102.

BİR BORCUN TAKSİTLERLE GERİ ÖDENMESİ PROBLEMLERİNE ÇÖZÜM ÖNERİLERİ

Yrd.Doç.Dr. Abdullah EROĞLU*

ÖZET

Bir borcun eşit,geometrik değişimli ve aritmetik değişimli taksitlerle ödenmesi problemlerinin çözümünde kullanılan çeşitli formüller literatürde yer almaktadır. Ancak karşılaşılan bazı sorunların çözümünde bu formüller yetersiz kalmaktadır. Bu bağlamda Formato, atlamalı taksitli (rasgele seçilen bazı devrelerde geri ödemelerin olmadığı durum) bir borcun devrelik eşit taksitlerle geri ödenmesi problemini ele almış ve devrelik taksit miktarını veren formülü türetmiştir. Moon ise atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşit taksitler yerine bir devreden diğerine geometrik değişimli (artan veya azalan oranda) taksitlerle ödenmesi durumu için ilk devrenin taksit miktarını veren formül türetmiştir. Bu çalışmada ise bir borcun düzenli ve düzensiz parçalı geometrik değişimli, düzenli ve düzensiz parçalı aritmetik değişimli taksitlerle geri ödenmesi olmak üzere dört farklı borçlanma modeli ilk olarak ele alınmış ve paranın zaman değeri kullanılarak taksit miktarlarını veren formüller türetilmiştir.

1. GİRİŞ

Bir borcun taksitlerle geri ödenmesi, borcun şimdiki değerinin taksitlerin şimdiki değerleri toplamına eşdeğer olması esasına dayanır[1]. Taksit serileri genel olarak eşit, geometrik değişimli, aritmetik değişimli ve düzensiz taksit serileri olarak sınıflandırılabilir[2]. İlk üç taksit serisi için ilk taksit miktarlarını veren formüller aşağıda verilmektedir.

-Eşit devrelik taksitler için, taksit miktarı d olmak üzere:

$$d = \frac{PR}{1-(1+R)^{-N}} \tag{1}$$

---

* Süleyman Demirel Üniversitesi, İİBF, İşletme Bölümü, Sayısal Yöntemler Anabilim Dalı Öğretim Üyesi

1 İŞCİL, N., **Ticaret Aritmetiği ve Mali Cebir** , Armağan Yayınevi, Ankara , 1997, s. 148 ve SHAO, S.P. ve L.P. SHAO, **Mathematics for Management and Finance**, Eighth Edition, South-Western College Publishing, 1998, s. 502.

2 PARK, C.S., **Contemporary Engineering Economics** , Second Edition, Addison-Wesley Publishing Com. Inc.,1997, s. 55

-Geometrik değişimli devrelik taksitler için, ilk taksit miktarı d ve k. taksit miktarı d_k olmak üzere:

$$d_k = d(1+g)^{k-1}, \quad k = 1, \cdots, N \tag{2}$$

$$d = \frac{P(g-R)}{\left(\frac{1+g}{1+R}\right)^N - 1}, \quad g \neq R \tag{3}$$

$$d = \frac{P(1+R)}{N}, \quad g = R \tag{4}$$

-Aritmetik değişimli devrelik taksitler için, ilk taksit miktarı d ve k. taksit miktarı d_k olmak üzere:

$$d_k = d + (k-1)v, \quad k = 1, \cdots, N \tag{5}$$

$$d = \frac{PR^2(1+R)^N + v\left[1 + NR - (1+R)^N\right]}{R\left[(1+R)^N - 1\right]}. \tag{6}$$

Burada:

N : devre sayısı (taksit sayısı),

P : borç miktarı,

R : devrelik faiz oranı,

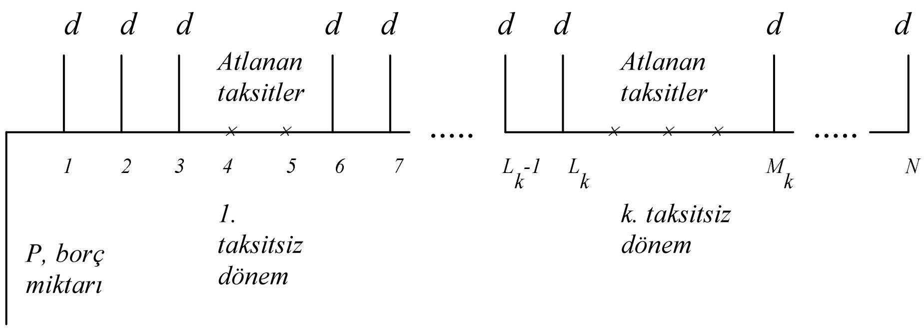
g : taksit miktarlarındaki oransal değişim (geometrik değişim),

v : taksit miktarlarındaki miktarsal değişim (aritmetik değişim).

