POLİTEKNİK DERGİSİ

JOURNAL of POLYTECHNIC

ISSN: 1302-0900 (PRINT), ISSN: 2147-9429 (ONLINE)

URL: http://dergipark.org.tr/politeknik

Her eş-sonlu genişlemesinde zayıf rad-tümleyene sahip modüller

Modules having a weak rad-supplement in every cofinite extension

Yazar(lar) (Author(s)): *Emine ÖNAL KIR[1], Hamza ÇALIŞICI[2]*

ORCID[1]: 0000-0002-3025-3290

ORCID[2]: 0000-0002-9897-9012

To cite to this article: : Önal Kır E. and Çalışıcı H., “Modules having a weak rad-supplement in every cofinite extension”, ***Journal of Polytechnic***, 27(1): 379-385, (2024).

Bu makaleye şu şekilde atıfta bulunabilirsiniz: Önal Kır E. ve Çalışıcı H., “Her eş-sonlu genişlemesinde zayıf rad-tümleyene sahip modüller”, ***Politeknik Dergisi***, 27(1): 379-385, (2024).

Erişim linki (To link to this article): http://dergipark.org.tr/politeknik/archive

DOI: 10.2339/politeknik.991518

Her Eş-sonlu Genişlemesinde Zayıf Rad-tümleyene Sahip Modüller

Modules Having a Weak Rad-Supplement in Every Cofinite Extension

Önemli noktalar (Highlights)

- *İnjektif modüller ve eş-sonlu injektif modüllerin tümleyenler anlamında genelleştirilerek yeni modüller tanımlanması. / Defining new modules by generalizing injective modules and cofinitely injective modules in the meaning of supplements.*
- *Her eş-sonlu genişlemesinde zayıf tümleyene sahip modüller ile her eş-atom genişlemesinde zayıf tümleyene sahip modüllerin genelleştirilmesi. / Generalizing the modules that have a weak supplement in every cofinite extension and the modules that have a weak supplement in every coatomic extension.*

Grafik Özet (Graphical Abstract)

Bir R halkasının yarıyerel olması için gerek ve yeter şartın her sol R-modülün (CWRE) özelliğine sahip olması olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca bir modülün (WREE) özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şartın her alt modülünün (WRE*) özelliğine sahip olması olduğu gösterilmiştir. / It is proven that a ring R is semilocal if and only if every left R-module has the property (CWRE). Moreover, it is showed that a module has the property (WREE*) if and only if every submodule of it has the property (WRE*).*

Amaç (Aim)

Her eş-sonlu genişlemesinde ve her eş-atom genişlemesinde zayıf Rad-tümleyene sahip modül yapısı modül teoride henüz bir açık problemdir. Bu modüllere sırasıyla (CWRE) ve (WRE) özelliğine sahip modüller denilerek temel özellikleri ortaya konmak istenmiştir. / The module structure with weak Rad-supplement in every cofinite extension and in every coatomic extension is still an open problem in module theory. These modules are called modules with the properties (CWRE) and (WRE*) , respectively, to reveal their basic features.*

Tasarım ve Yöntem (Design & Methodology)

Her zayıf tümleyen bir zayıf Rad-tümleyendir. Bu gerçekten yola çıkarak her eş-sonlu genişlemesinde ve her eş-atom genişlemesinde zayıf Rad-tümleyene sahip modüller tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. / Every weak supplement is a weak Rad-supplement. From this fact, it is defined that the modules that have a weak Rad-supplement in every cofinite extension and the modules that have a weak Rad-supplement in every coatomic extension and their properties are examined.

Özgünlük (Originality)

Bu çalışmada (CWE) özelliğine sahip modüller ve (WE) özelliğine sahip modüller genelleştirildi. / It has been generalized the modules with the properties (CWE) and (WE*).*

Bulgular (Findings)

(WRE) özelliğine sahip modüller (CWRE) özelliğine sahiptir. (WREE*) özelliğine sahip modüller (CWREE) özelliğine sahiptir. / The modules with the property (WRE*) have the property (CWRE). The modules with the property (WREE*) have the property (CWREE).*

Sonuç (Conclusion)

Yarıyerel halkalar için (CWRE) ve (CWREE) özelliğine sahip modüller yardımıyla yeni bir karakterizasyon verilmiştir. Sol V-halkalar üzerinde (WRE) özelliğine sahip modüllerin (WRE) özelliğine sahip modüller ve injektif modüller ile çakıştığı gözlenmiştir. / It is given a new characterization for semilocal rings by aid of the modules with the properties (CWRE) and (CWREE). It is observed that over left V-rings, the modules with the property (WRE*) coincide with the modules that have the property (WRE) and injective modules.*

Etik Standartların Beyanı (*Declaration of Ethical Standards*)

Bu makalenin yazarları çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler. / The authors of this article declare that the materials and methods used in this study do not require ethical committee permission and/or legal-special permission.

