

Elastik Zemin Üzerinde Bulunan Her İki Ucu Ankastre Mesnetli Rastgele ve Sürekli Homojen Olmayan Kirişin Serbest Titreşimi

Mehmet Avcar

İnşaat Mühendisliği Bölümü, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta, Türkiye.
mavcar@mmf.sdu.edu.tr

Özet-Bu çalışmada, elastik zemin üzerinde bulunan her iki ucu ankastre mesnetli rastgele ve sürekli homojen olmayan kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. İlk olarak elastik zemin üzerinde bulunan homojen olmayan kirişin serbest titreşim denklemleri türetilmiştir. Elastik zemin modeli olarak Winkler zemin modeli dikkate alınmıştır. Galerkin ve Monte Carlo yöntemleri uygulanarak, elastik zemin üzerinde bulunan veya bulunmayan homojen olmayan kirişler için temel denklemler elde edilmiştir. Sonuç olarak değişim katsayılarının ve zemin parametresinin serbest titreşim frekansları üzerine etkisi incelenmiştir

Anahtar kelimeler- Titreşim, homojen olmama, kiriş, elastik zemin

Free Vibration of Randomly and Continuously Non-Homogenous Beams with Clamped Edges Resting On Elastic Foundation

Abstract-In this paper, free vibration of beams made of random and continuously non-homogenous materials with clamped edges and resting on an elastic foundation are investigated. First, the vibration equation of non-homogenous beams on the elastic foundation has been derived. Winkler type foundation model is used for foundation model. Applying Galerkin and Monte Carlo methods, some formulas have been obtained for the frequency of non-homogenous beams with and without elastic foundation. Consequently, the effects of non-homogeneity and elastic foundation on free vibration frequency is investigated

Keywords- Vibration, non-homogeneity, beams, elastic foundation

1. GİRİŞ

Çağdaş teknolojiye homojen olmayan malzemelerden oluşan yapı elemanları geniş uygulama alanına sahiptir. Örneğin homojen olmayan malzemelerden oluşan kirişler, havacılık endüstrisinde, gemi ve trenlerin yapımında ve inşaat yapılarında değişik amaçlar için kullanılmaktadırlar. Malzemelerin homojen olmaması üretim tekniklerinden; yüzey ve termal cilalama yöntemleri, ısı ve radyasyon etkileri vs.den ileri gelmektedir. Bu etkiler malzeme özelliklerinin koordinatlarını rastgele, sürekli ve parçalı sürekli fonksiyon olarak noktadan noktaya değişmesine neden olmaktadır [1-2].

Son yıllarda homojen olmayan yapı elemanlarının stabilitesi ile ilgili önemli çalışmalar yapılmıştır [3-4].

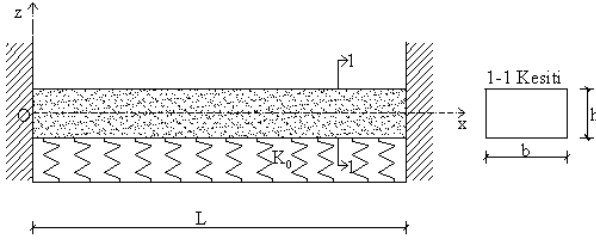
Elastik zemin üzerinde bulunan homojen olmayan yapılarla birçok mühendislik uygulamasında karşılaşmaktadır. Örneğin; demiryolu hatları, geoteknik alanlar, otoyollar, inşaat yapıları, açık deniz yapıları, nakliye kuleleri ve enine mesnetlenmiş boru hatları gibi. Buda birçok araştırmacıyı elastik zemin üzerinde bulunan homojen olmayan yapıların davranışını incelemeye yöneltmiştir. [5-11]. Bu çalışmalardan en dikkat çekilerinden birisi olan Gorbunov-Possadov [5] monografisinde, yapıların elastik zemin üzerindeki tasarımı sunulmaktadır.

Literatürde elastik zemin üzerinde bulunan veya bulunmayan sürekli homojen olmayan yapıların dinamik davranışı ile ilgili birçok sayıda çalışma yer almasına rağmen, rastgele malzeme özelliklerine sahip homojen olmayan yapıların titreşim analizi ile ilgili sınırlı sayıda çalışma yer almaktadır [12–19].