Atlamalı taksitli borç, belli bir zaman süresinde (devre olarak), rasgele seçilen bazı devrelerde taksitlerin (geri ödemelerin) olmadığı, diğer devrelerdeki taksitlerle geri ödemelerin yapıldığı bir borçlanma türüdür. Atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşit taksitlerle ödenmesi problemi ilk defa Formato tarafından ele alındı.[3] Formato; borçlananların ödeme güçlerinin yıl içinde değişkenlik gösterebileceğine dikkat çekerek bu tip borçlanmanın avantajlı olduğunu belirtmektedir. İlgili borçlanma modeli şekil 1 ile verilmektedir:

---

[3] FORMATO, R.A., "**Generalized Formula for the Periodic Payment in a Skip Payment Loan with Arbitrary Skips**" The Engineering Economist , Vol 37 Number 4 , Summer 1992.



Şekil 1 : Atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşit taksitlerle ödenmesi

Formato tarafından türetilen formül aşağıda verilmektedir.

$$d = \frac{RP(1+R)^N}{\left\{1 + \sum_{k=1}^{s} \left[(1+R)^{-M_k+1} - (1+R)^{-L_k}\right]\right\}(1+R)^N - 1} \qquad (7)$$

Burada :

d : devrelik taksit miktarı,

N : geri ödeme süresindeki devre sayısı (taksitlerin olmadığı devreler de dahil),

S : taksitsiz dönem (taksitlerin olmadığı ardışık devrelerden oluşan zaman aralığı) sayısı,

L_k *:* *k.* taksitsiz dönemden önceki son taksitin devre numarası,

M_k *:* *k.* taksitsiz dönemden sonraki ilk taksitin devre numarası.

Moon ise geri ödemenin devrelik eşit taksitler yerine geometrik değişim gösteren taksitler olması durumu için paranın zaman değerini kullanarak; ilk taksit miktarını veren formül türetti[4]. Moon'nun yaklaşımı; borcun şimdiki değerinin, taksitlerin şimdiki değerleri toplamına eşit olması esasına dayanmakta olup aşağıdaki gibidir.

---

[4] MOON, I., "**Generalized Formula for the Periodic Geometric-Gradient Series Payment in a Skip Payment Loan with Arbitrary Skips**" The Engineering Economist , Vol 39 Number 2 , Winter 1994

$$P = d\sum_{j=1}^{L_1}(1+g)^{j-1}(1+R)^{-j} + d\sum_{j=M_1}^{L_2}(1+g)^{L_1-M_1+j}(1+R)^{-j}$$

$$+ d\sum_{j=M_2}^{L_3}(1+g)^{L_1+L_2-M_1-M_2+1+j}(1+R)^{-j} + \cdots + d\sum_{j=M_S}^{N}(1+g)^{T-N-1+j}(1+R)^{-j}$$

Burada :

d = ilk taksit miktarı ,

T = taksit sayısı, $T = \sum_{k=1}^{S}(L_k - M_k) + S + N$

İlk taksit miktarını veren formül aşağıdaki gibidir[5].

$$d = \frac{P(R-g)}{X}, \qquad g \neq R \text{ için} \tag{8}$$

Burada;

$$X = 1 - i^{L_1} + \sum_{k=1}^{s-1}\left[(i^{M_k-1} - i^{L_{k+1}})(1+g)^{k+\sum_{j=1}^{k}(L_j-M_j)} \right]$$

$$+ \left[(i^{M_s-1} - i^{N})(1+g)^{T-N} \right],$$

$$i \equiv \frac{1+g}{1+R}.$$

$g=R$ ve $g=0$ özel durumları için aşağıdaki formüller elde edilir.

$$d = \frac{P}{X}, \qquad g=R \qquad . \tag{9}$$

Burada

[5] Ara işlemler için bkz. MOON

$$X = L_1(1+R)^{-1} + \sum_{k=1}^{S-1}\left[(L_{k+1} - M_k + 1)\,(1+R)^{k-1+\sum_{j=1}^{k}(L_j - M_j)}\right]$$

$$+\left[(N - M_S + 1)\,(1+R)^{T-N-1}\right].$$

ve

$$d = \frac{PR}{\left\{1 + \sum_{k=1}^{S}\left[(1+R)^{-M_k+1} - (1+R)^{-L_k}\right] - (1+R)^{-N}\right\}}, \; g = 0, \quad (10)$$

Eğer taksitlerdeki geometrik değişim (g, artış veya azalış oranı) sıfır olursa, geometrik değişimli atlamalı taksitler serisi, eşit atlamalı taksitler serisine indirgenir. Dolayısıyla geometrik değişimli atlamalı taksitler serisi, eşit atlamalı taksitler serisinin genel bir halidir. Bu yüzden (10) eşitliği ile (7) aynıdır.