Her Eş-sonlu Genişlemesinde Zayıf Rad-tümleyene Sahip Modüller

Araştırma Makalesi / Research Article

Emine ÖNAL KIR[1*], Hamza ÇALIŞICI[2]

[1]Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Kırşehir, Türkiye

[2]Ondokuzmayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Samsun, Türkiye

(Geliş/Received : 05.09.2021 ; Kabul/Accepted : 22.06.2022 ; Erken Görünüm/Early View : 23.10.2022)

ÖZ

Bu çalışmada, *(CWE)* ve *(CWEE)* özelliğine sahip modüllerin bir genelleştirilişi olarak *(CWRE)* ve *(CWREE)* özelliğine sahip modülleri tanımlıyoruz. *R* bir halka ve *M* sol *R*-modül olsun. Eğer *M (CWRE)* özelliğine sahip ise, *M* modülünün her direkt toplam terimi *(CWRE)* özelliğine sahiptir. Bir *R* halkasının yarıyerel olması için gerek ve yeter şart her sol *R*-modülün *(CWRE)* özelliğine sahip olmasıdır. Ayrıca *(WRE*)* ve *(WREE*)* özelliğine sahip modülleri çalışıyoruz. Bir modülün *(WREE*)* özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart onun her alt modülünün *(WRE*)* özelliğine sahip olmasıdır.

Anahtar kelimeler: Zayıf Rad-tümleyen, yarıyerel halka, eş-sonlu genişleme.

Modules Having a Weak Rad-Supplement in Every Cofinite Extension

ABSTRACT

In this study, we introduce the modules with the properties *(CWRE)* and *(CWREE)* as a generalization of the modules with the properties *(CWE)* and *(CWEE)*. Let *R* be a ring and *M* be a left *R*-module. If *M* has the property *(CWRE)*, then every direct summand of *M* has the property *(CWRE)*. A ring *R* is semilocal if and only if every left *R*-module has the property *(CWRE)*. We also study the modules that have the properties *(WRE*)* and *(WREE*)*. A module has the property *(WREE*)* if and only if every submodule of it has the property *(WRE*)*.

Keywords: Weak Rad-supplement, semilocal ring, cofinite extension.

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Matematik dünya genelinde doğa bilimleri, mühendislik, teknoloji ve maliye gibi birçok alanda problem çözmek için temel araçtır [1], [2], [3]. Vektör uzayları matematikte yaygın bir çalışma alanı oluşturur. Matematikte iyi bilinen vektör uzaylarının bir genelleştirilişi olarak karşımıza modül kavramı çıkar. Bu çalışmada modül teoride henüz yapısı araştırılmamış bazı modüller tanımlanıp cebirsel açıdan incelenerek matematiksel bilginin teorik olarak diğer alanlara uygulanmasına yardımcı olmaya çalışılmıştır.

Bu makale boyunca, R birimli birleşmeli halkayı belirtecek ve tüm modüller üniter sol R-modül olarak ele alınacaktır. M bir modül olsun. $U \leq M$ gösterimi U nun M modülünün bir alt modülü olduğunu ifade edecektir. Burada aynı zamanda M modülüne U nun bir genişlemesi denir [4]. M nin her T öz alt modülü için $M \neq U + T$ ise, bu takdirde U ya M nin küçük alt modülü denir ve bu $U \ll M$ ile gösterilir.

$Rad(M)$, M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin kesişimini, bir başka deyişle M nin tüm küçük alt modüllerinin toplamını, ifade eder. M modülü maksimal alt modüle sahip değilse, M ye radikal modül denir ve $M = Rad(M)$ dir. Sıfırdan farklı bir M modülünün tüm öz alt modülleri M nin küçük alt modülü ise, M ye oyuk modül; tüm öz alt modüllerinin toplamı M nin yine bir öz alt modülü ise, M ye yerel modül denir. $_RR$ sol R-modülü yerel ise R ye yerel halka denir.