Yapılan kapsamlı literatür araştırmasının sonucunda elastik zemin üzerinde bulunan her iki ucu ankastre mesnetli, uzunluk koordinatına rastgele bağlı ve kalınlık doğrultusunda sürekli homojen olmayan elastik kirişin serbest titreşim analizinin henüz ele alınmadığı görülmüştür. Sunulan çalışmada literatürde yer alan söz konusu eksiklik giderilmeye çalışılacaktır.

2. TEMEL BAĞINTI VE DENKLEMLER

Uzunluğu L , eni b , kalınlığı h ve en kesit alanı S olan elastik zemin üzerinde bulunan homojen olmayan kiriş için kartezyen koordinat sistemi aşağıdaki gibi seçilmiştir: Koordinat orijin kirişin orta düzleminin merkezinde, x eksenini kirişin uzunluğu, y eksenini eni ve z eksenini kalınlık doğrultusunda yönelmektedir. Kirişin her iki tarafı ankastre mesnetlidir. (Şekil 1). Burada K_0 (N/m^3) elastik zeminin rijitlik katsayısıdır.



Şekil 1. Elastik zemin üzerinde bulunan her iki tarafı ankastre mesnetli kiriş

Kirişin elastisite modülü kalınlık ve uzunluk koordinatının, yoğunluğu ise sadece uzunluk koordinatının fonksiyonları olsun: [2-8, 17]

$$E(x_1, z_1) = E_1(x_1)f(z_1), \quad (1)$$

$$\rho = \rho(x_1), \quad x_1 = x/L, \quad z_1 = z/h$$

Burada x_1 ve z_1 sırasıyla, kirişin boyutsuz uzunluk ve kalınlık koordinatları, $E_1(x_1)$ ve $\rho(x_1)$ sırasıyla, malzemenin elastisite modülü ve yoğunluğunun x_1 koordinatına rastgele bağlı bileşenidir. Kirişin elastisite modülünün ikinci bileşeni $f(z_1)$, kalınlık koordinatına göre kuvvet ve üstel fonksiyon olarak sürekli değişmekte ve aşağıdaki bağıntıları sağlamaktadır:

$$f(z_1) = 1 + \mu z_1^n; \quad n = 1, 2, \dots \quad (2)$$

$$f(z_1) = 1 + \mu e^{\mu(z_1-1)} \quad (3)$$

Burada μ , kalınlık koordinatına göre elastisite modülü değişim katsayısı olup, $0 \leq \mu \leq 1$. Bununla birlikte homojen malzemenin elastisite modülü birinci bileşen içerisinde yer almaktadır.

Winkler zemin üzerinde bulunan homojen olmayan elastik kirişin serbest titreşiminin diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[E_1(x_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right] + K_2 L^4 w + \rho(x_1) L^4 \bar{S} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (4)$$

Burada t , zaman olup aşağıdaki tanımlar geçerlidir [7]:

$$K_2 = K_0 / A, \quad \bar{S} = S / A_2, \quad A = bh^3 \int_{-1/2}^{1/2} z_1^2 f(z_1) dz_1 \quad (5)$$

(4) denkleminin çözümü aşağıdaki şekilde aranır:

$$w(x_1, t) = W(x_1) e^{i\omega t} \quad (6)$$

Burada, $W(x_1)$ genlik ve ω titreşim frekansdır.

(6) ifadesi (4) denkleminde yerine yazılıp bazı matematiksel işlemlerden sonra Winkler zemin üzerinde bulunan homojen olmayan elastik kirişin serbest titreşiminin diferansiyel denklemi aşağıdaki şekilde dönüşür:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left[E_1(x_1) \frac{\partial^2 W(x_1)}{\partial x_1^2} \right] - L^4 [k\rho(x_1) - K_2] W(x_1) = 0 \quad (7)$$

Burada şu tanım geçerlidir:

$$k = \frac{\omega^2 S}{A} \quad (8)$$

$x_1 = 0$ ve $x_1 = 1$ olduğunda kirişin her iki ucu ankastre mesnetlidir. Sınır koşulları şu denklemi sağlamaktadır:

$$W(x_1) = 0, \quad \frac{\partial W(x_1)}{\partial x_1} = 0 \quad (9)$$

Burada $W(x_1)$, denklem (9) ile verilen sınır koşullarını sağlayan bir polinomal fonksiyon olup aşağıdaki şekilde seçilmiştir:

$$W(x_1) = w_1(x_1^2 - 2x_1^3 + x_1^4) \quad (10)$$

Burada, w_1 bilinmeyen bir katsayı ve parantez içerisindeki ifade üniform konsol kirişin sabit yüklemeye altındaki statik yer değiştirmesi ile orantılıdır [2]. Malzemenin yoğunluğunun $\rho(x_1)$ sabit, elastisite modülü bileşeni $E_1(x_1)$ rastgele fonksiyon olup, aşağıdaki şekilde ifade edildiğini varsayalım:

$$\rho(x_1) = \rho_0 \quad (11)$$

$$E_1(x_1) = b_0 + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3 + b_4x_1^4$$

Burada, ρ_0 ve b_i ($i=1-4$) rastgele katsayılardır.