Eşit taksitli devrelerin oluşturduğu zaman aralığını **dönem** ve dönem uzunluklarının eşit/farklı olmasını **düzenli/düzensiz** olarak adlandıralım. Bu çalışmada, devrelik taksitlerin dönem içinde eşit ve bir dönemden diğerine geometrik/aritmetik değişim göstermesi, **parçalı geometrik/aritmetik değişimli taksitler** olarak önerilmektedir. Dolayısıyla bir borcun:

1) düzenli parçalı geometrik değişimli,
2) düzenli parçalı aritmetik değişimli,
3) düzensiz parçalı geometrik değişimli,
4) düzensiz parçalı aritmetik değişimli,

taksitlerle ödenmesi sorunları karşımıza çıkmaktadır. Yukarıda isimleri önerilen borç ödeme modelleri ilk defa bu çalışmada ele alınmış ve paranın zaman değeri kullanılarak ilk taksit miktarlarını veren formüller türetilmiştir.

2. DÜZENLİ PARÇALI GEOMETRİK DEĞİŞİMLİ TAKSİTLER İÇİN FORMÜL

Düzenli parçalı geometrik değişimli taksitlere sahip borç ödeme modelinin varsayımları şunlardır.

1) Borcun taksitlerle geri ödenme süresi *Z* dönem ve devrelik taksit sayısı *N* olup, her bir dönemin uzunluğu birbirine eşittir.

2) Her bir dönem m adet devreden oluşmaktadır. Dolayısıyla her bir dönemde m adet ve toplam olarak $N = mZ$ adet devrelik taksit bulunmaktadır.

3) Her bir dönemdeki devrelik taksit miktarları birbirine eşit olup, bir dönemden diğerine geometrik değişim (G, oransal artış veya azalış) göstermektedir.

d : ilk dönemin taksit miktarları ve d_k : k. dönemin taksit miktarları olmak üzere;

$$d_k = d(1+G)^{k-1}, \quad k = 1,\cdots,Z \tag{11}$$

yazılır. Paranın zaman değeri kullanılarak, borcun şimdiki değeri, taksitlerin şimdiki değerleri toplamına eşit olacağından aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$P = \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} d(1+G)^{k-1}(1+R)^{-j}$$

$$= d\sum_{k=1}^{Z}(1+G)^{k-1}\left[(1+R)^{-[(k-1)m+1]} + (1+R)^{-[(k-1)m+2]} + \cdots + (1+R)^{-km}\right]$$

$$= \frac{d}{R}\sum_{k=1}^{Z}(1+G)^{k-1}\left[(1+R)^{-(k-1)m} - (1+R)^{-km}\right]$$

$$= \frac{d}{R}\left[1-(1+R)^{-m}\right]\sum_{k=1}^{Z}(1+G)^{k-1}\left[(1+R)^{-m}\right]^{k-1}$$

$$= \frac{d}{R}\left[1-(1+R)^{-m}\right]\sum_{k=1}^{Z}E^{k-1}$$

$$= \frac{d}{R}\left[1-(1+R)^{-m}\right]\left(\frac{E^Z-1}{E-1}\right)$$

ve

$$d = \frac{PR(E-1)}{\left(1-(1+R)^{-m}\right)\left(E^Z-1\right)} \tag{12}$$

Burada $E = \dfrac{1+G}{(1+R)^m}$.

Düzenli parçalı geometrik değişimli taksitler serisi, eşit taksitler serisinin genel bir halidir. Çünkü (12) eşitliğinde $G = 0$ alınırsa (1) eşitliği elde edilir.

Yüksek enflasyona sahip ülkelerde çalışanların ücretlerinin devreler (örneğin aylar) itibarıyla reel olarak azaldığı ve bu reel kayıpların dönemler (örneğin üç ay, altı ay, bir yıl) itibarıyla yaklaşık olarak telafi edildiği durumlarda bu tür borçlanma modeli, eşit veya geometrik değişim gösteren taksitli modellere göre daha uygundur. Burada uygunluk kriteri ücretlerin taksit miktarlarına ayrılan oranının dağılımı ile ilgilidir. Bu durum aşağıdaki sayısal örnek ile izah edilmektedir.