$U \leq M$ modüller olsun. M/U bölüm modülü sonlu üretilmişse, U ya M nin eş-sonlu alt modülü denir [5]. Burada aynı zamanda M ye U nun eş-sonlu genişlemesi adı verilir [6]. M modülünün bir U alt modülü için $Rad(M/U) = M/U$ olması $U = M$ olmasını gerektiriyorsa, bir başka deyişle, M nin her radikal bölüm modülü sıfır ise, M ye eş-atom modül denir [7]. Oyuk (özellikle, yerel) modüller, yarıbasit modüller ve sonlu üretilmiş modüller eş-atomdur. M nin eş-atom modül olması için gerek ve yeter şart M nin her öz alt modülünün bir maksimal alt modül tarafından kapsanmasıdır. Ayrıca, eş-atom modüllerin sınıfı genişlemeler ve bölüm modülleri altında kapalıdır.

$U, K \leq M$ modüller olsun. K alt modülü $M = U + K$ özelliğini sağlayan modüllerin minimali ise, ya da denk olarak $M = U + K$ ve $U \cap K \ll K$ ise, K alt modülüne U nun M de bir tümleyeni denir [8]. Eğer $M = U + K$ ve $U \cap K \leq Rad(K)$ ise, K alt modülüne U nun M de bir radikal tümleyeni veya kısaca Rad-tümleyeni ([9] göz önüne alınırsa genelleştirilmiş tümleyeni) denir [10]. $M = U + K$ ve $U \cap K \ll M$ ise, bu takdirde K alt

**Sorumlu Yazar (Corresponding Author)*
e-posta : emine.onal@ahievran.edu.tr

modülüne U nun M de bir zayıf tümleyeni adı verilir [11], [12]. Ayrıca $M = U + T$ şartını sağlayan her T alt modülü, U nun M de bir (zayıf) tümleyenini kapsarsa, U alt modülü M de bol (zayıf) tümleyene sahiptir denir. Eğer $M = U + K$ ve $U \cap K \leq Rad(M)$ ise, K ye U nun M de bir zayıf Rad-tümleyeni denir [13]. $M = U + T$ şartını sağlayan her T alt modülü, U nun M de bir zayıf Rad-tümleyenini kapsarsa, U alt modülü M de bol zayıf Rad-tümleyene sahiptir denir.

Bir M modülünün injektif olması için gerek ve yeter şart her genişlemesinde direkt toplam terimi olmasıdır [4]. İnjektif modüllerin genelleştirilmesi konusunda ilk kez Zöschinger'in başı çektiği görülür. Yazar, her genişlemesinde bir tümleyene sahip modülü *(E)*; her genişlemesinde bol tümleyene sahip modülü ise *(EE)* özelliğine sahip modül olarak tanımlamıştır [14]. Aynı makalede yazar bu modüllerin temel özelliklerini ortaya koymuştur.

Zöschinger'in tanımlarından yola çıkarak, ilk kez Çalışıcı ve Türkmen *(E)* ve *(EE)* özelliğine sahip modülleri genelleştirmiş olup; bir M modülü her eş-sonlu genişlemesinde (bol) tümleyene sahip ise, M modülünü *(CE)* (*(CEE)*) özelliğine sahip modül olarak tanımlamışlardır [6]. Yazarlar tanımladıkları bu modüller yardımıyla yarımükemmel halkalar için yeni bir karakterizasyon vermişlerdir. Aynı çalışmada injektif modüllerin bir başka genelleştirilişi olan eş-sonlu injektif modüller de görülmektedir. Her eş-sonlu genişlemesinde direkt toplam terimi olan modüle eş-sonlu injektif modül denir.

(CE) (*(CEE)*) özelliğine sahip modüllerin bir genelleştirilişi olarak *(CWE)* (*(CWEE)*) özelliğine sahip modüller tanımlanmıştır. Bir M modülünün her eş-sonlu genişlemesinde (bol) zayıf tümleyene sahip olması durumunda M ye *(CWE)* (*(CWEE)*) özelliğine sahip modül denir [15].