(10) ve (11) ifadeleri (7) denkleminde yerine yazıldığında bazı işlemlerden sonra aşağıdaki denklem elde edilir:

$$\begin{aligned} & (2b_2 + 6b_3x_1 + 12b_4x_1^2)(12x_1^2 - 12x_1 + 2) + \\ & + (b_1 + 2b_2x_1 + 3b_3x_1^2 + 4b_4x_1^3) \times (48x_1 - 24) + \\ & + 24(b_0 + b_1x_1 + b_2x_1^2 + b_3x_1^3 + b_4x_1^4) - \\ & - kL^4\rho(x_1)(x_1^2 - 2x_1^3 + x_1^4) + K_2L^4(x_1^2 - 2x_1^3 + x_1^4) = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

(12) denklemi x_1 değişkeninin mertebesine göre düzenlenip katsayıları eşitliği yazıldığında aşağıdaki cebirsel denklemler elde edilir:

$$6b_0 + b_2 - 6b_1 = 0 \quad (13)$$

$$6b_1 + b_3 - 6b_2 = 0 \quad (14)$$

$$144b_2 + 24b_4 - 144b_3 - kL^4\rho_0 + K_2L^4 = 0 \quad (15)$$

$$120b_3 - 120b_4 + kL^4\rho_0 - K_2L^4 = 0 \quad (16)$$

$$360b_4 - kL^4\rho_0 + K_2L^4 = 0 \quad (17)$$

(15)-(17) denklemlerinden k için aşağıdaki ifadeler bulunur:

$$k = \frac{144(b_2 - b_3) + 24b_4}{L^4\rho_0} + \frac{K_2}{\rho_0} \quad (18)$$

$$k = \frac{120(b_4 - b_3)}{L^4\rho_0} + \frac{K_2}{\rho_0} \quad (19)$$

$$k = \frac{360}{L^4\rho_0}b_4 + \frac{K_2}{\rho_0} \quad (20)$$

Bağdaşabilirlik gereksinimini sağlamak için, k için tüm ifadelerin birbirine eşit olması gerekmektedir. Malzeme yoğunluğu sabit olduğu için, problem b_i katsayılarının belirlenmesine indirgenir. Bu nedenle (18)-(20) denklemleri bağdaşabilir.

b_4 açık şekilde belirtildiğinde elastik zemin üzerinde bulunan kirişin doğal frekans katsayısı k için kesin ifade (20) olur ve (13)-(19) denklemleri diğer b_i parametrelerinin bulunmasını sağlar. b_i ($i=0, 1, 2, 3$) parametrelerinin bulunması için Monte Carlo yöntemi kullanılır. Monte Carlo yöntemi ve bazı matematiksel işlemler uygulandıktan sonra b_i ($i=0, 1, 2, 3$) parametreleri b_4 ile aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$b_3 = -2b_4; b_2 = \frac{b_4}{3}; b_1 = \frac{2}{3}b_4; b_0 = \frac{11}{18}b_4 \quad (21)$$

(21) ifadeleri (18)-(20) denklemlerinde yerine yazılıp bazı matematiksel işlemlerden sonra elastik zemin üzerinde bulunan homojen olmayan kirişin temel doğal frekansı için üç değişik ifade elde edilmiştir:

$$\Omega_1 = \sqrt{24 \times A \frac{6b_2 - 6b_3 + b_4}{\rho_0} + K_{01}} \quad (22)$$

$$\Omega_2 = \sqrt{120 \times A \frac{b_4 - b_3}{\rho_0} + K_{01}} \quad (23)$$

$$\Omega_3 = \sqrt{360 \times Ab_4 / \rho_0 + K_{01}} \quad (24)$$

Burada aşağıdaki tanımlar geçerlidir:

$$\Omega_i = \omega_i L^2 \sqrt{\frac{S}{I}}, \quad K_{01} = \frac{K_0 L^4}{\rho_0 I}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (25)$$

Burada I atalet momentidir.