SAYISAL ÖRNEK 1

310 000 000 TL aylık maaşı olan bir kişi 8 000 000 000 TL değerinde bir arabayı aylık % 4 vade farkı ile 48 ay taksitli almayı düşünmektedir. Bu kişi, maaşının her altı ayda bir yaklaşık % 35 artacağını tahmin etmekte ve maaşının en fazla % 50'sini taksit için ayırabileceğini düşünmektedir. Kredi kurumunun sunduğu bazı seçenekler aşağıdaki gibidir.

i) Eşit taksitlerle ödeme,

ii) Her ay % 3 oranında artan taksitlerle ödeme,

iii) Her altı ayda bir % 35 oranında artan taksitlerle ödeme.

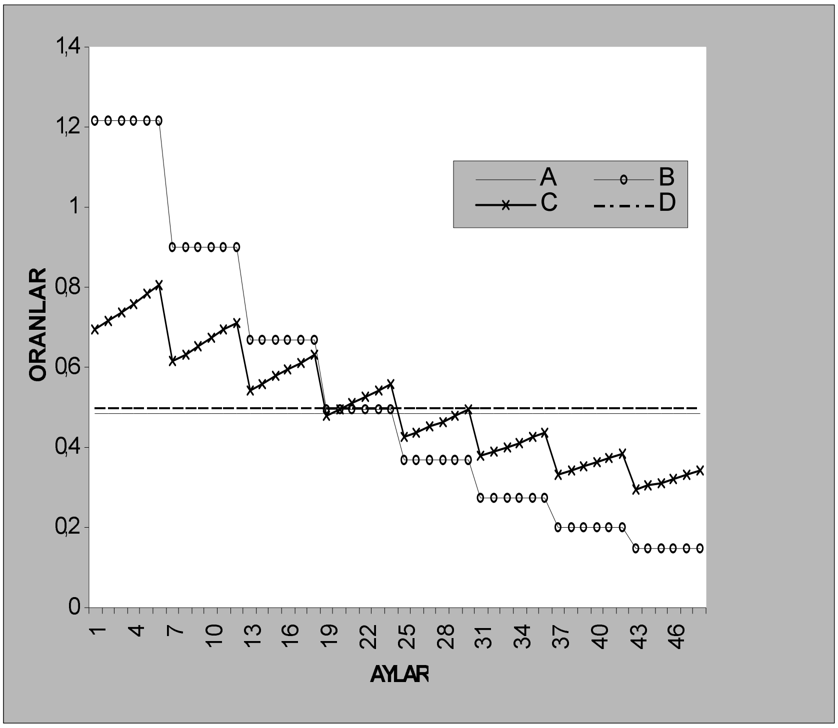
Bu durumda her bir seçenek için aylık taksit miktarlarını hesaplayabiliriz. Veriler şu şekildedir: $P = 8\ 000\ 000\ 000$, $R = 0.04$, $G = 0.35$, $g = 0.03$, $N = 48$, $m = 6$, $Z = N / m = 8$.

i) Eşit taksitlerle ödeme durumu için (1) eşitliğinden, taksit miktarları, $d = 377\ 445\ 180$ *TL*. elde edilir.

ii) Her ay % 3 oranında artan taksitlerle ödeme durumu için (3) eşitliğinden ilk taksit miktarı, $d = 215\ 579\ 443$ *TL* ve diğer taksit miktarları (2) eşitliğinden bulunur. Örneğin beşinci ayın taksit miktarı, $d_5 = 242\ 636\ 562$ *TL* dır.

iii) Her altı ayda bir % 35 oranında artan taksitlerle ödeme durumu için (12) eşitliğinden ilk dönemin (ilk altı ayın) taksit miktarları, $d = 150\ 400\ 859$ *TL* ve diğer dönemlerin taksit miktarları (11) eşitliğinden kolayca bulunur. Örneğin dördüncü dönemin (18.,19., ... , 24. aylar) taksit miktarları, $d_4 = 370\ 042\ 512$ *TL*. dır.

'Taksit / Maaş' katsayısı maaşın yüzde kaçının takside ayrılacağını ifade eder. Üçüncü seçenekte 'taksit/maaş' katsayısı her ay için birbirine eşit olup % 48.5 dır. Bu durum taksitlerin maaşın en fazla % 50 si olma şartını sağlamaktadır. Dolayısıyla kişi için uygun bir borçlanma modelidir. Diğer taraftan birinci ve ikinci seçenekler 'taksitlerin maaşın en fazla % 50 si olma' şartını sağlamadıkları için uygun borçlanma modelleri olarak gözükmemektedir. Bu durum şekil 2 de görülmektedir



Şekil 2: Eşit, geometrik değişimli ve düzenli parçalı geometrik değişimli taksit miktarlarının ücrete oranlarının aylar itibariyle dağılımı. (A: Parçalı geometrik değişimli taksitlerin ücrete oranı, B: Eşit taksitlerin ücrete oranı, C: Geometrik değişimli taksitlerin ücrete oranı, D: Taksit/maaş katsayısının varsayılan üst limiti)

3. DÜZENLİ PARÇALI ARİTMETİK DEĞİŞİMLİ TAKSİTLER İÇİN FORMÜL

Düzenli parçalı aritmetik değişimli taksitlere sahip borç ödeme modelinin varsayımları şunlardır.