Nişancı Türkmen tarafından yapılan çalışmada $M \leq N$ modülleri için N/M bölüm modülü eş-atom ise, N modülü M nin eş-atom genişlemesi olarak adlandırılmıştır. Her eş-atom genişlemesinde (bol) tümleyene sahip modüllere E*-modül (*(EE*)*-modül) denir [16]. Sonlu üretilmiş modüller eş-atom olduğundan E*(*(EE*)*)-modüllerin *(CE)* (*(CEE)*) özelliğine sahip olduğu görülür.

Bir M modülü her eş-atom genişlemesinde (bol) zayıf tümleyene sahip ise, M modülüne *(WE*)* (*(WEE*)*) özelliğine sahip modül denir [17]. Aynı çalışmada, sol V-halka üzerinde *(WE*)* özelliğine sahip her modülün injektif olduğu kanıtlanmıştır.

2. MATERYAL VE METOD (MATERIAL AND METHOD)

Bu bölümde *(CWRE)* ve *(CWREE)* özelliğine sahip modül kavramı tanıtılacaktır. Daha sonra *(WRE*)* and *(WREE*)* özelliğine sahip modüllerin tanımı verilecek olup; sonraki bölümde bu modüllerin temel özellikleri araştırılacaktır.

2.1. Tanım (Definition): M bir modül olsun. M her eş-sonlu genişlemesinde bir zayıf Rad-tümleyene sahipse, M ye *(CWRE)* özelliğine sahip modül denir. Eğer M her eş-sonlu genişlemesinde bol zayıf Rad-tümleyene sahipse, M ye *(CWREE)* özelliğine sahip modül adı verilir.

2.2. Tanım (Definition): M bir modül olsun. M her eş-atom genişlemesinde bir zayıf Rad-tümleyene sahipse, M ye *(WRE*)* özelliğine sahip modül denir. Eğer M her eş-atom genişlemesinde bol zayıf Rad-tümleyene sahipse, M ye *(WREE*)* özelliğine sahip modül adı verilir.

Sonlu üretilmiş modüller eş-atom olduğundan, *(WRE*)* (*(WREE*)*) özelliğine sahip modüller *(CWRE)* (*(CWREE)*) özelliğine sahiptir.

3. SONUÇLAR VE TARTIŞMA (RESULTS AND DISCUSSION)

3.1. Önerme (Proposition): Radikal modüller *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

İspat (Proof). M radikal modül ve N modülü M nin bir eş-sonlu genişlemesi olsun. O halde $N = M + N$ yazılır. Ayrıca hipotezden $M \cap N = M = Rad(M) \leq Rad(N)$ elde edilir.

Bir M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı $P(M)$ ile gösterilirse, $P(M)$ nin M modülünün bir radikal alt modülü olduğu açıktır. Bu yüzden 3.1. Önermesinin aşağıdaki sonucu elde edilir.

3.2. Sonuç (Corollary**)**: Her M modülü için $P(M)$ *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

3.3. Önerme (Proposition): *(CWRE)* özelliğine sahip bir modülün her direkt toplam terimi *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

İspat (Proof). M *(CWRE)* özelliğine sahip bir modül olsun. M nin bir M_1 direkt toplam terimini alalım. Bu takdirde, M nin $M = M_1 \oplus M_2$ olacak şekilde bir M_2 alt modülü vardır. N modülü M_1 in bir eş-sonlu genişlemesi olsun ve $N \oplus M_2$ dış direkt toplamını K ile gösterelim. $\psi: M \longrightarrow K$ doğal injeksiyonu göz önüne alındığında buradan $N/M_1 \cong (N \oplus M_2)/\psi(M) = K/\psi(M)$ bölüm modülünün sonlu üretilmiş olduğu görülür. $M \cong \psi(M)$ *(CWRE)* özelliğine sahip olduğundan, K nin $K = \psi(M) + U$ ve $\psi(M) \cap U \leq Rad(K)$ olacak şekilde bir U alt modülü vardır. $\pi: K \longrightarrow N$ doğal projeksiyonu ile $N = M_1 + \pi(U)$ elde edilir. Üstelik $Çek(\pi) \leq \psi(M)$ olduğundan $\pi(\psi(M) \cap U) = \pi(\psi(M)) \cap \pi(U) = M_1 \cap \pi(U) \leq \pi(Rad(K)) = Rad(N)$ dir. Böylece $\pi(U)$, M_1 in N de bir zayıf Rad-tümleyenidir.

3.4. Teorem (Theorem): Bir M modülünün *(CWREE)* özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M nin her alt modülünün *(CWRE)* özelliğine sahip olmasıdır.