$\mu = 0$ olduğunda, yani elastisite modülü kalınlık koordinatına bağlı olmadığında doğal titreşim frekansı için aşağıdaki ifade elde edilir (Elishakoff and Candan [15]):

$$\Omega_E = \sqrt{360 \frac{b_4}{\rho_0}} \quad (26)$$

3. SAYISAL HESAPLAR

Çizelge 1’de elastik zemin etkisi dikkate alınmadığında ($K_{01} = 0$), kirişin elastisite modülü bileşeni uzunluk koordinatına rastgele, kalınlık koordinatına göre kuvvet ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde ve $\mu = 1$ olduğunda Monte-Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak (22)-(24) ifadeleri üzerine hesaplar yapılmış ve doğal titreşim frekansının dağılımı sunulmaktadır.

Üç ifade birbirinden farklı olsa da doğal titreşim frekansı için aynı değerler elde edilmiştir. Kalınlık koordinatına göre homojen olmamanın etkisi $\bar{f}(z_1)$ homojen olmama fonksiyonunun seçimine bağlı olarak değişmektedir. Örneğin, homojen durumla kıyaslama yapıldığında, en fazla etki $\%18.15$ ile homojen olmama fonksiyonunun üstel olarak değiştiğinde, en az etki ise $\%0.005$ ile homojen olmama fonksiyonu lineer değiştiği durumda elde edilmiştir. Bununla birlikte, homojen olmama fonksiyonu kuadratik olduğunda homojen olmamanın etkisi $\% -7.24$ ’tür.

Burada etki yüzdesi aşağıdaki ifade kullanılarak yapılmıştır:

$$\frac{\Omega_i^h - \Omega_i^{nh}}{\Omega_i^h} \times 100\%$$

Çizelge 1. Kirişin elastisite modülü bileşeni uzunluk koordinatına rastgele, kalınlık koordinatına göre kuvvet ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde doğal titreşim frekansının dağılımı ($K_{01} = 0$; $\mu = 1$)

$\bar{f}(z_1)$	z_1	z_1^2	e^{z_1-1}	$\mu = 0$
Ω_1	18.973	20.347	22.417	
Ω_2	18.973	20.347	22.417	18.974
Ω_3	18.973	20.347	22.417	

Çizelge 2 ve Şekil 2’ de değişik yatak katsayıları dikkate alınarak kirişin elastisite modülü bileşeni uzunluk koordinatına rastgele, kalınlık koordinatına göre kuvvet ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde ve $\mu = 1$ olduğunda Monte Carlo simülasyon yöntemi uygulanarak (22)-(24) ifadeleri üzerine hesap yapılarak doğal titreşim frekansının dağılımı sunulmaktadır.

Görüldüğü gibi elastik zemin etkisi dikkate alındığında, doğal frekansın değeri zemin etkisinin dikkate alınmadığı durumlara kıyaslandığında artmaktadır. Yatak katsayısı değeri arttığında, bu etki daha da büyümektedir. Örneğin $\bar{f}(z_1)$ homojen olmama fonksiyonu üstel şekilde

değiştiğinde ve elastik zemin rijitlik katsayısı (K_{01}) 200, 400 ve 600 olduğunda, doğal frekans değerinin değişimi sırasıyla $\%15.42$; $\%25.38$; $\%48.12$ şeklindedir.

Elastik zemin etkisi dikkate alındığında, doğal frekansa homojen olmamanın etkisi azalmaktadır. Örneğin, $\bar{f}(z_1)$ homojen olmama fonksiyonu kuadratik şekilde değiştiğinde elastik zemin etkisi dikkate alınmadığında ($K_{01} = 0$) homojen olmamanın etkisi $\%7.24$ iken, zemin rijitlik katsayısı (K_{01}) 200, 400 ve 600 olduğunda bu etki sırasıyla $\%4.72$; $\%3.49$; $\%2.77$ şeklindedir. Benzer şekilde, $\bar{f}(z_1)$ homojen olmama fonksiyonu üstel şekilde değiştiğinde elastik zemin etkisi dikkate alınmadığında

($K_{01} = 0$) homojen olmamanın etkisi $\%18.15$ iken, zemin rijitlik katsayısı (K_{01}) 200, 400 ve 600 olduğunda bu etki sırasıyla $\%12.01$; $\%8.97$; $\%7.16$ şeklindedir.