1) Borcun taksitlerle geri ödenme süresi *Z* dönem ve devrelik taksit sayısı *N* olup, her bir dönemin uzunluğu birbirine eşittir.

2) Her bir dönem m adet devreden oluşmaktadır. Dolayısıyla her bir dönemde m adet ve toplam olarak $N = mZ$ adet devrelik taksit bulunmaktadır.

3) Her bir dönemdeki devrelik taksit miktarları birbirine eşit olup, bir dönemden diğerine aritmetik değişim (V, miktarsal artış veya azalış) göstermektedir.

d : ilk dönemin taksit miktarları ve d_k : k. dönemin taksit miktarları olmak üzere;

$$d_k = d + (k-1)\,V, \quad k = 1, \cdots, Z \tag{13}$$

yazılır. Paranın zaman değeri kullanılarak, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} \left[d + (k-1)\,V \right] (1+R)^{-j} \\ &= d \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} (1+R)^{-j} + V \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} (k-1)\,(1+R)^{-j} \\ &= dA + VB \end{aligned}$$

ve

$$d = \frac{P - VB}{A} \tag{14}$$

Burada[6]:

$$A = \frac{1}{R}\left[1 - (1+R)^{-N}\right],$$

$$B = \frac{1}{R}\left\{ \left[\frac{(1+R)^{-N} - (1+R)^{-m}}{(1+R)^{-m} - 1} \right] - (Z-1)\,(1+R)^{-N} \right\}.$$

(14) eşitliği $V = 0$ için (1) eşitliğine indirgeneceğinden, düzenli parçalı aritmetik değişimli taksitler serisi, eşit taksitler serisinin genel bir halidir denilebilir.

[6] Ayrıntılı bilgi için bkz. Ek 1.

SAYISAL ÖRNEK 2

Bir kredi kurumundan 3 350 000 000 TL borç 24 ayda ödenmek üzere aylık % 5 vade farkı ile alınmak isteniyor. Kredi kurumunun sunduğu geri ödeme seçeneklerinin aşağıdaki gibi olduğunu farz edelim.

i) Eşit taksitlerle,

ii) Aylık 10 000 000 TL artan taksitlerle,

iii) İlk 12 ayın taksitleri birbirine eşit ve ikinci 12 ayın taksitleri de birbirine eşit olup, ilk 12 ayın taksitlerinden 120 000 000 TL fazladır.

Veriler şu şekildedir. $P = 3\ 350\ 000\ 000$, $N = 24$, $m = 12$, $Z = 2$, $v = 10\ 000\ 000$, $V = 120\ 000\ 000$, $R = 0.05$.

i) Eşit taksitlerle ödeme durumunda, (1) eşitliğinden, taksit miktarları, $d = 242\ 777\ 518$ *TL* bulunur.

ii) Aylık 10 000 000 TL artan taksitlerle ödeme durumunda, (6) eşitliğinden, ilk taksit miktarı $d = 150\ 637\ 841$ *TL* ve (5) eşitliğinden diğer taksit miktarları bulunur. Örneğin sekizinci ayın taksit miktarı $d_8 = 220\ 637\ 841$ *TL* olur.

iii) İlk 12 ayın taksitleri birbirine eşit ve ikinci 12 ayın taksitleri de birbirine eşit olup, ilk 12 ayın taksitlerinden 120 000 000 TL fazla olması durumunda, (14) eşitliğinden, ilk 12 ayın taksitleri $d = 199\ 856\ 857$ *TL* ve (13) eşitliğinden, ikinci 12 ayın taksitleri $d_2 = 319\ 856\ 857$ *TL* elde edilir.

4. DÜZENSİZ PARÇALI GEOMETRİK DEĞİŞİMLİ TAKSİTLER İÇİN FORMÜL

Düzensiz parçalı geometrik değişimli taksitlere sahip borç ödeme modelinin varsayımları şunlardır.

1) Borcun taksitlerle geri ödenme süresi Z dönem ve devrelik taksit sayısı N olup, en az bir dönemin uzunluğu diğerlerinden farklıdır. Dolayısıyla en az bir dönemin devre sayısı diğer dönemlerin her birinin devre sayılarından farklıdır. .