İspat (Proof). ($\Longleftarrow$) M nin bir N eş-sonlu genişlemesini alalım ve N nin bir L alt modülü için $N = M + L$ olsun. Bu takdirde $N/M \cong L/M \cap L$ bölüm modülü sonlu üretilmiştir. Hipotezden, $M \cap L$, L de bir V zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. O halde $L = (M \cap L) + V$ ve $(M \cap L) \cap V = M \cap V \leq Rad(L)$ yazılır. Buradan $N =$

$M + L = M + (M \cap L) + V = M + V$ elde edilir. Böylece M modülü *(CWREE)* özelliğine sahiptir.

$(\Longrightarrow)$ $K \leq M$ olsun. K alt modülünün bir N eş-sonlu genişlemesi için, $M \oplus N$ direkt toplamının $L = \{(k, -k) \in M \oplus N \mid k \in K\}$ alt modülüne göre bölüm modülü $S = M \oplus N / L$ olsun. Her $a \in M$ için $f(a) = (a, 0) + L$ ile tanımlı $f: M \longrightarrow S$ fonksiyonu ve her $b \in N$ için $g(b) = (0, b) + L$ ile tanımlı $g: N \longrightarrow S$ fonksiyonu birer monomorfizmadır. Buna göre μ_1 ve μ_2 içerme fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki diyagram elde edilebilir:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\mu_2"'] & N \arrow[d, "g"] \\ M \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Burada $S = f(M) + g(N)$ eşitliği kolaylıkla görülür. Şimdi her $(a, b) + L \in S$ için $\lambda\big((a, b) + L\big) = b + K$ ile $\lambda: S \longrightarrow N/K$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu tanımlanan λ fonksiyonu $Çek(\lambda) = f(M)$ özelliğine sahip bir epimorfizmadır. Bu yüzden $N/K \cong S/f(M)$ sonlu üretilmiştir. Hipotezden ve f monomorfizma olduğundan, $f(M)$ $(CWREE)$ özelliğine sahiptir. Dolayısıyla S modülü $f(M)$ nin $V \leq g(N)$ olacak şekilde bir V zayıf Rad-tümleyenini kapsar. Bu takdirde $S = f(M) + V$ ve $f(M) \cap V \leq Rad(S)$ yazılır. Buradan $N = g^{-1}(f(M)) + g^{-1}(V) = K + g^{-1}(V)$ ve $K \cap g^{-1}(V) \leq Rad(N)$ bulunur.

3.5. Sonuç (Corollary): Bir M modülünün *(CWREE)* özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M nin her alt modülünün *(CWREE)* özelliğine sahip olmasıdır.

İspat (Proof). M (CWREE) özelliğine sahip ve $U \leq M$ olsun. U alt modülünün bir N eş-sonlu genişlemesini alalım. N nin herhangi bir L alt modülü için $N = U + L$ olsun. Bu takdirde $N/U \cong L/U \cap L$ sonlu üretilmiştir. 3.4. Teoreminden $U \cap L$, L de bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir. O halde L nin $L = (U \cap L) + T$ ve $(U \cap L) \cap T = U \cap T \leq Rad(L)$ olacak şekilde bir T alt modülü vardır. Buradan $N = U + L = U + T$ elde edilir.

Bir M modülünün her eş-sonlu alt modülü M de bir zayıf Rad-tümleyene sahip ise, M ye eş-sonlu zayıf Rad-tümlenmiş modül denir [18].

3.6. Sonuç (Corollary): *(CWREE)* özelliğine sahip bir modülün her alt modülü eş-sonlu zayıf Rad-tümlenmiştir.

3.7. Örnek (Example): $2\mathbb{Z}$ sol $\mathbb{Z}$-modülünü göz önüne alalım. $2\mathbb{Z}$ nin $2\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ bölüm modülü basit olduğundan *(CWRE)* özelliğine sahiptir. Fakat $\mathbf{2\mathbb{Z}}$ bir eş-sonlu genişlemesi olan $\mathbb{Z}$ sol $\mathbb{Z}$ -modülünde bir zayıf Rad-tümleyene sahip değildir. Böylece $\mathbf{2\mathbb{Z}}$ modülü *(CWRE)* özelliğine sahip değildir.