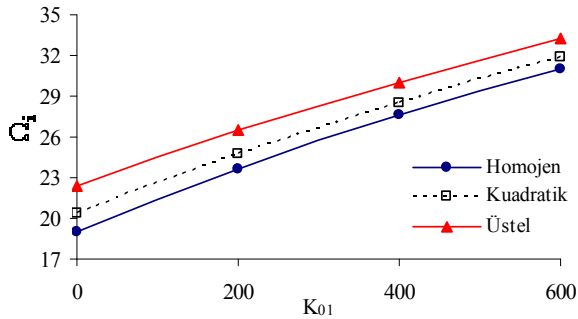
Buradan aşağıdaki sonuçlar çıkarılmaktadır:

- Elastik zeminin rijitlik katsayısı arttığında kalınlık koordinatına bağlı elastisite modülü değişiminin titreşim frekansına etkisi azalmaktadır.
- $\bar{f}(z_1)$ homojen olmama fonksiyonu üstel şekilde değiştiğinde homojen olmamanın titreşim frekansına etkisi, kuadratik şekildeki etkisinden çok olmaktadır. $\bar{f}(z_1)$ homojen olmama fonksiyonu kuadratik değiştiğinde ve elastik zeminin rijitlik katsayısı yeteri kadar büyük olduğunda, homojen olmamanın etkisi dikkate alınmayabilir.
- Ayrıca elastik zeminin rijitlik katsayısı arttığında titreşim frekansının değerleri ona bağlı olarak artmaktadır.

Ayrıca, elastik zemin etkisi dikkate alındığında da doğal titreşim frekansı için bulunan her üç ifade birbirinden farklı olmalarına rağmen değer olarak aynıdır. Dolayısıyla, hesaplar için üç ifadeden her hangi biri kullanılabilir

Çizelge 2. Elastik zemin etkisi dikkate alındığında homojen olmayan kirişin doğal titreşim frekansının dağılımı ($\mu = 1$)

K_{01}	0	200	400	600
Homojen ($\mu = 0$)				
Ω_1	18.974	23.664	27.568	30.984
Ω_2	18.974	23.664	27.568	30.984
Ω_3	18.974	23.664	27.568	30.984
$\bar{f}(z_1) = z_1^2$				
Ω_1	20.347	24.780	28.531	31.843
Ω_2	20.347	24.780	28.531	31.843
Ω_3	20.347	24.780	28.531	31.843
$\bar{f}(z_1) = e^{(z_1-1)}$				
Ω_1	22.417	26.505	30.042	33.204
Ω_2	22.417	26.505	30.042	33.204
Ω_3	22.417	26.505	30.042	33.204



Şekil 2. Elastik zemin etkisi dikkate alındığında homojen olmayan kirişin doğal titreşim frekansının dağılımı ($\mu = 1$).

4. SONUÇLAR

Bu çalışmada, elastik zemin üzerinde bulunan her iki ucu ankastre mesnetli rastgele ve sürekli homojen olmayan kirişin serbest titreşimi incelenmiştir. İlk olarak elastik zemin üzerinde bulunan homojen olmayan kirişin serbest titreşim denklemleri türetilmiştir. Kirişin yoğunluğu sabit, elastisite modülü bileşenleri uzunluk koordinatına bağlı olarak rastgele ve kalınlık koordinatına bağlı olarak kuvvet ve üstel fonksiyonlar şeklinde değiştiğinde, elastik zemin katsayısının değişik değerleri dikkate alınarak serbest titreşim frekansı için sayısal hesaplar yapılmıştır.