2) Her bir dönemdeki devrelik taksit miktarları birbirine eşit olup, bir dönemden diğerine geometrik değişim (G, oransal artış veya azalış) göstermektedir.

L_k : k. dönemin ilk devrelik taksitinin devre numarası, $L_{Z+1} = N+1$, d : ilk dönemin devrelik taksit miktarları ve d_k : k. dönemin devrelik taksit miktarları olmak üzere:

$$d_k = d(1+G)^{k-1}, \quad k = 1, \cdots, Z \tag{15}$$

eşitliği yazılır. Paranın zaman değeri kullanılarak, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$P = \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=L_k}^{L_{k+1}-1} d_k (1+R)^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=L_k}^{L_{k+1}-1} d(1+G)^{k-1}(1+R)^{-j}$$

$$= d\sum_{k=1}^{Z}(1+G)^{k-1}\left[(1+R)^{-L_k} + (1+R)^{-(1+L_k)} + \cdots + (1+R)^{-(L_{k+1}-1)}\right]$$

$$= \frac{d}{R}\sum_{k=1}^{Z}(1+G)^{k-1}\left[(1+R)^{1-L_k} - (1+R)^{1-L_{k+1}}\right]$$

$$= \frac{d}{R}\left[1-(1+G)^{Z-1}(1+R)^{1-L_{Z+1}} + G\sum_{k=2}^{Z}(1+G)^{k-2}(1+R)^{1-L_k}\right]$$

ve

$$d = \frac{PR}{1-(1+G)^{Z-1}(1+R)^{-N} + G\sum_{k=2}^{Z}(1+G)^{k-2}(1+R)^{1-L_k}} \tag{16}$$

(16) eşitliğinde $G = 0$ alınırsa (1) eşitliği elde edileceğinden, düzensiz parçalı geometrik değişimli taksitler serisi, eşit taksitler serisinin genel bir halidir denilebilir.

SAYISAL ÖRNEK 3

1 800 000 000 TL bir borç aylık % 6 vade farkı ile 14 ayda ve taksitlerin beşinci ve sekizinci aylarda % 25 oranında artması şartıyla geri ödenecektir. Bu durumda taksit miktarlarını bulalım.

Veriler şu şekildedir: $P = 1\ 800\ 000\ 000$, $R = 0.06$, $N = 14$, $L_1 = 1$, $L_2 = 5$, $L_3 = 8$, $L_4 = 15$, $G = 0.25$, $Z = 3$. (16) eşitliğinden ilk dönemin (1., 2., 3. ve 4. aylar) taksit miktarları $d = 151\ 099\ 986$ *TL*, (15) eşitliğinden, ikinci dönemin (5., 6. ve 7. aylar) taksit miktarları $d_2 = 188\ 874\ 982$ *TL* ve üçüncü dönemin (8., ... , 13. ve 14. aylar) taksit miktarları $d_3 = 236\ 093\ 727$ *TL* bulunur.

5. DÜZENSİZ PARÇALI ARİTMETİK DEĞİŞİMLİ TAKSİTLER İÇİN FORMÜL

Düzensiz parçalı aritmetik değişimli taksitlere sahip borç ödeme modelinin varsayımları şunlardır.

1) Borcun taksitlerle geri ödenme süresi Z dönem ve devrelik taksit sayısı N olup, en az bir dönemin uzunluğu diğerlerinden farklıdır. Dolayısıyla en az bir dönemin devre sayısı diğer dönemlerin her birinin devre sayılarından farklıdır. .

2) Her bir dönemdeki devrelik taksit miktarları birbirine eşit olup, bir dönemden diğerine aritmetik değişim (V, miktarsal artış veya azalış) göstermektedir.

L_k : k. dönemin ilk devrelik taksitinin devre numarası, $L_{Z+1} = N+1$, d : ilk dönemin devrelik taksit miktarları ve d_k : k. dönemin devrelik taksit miktarları olmak üzere:

$$d_k = d + (k-1)V, \quad k = 1,\cdots,Z \tag{17}$$

eşitliği yazılır. Paranın zaman değeri kullanılarak, aşağıdaki eşitlikler yazılabilir.

$$\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=L_k}^{L_{k+1}-1} \left[d + (k-1)V \right] (1+R)^{-j} \\ &= d \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=L_k}^{L_{k+1}-1} (1+R)^{-j} + V \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=L_k}^{L_{k+1}-1} (k-1)\,(1+R)^{-j} \\ &= dA + VB \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} d &= \frac{P - VB}{A} \\ &= \frac{PR - V\left[(1-Z)\,(1+R)^{-N} + \sum_{k=2}^{Z} (1+R)^{1-L_k} \right]}{1-(1+R)^{-N}} \end{aligned} \tag{18}$$

Burada[7]

$$A = \frac{1}{R}\left[1 - (1+R)^{-N} \right]$$

$$B = \frac{1}{R}\left[(1-Z)\,(1+R)^{-N} + \sum_{k=2}^{Z} (1+R)^{1-L_k} \right]$$

[7] Ayrıntılı bilgi için bkz. Ek 2.

(18) eşitliğinde $V = 0$ alınırsa (1) eşitliği elde edileceğinden, düzensiz parçalı aritmetik değişimli taksitler serisi, eşit taksitler serisinin genel bir halidir denilebilir.

SAYISAL ÖRNEK 4

2 400 000 000 TL bir borç aylık % 5 vade farkı ile 16 ayda ve taksitlerin sekizinci ve onikinci aylarda 45 000 000 TL artması şartıyla geri ödenecektir. Bu durumda taksit miktarlarını bulalım.

Veriler şu şekildedir: $P = 2\ 400\ 000\ 000$, $R = 0.05$, $N = 16$, $L_1 = 1$, $L_2 = 8$, $L_3 = 12$, $L_4 = 17$, $V = 45\ 000\ 000$, $Z = 3$. (18) eşitliğinden ilk dönemin (1., ... , 6. ve 7. aylar) taksit miktarları, $d = 189\ 963\ 089$ *TL*, (17) eşitliğinden, ikinci dönemin (8., 9., 10. ve 11. aylar) taksit miktarları, $d_2 = 234\ 963\ 089$ *TL* ve üçüncü dönemin (12., ... , 15. ve 16. aylar) taksit miktarları $d_3 = 279\ 963\ 089$ *TL* bulunur.

SONUÇ

Bir borcun taksitlerle geri ödenmesi problemi borcun şimdiki değerinin taksitlerin şimdiki değerleri toplamına eşdeğer olması esasına dayanır. Borçlanma modellerinin birini diğerinden ayıran temel özellik taksit miktarlarının dağılımındaki farklılıktır. Bir borcun eşit, geometrik değişimli ve aritmetik değişimli taksitlerle ödenmesi problemlerinin çözümünde kullanılan formüller literatürde yer almaktadır. Ancak karşılaşılan bazı sorunların çözümünde bu modeller yetersiz kalmaktadır. Borçlanma ihtiyacı duyan kişi veya kurumların nakit akımları zaman içerisinde değişkenlik gösterebilir. Bu duruma uygun olarak Formato, atlamalı taksitli (rasgele seçilen bazı devrelerde geri ödemelerin olmadığı durum) bir borcun devrelik eşit taksitlerle geri ödenmesi problemini ele almış ve devrelik taksit miktarını veren formülü türetmiştir. Moon ise atlamalı taksitli bir borcun devrelik eşit taksitler yerine bir devreden diğerine geometrik değişimli (artan veya azalan oranda) taksitlerle ödenmesi durumu için ilk devrenin taksit miktarını veren formül türetmiştir.

Yüksek enflasyona sahip ülkelerde çalışanların ücretlerinin devreler (örneğin aylar) itibarıyla reel olarak azaldığı ve bu reel kayıpların dönemler (örneğin üç ay, altı ay, bir yıl) itibarıyla yaklaşık olarak telafi edildiği durumlarda, eşit veya geometrik değişimli veya aritmetik değişimli taksitlerle borç ödeme modelleri taksit miktarlarının dağılımından dolayı çoğu zaman uygun olmamaktadır. Bu noktadan hareketle bu çalışmada bir borcun düzenli ve düzensiz parçalı geometrik değişimli, düzenli ve düzensiz parçalı aritmetik değişimli taksitlerle geri ödenmesi olmak üzere dört farklı borçlanma modeli ilk olarak ele alınmış ve paranın zaman değeri kullanılarak taksit miktarlarını veren formüller türetilmiş ve sayısal örnekler verilmiştir. Oluşturulan borçlanma modellerinin, kredi kurumlarının müşterilerine daha fazla alternatif sunma açısından önemli olduğu söylenebilir.

KAYNAKÇA

1. FORMATO, R.A., "**Generalized Formula for the Periodic Payment in a Skip Payment Loan with Arbitrary Skips**" The Engineering Economist, Vol 37 Number 4 , Summer 1992.

2. İŞCİL, N., **Ticaret Aritmetiği ve Mali Cebir**, Armağan Yayınevi, Ankara, 1997

3. MOON, I., "**Generalized Formula for the Periodic Geometric-Gradient Series Payment in a Skip Payment Loan with Arbitrary Skips**" The Engineering Economist , Vol 39 Number 2, Winter 1994.