Sayısal hesaplarda, Monte Carlo yöntemi uygulanarak elastisite modülünün uzunluk bileşenine rastgele değerler verilerek doğal titreşim frekansı için bulunan her üç ifadeye kalınlık koordinatına göre homojen durumda (veya homojen olmayan durumda) serbest titreşim frekansı değerlerinin deterministik ve eşit olduğu saptanmıştır. Kalınlık koordinatına göre homojen olmamanın serbest titreşim frekansına etkisi homojen duruma kıyasla önemli olduğu görülmüştür. Elastik zemin etkisi dikkate alındığında doğal frekansın değerleri zemin etkisinin dikkate alınmadığı durumlara kıyaslandığında artmakta ve yatak katsayısı değeri arttığında bu etki daha da büyümekte olduğu görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] V.A. Lomakin, **The Theory of Elasticity of Non Homogeneous Bodies**, Moscow, MSU, 1976 (in Russian).
- [2] N.C. Nigam, **Introduction to Random Vibrations**. Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1983.
- [3] A.H. Sofiyev, "The Torsional Buckling Analysis of Cylindrical Shells with Material Non-Homogeneity in Thickness Direction under Impulsive Loading", *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 19, pp. 231-236, 2005.
- [4] A.H. Sofiyev, M. Omurtag, E. Schnack, "The Vibration and Stability of Orthotropic Conical Shells with Non-Homogeneous Material Properties under A Hydrostatic Pressure", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 319, pp. 963-983, 2009.
- [5] M.I. Gorbunov-Possadov, T.A. Malikova, V.I. Solomin, **Design of Structures on Elastic Foundation**, Third edition, revised and completed, Gos. Izd. Lit. po Stroitu I Arkh. (Strojizdat), Moscow, USSR, 1984.
- [6] H.S. Shen, "Postbuckling Analysis of Composite Laminated Plates on Two-Parameter Elastic Foundations", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 37, pp. 1307-1316, 1995.
- [7] A.H. Sofiyev, B. Marandi, "Dynamic Stability of Non-Homogeneous Beams on Elastic Foundation" *Mechanical Scientific Works Review*, Civil Engineering University of Azerbaijan, Baku, vol. 6, pp. 162-165, 1996 (in Russian).
- [8] A.H. Sofiyev, "Non-homogeneous curved bar in elastic surroundings" *Academy of Sciences of USSR, Soviet Scientific and Technical Research Institute (VINITI), "Ref. J. Mechanics" in part Mechanics of Deformable Bodies* 7B1002DEP, No 973-Az88, pp. 1-18, 1998 (in Russian).
- [9] M.H. Omurtag, F. Kadioglu, "Free Vibration Analysis of Orthotropic Plates Resting on Pasternak Foundation by Mixed Finite Element Formulation", *Computers & Structures*, vol. 67, pp. 253-265, 1998.
- [10] P. Malekzadeh, "Three-Dimensional Free Vibration Analysis of Thick Functionally Graded Plates on Elastic Foundations", *Composite Structures*, vol. 89, pp. 367-373, 2009.
- [11] S.C. Pradhan, T. Murmu "Thermo-Mechanical Vibration of FGM Sandwich Beam under Variable Elastic Foundations Using Differential Quadrature Method", *Journal of Sound and Vibration*, vol. 321, pp. 342-362, 2009.
- [12] R. Vaicatis, "Free Vibrations of Beams with Random Characteristics", *Journal of Sound Vibration*, vol. 45, pp. 13-21, 1975.
- [13] S. Candan, I. Elishakoff, "Apparently First Closed-Form Solution for Frequencies of Deterministically and/or Stochastically Inhomogeneous Simply Supported Beams", *ASME, Journal of Applied Mechanics*, vol. 68, pp. 176-185, 2001.

- [14] I. Elishakoff, "Some Unexpected Results in Vibrations of Non-Homogeneous Beams on Elastic Foundation", *Chaos Solitons & Fractals*, vol. 12, pp. 2177–2218, 2001.
- [15] I. Elishakoff, S. Candan, "Apparently First Closed-Form Solution for Vibrating Inhomogeneous Beams", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 38, pp. 3411-3441, 2001.
- [16] B.N. Singh, D. Yadav, N.G.R. Iyengar, "Initial Buckling of Cylindrical Panels with Random Material Properties", *Composite Structures*, vol. 53, pp. 55–64, 2001.
- [17] B.N. Singh, D. Yadav, N.G.R. Iyengar, "Natural Frequencies of Composite Plates with Random Material Properties Using Higher Order Shear Deformation Theory", *International Journal of Mechanical Science*, vol. 43, pp. 2193-2214, 2001.
- [18] A. Avey, M. Avcar, "Elastik Zemin Üzerinde Bulunan Bir Tarafı Ankastre Mesnetli Diğer Tarafı Serbest Homojen Olmayan Kirişin Serbest Titreşimi", **XV. Ulusal Mekanik Kongresi**, pp. 157-166, 2007.
- [19] A.H. Sofiyev,, M. Avcar, Z. Zerín, "The Vibration Analysis of Random and Continuously Non-Homogenous Beams with Clamped Edges and Resting on an Elastic Foundation, **International Symposium on Engineering and Architectural Sciences of Balkan, Caucasus and Turkic Republics**, vol. III, pp. 155-159, 2009.