4. PARK, C.S., **Contemporary Engineering Economics**, Second Edition, Addison-Wesley Publishing Com. Inc.,1997.

5. SHAO, S.P. ve L.P. SHAO, **Mathematics for Management and Finance**, Eighth Edition, South-Western College Publishing, 1998.

EK 1

$$A = \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} (1+R)^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{Z} \left[(1+R)^{-[(k-1)m+1]} + (1+R)^{-[(k-1)m+2]} + \cdots\cdots + (1+R)^{-km} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{Z} \left[(1+R)^{-(k-1)m} - (1+R)^{-km} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left[1 - (1+R)^{m} \right] \sum_{k=1}^{Z} \left[(1+R)^{-m} \right]^{k}$$

$$= \frac{1}{R} \left[1 - (1+R)^{m} \right] \left[(1+R)^{-m} + (1+R)^{-2m} + \cdots\cdots + (1+R)^{-mZ} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left[1 - (1+R)^{m} \right] (1+R)^{-m} \left[\frac{(1+R)^{-mZ} - 1}{(1+R)^{-m} - 1} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left[1 - (1+R)^{-mZ} \right]$$

$$= \frac{1}{R}\Big[1-(1+R)^{-N}\Big]$$

$$B = \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=(k-1)m+1}^{km} (k-1)\,(1+R)^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{Z} (k-1)\,\Big[\,(1+R)^{-[(k-1)m+1]} + \cdots + (1+R)^{-km}\Big]$$

$$= \frac{1}{R}\Big[1-(1+R)^{-m}\Big]\sum_{k=1}^{Z}(k-1)\,\Big[(1+R)^{-m}\Big]^{k-1}$$

$$= \frac{1}{R}\Big[1-(1+R)^{-m}\Big]\Big[(1+R)^{-m} + 2\,(1+R)^{-2m} + \cdots\cdots + (Z-1)(1+R)^{-(Z-1)m}\Big]$$

$$\begin{aligned}= \frac{1}{R}\Big[1-(1+R)^{-m}\Big]\Big\{(1+R)^{-m} + (1+R)^{-2m} + \cdots\cdots + (1+R)^{-(Z-1)m} \\ + (1+R)^{-2m} + \cdots\cdots + (1+R)^{-(Z-1)m} \\ + \cdots\cdots + (1+R)^{-(Z-1)m} \\ \vdots \qquad\quad \\ + (1+R)^{-(Z-1)m} \quad \Big\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{R}\Big[1-(1+R)^{-m}\Big]\left[\frac{1}{1-(1+R)^{-m}}\right]\left\{\sum_{k=1}^{Z-1}\Big[\,(1+R)^{-km} - (1+R)^{-mZ}\Big]\right\}$$

$$= \frac{1}{R}\left\{\left[\frac{(1+R)^{-mZ} - (1+R)^{-m}}{(1+R)^{-m}-1}\right] - (Z-1)\,(1+R)^{-mZ}\right\}$$

$$= \frac{1}{R}\left\{\left[\frac{(1+R)^{-N} - (1+R)^{-m}}{(1+R)^{-m}-1}\right] - (Z-1)\,(1+R)^{-N}\right\}$$

EK 2

$$A = \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=L_k}^{L_{k+1}-1} (1+R)^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{Z} \left[(1+R)^{-L_k} + (1+R)^{-(1+L_k)} + \cdots\cdots + (1+R)^{-(L_{k+1}-1)} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{Z} \left[(1+R)^{1-L_k} - (1+R)^{1-L_{k+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left[(1+R)^{1-L_1} - (1+R)^{1-L_{Z+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left[1 - (1+R)^{-N} \right]$$

$$B = \sum_{k=1}^{Z} \sum_{j=L_k}^{L_{k+1}-1} (k-1)(1+R)^{-j}$$

$$= \sum_{k=1}^{Z} (k-1) \left[(1+R)^{-L_k} + (1+R)^{-(1+L_k)} + \cdots\cdots + (1+R)^{-(L_{k+1}-1)} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \sum_{k=1}^{Z} (k-1) \left[(1+R)^{1-L_k} - (1+R)^{1-L_{k+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left[(1+R)^{1-L_2} + (1+R)^{1-L_3} + \cdots + (1+R)^{1-L_Z} - (Z-1)(1+R)^{1-L_{Z+1}} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left[(1-Z)\,(1+R)^{1-L_{Z+1}} + \sum_{k=2}^{Z} (1+R)^{1-L_k} \right]$$

$$= \frac{1}{R} \left[(1-Z)\,(1+R)^{-N} + \sum_{k=2}^{Z} (1+R)^{1-L_k} \right]$$