3.8. Önerme (Proposition): M bir modül ve L, M modülünün bir radikal alt modülü olsun. Eğer M/L bölüm modülü *(CWRE)* özelliğine sahipse, M modülü de *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

İspat (Proof). N modülü M nin bir eş-sonlu genişlemesi olsun. Bu takdirde $N/M \cong (N/L)/(M/L)$ sonlu üretilmiştir. Hipotezden M/L *(CWRE)* özelliğine sahip olduğundan, N/L nin $N/L = M/L + V/L$ ve $(M \cap V)/L \leq Rad(N/L)$ olacak şekilde bir V/L alt modülü vardır. Buradan $N = M + V$ elde edilir. Hipotez gereği L radikal olduğundan $M \cap V \leq Rad(N)$ bulunur. Böylece V, M nin N de bir zayıf Rad-tümleyenidir.

3.9. Önerme (Proposition): M bir modül ve N, M nin bir eş-sonlu genişlemesi olsun. Eğer M modülü N de bir K zayıf Rad-tümleyenine sahipse, bu takdirde M modülünün N de $L \leq K$ olacak şekilde sonlu üretilmiş bir L zayıf Rad-tümleyeni vardır.

İspat (Proof). K, M modülünün N de zayıf Rad-tümleyeni olduğundan $N = M + K$ ve $M \cap K \leq Rad(N)$ dir. Buna göre $N/M \cong K/M \cap K$ sonlu üretilmiştir. $K/M \cap K$ bölüm modülünün $x_i \in K$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_1 + (M \cap K), x_2 + (M \cap K), \ldots, x_n + (M \cap K)$ elemanları tarafından üretildiğini kabul edelim. O halde K nin $L = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n$ sonlu üretilmiş alt modülü için $L + M = L + (M \cap K) + M = K + M = N$ bulunur. Bu ise ispatı tamamlar.

3.10. Teorem (Theorem):

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow M \longrightarrow L \longrightarrow 0$$

bir kısa tam dizi ve U radikal modül olsun. Eğer L *(CWRE)* özelliğine sahipse, bu takdirde M modülü de *(CWRE)* özelliğine sahiptir. Diğer taraftan eğer dizi parçalanan ise, önermenin tersi de sağlanır.

İspat (Proof). Gösterimin kısalığı açısından genelliği bozmadan $U \leq M$ olduğunu kabul edebiliriz. N, M nin bir eş-sonlu genişlemesi olsun. O halde $U \leq M \leq N$ modülleri için $N/M \cong (N/U)/(M/U)$ bölüm modülü sonlu üretilmiştir. Böylece N/U, M/U modülünün bir eş-sonlu genişlemesidir. $L \cong M/U$ hipotezden *(CWRE)* özelliğine sahip olduğundan ve U radikal olduğundan 3.8. Önermesi gereği M modülü *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

Diğer taraftan, dizi parçalanan olsun. Bu takdirde, $M \cong U \oplus L$ dir. M *(CWRE)* özelliğine sahip olsun. O halde 3.3. Önermesi gereği L *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

3.11. Sonuç (Corollary): $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $M_1, M_2, \ldots, M_n$ sonlu sayıda radikal modül ve $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$ olsun. Bu takdirde her $i = 1, 2, \ldots, n$ indisine karşılık gelen M_i modülünün *(CWRE)* özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M modülünün *(CWRE)* özelliğine sahip olmasıdır.

İspat (Proof). $(\Longrightarrow)$ M modülünün *(CWRE)* özelliğine sahip olduğunu göstermek için $n = 2$ durumunda ifadenin doğru olduğunu ispatlamak yeterlidir. n üzerine tümevarım uygulanarak ispat görülür. Bunun için $M = M_1 \oplus M_2$ olduğunu kabul edelim. Aşağıdaki kısa tam diziyi göz önüne alalım.

$$0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M \longrightarrow M_2 \longrightarrow 0$$

Hipotezden M_1 radikal olduğundan ve M_2 *(CWRE)* özelliğine sahip olduğundan 3.10. Teoremi gereği M *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

($\Longleftarrow$) 3.3. Önermesi gereği açıktır.

M modülü U modülünün bir genişlemesi olsun. *M* nin sıfırdan farklı her L alt modülü için $L \cap U \neq 0$ ise *M* ye U nun büyük genişlemesi denir. *M, U* nun bir büyük genişlemesi ve *M* nin bir *K* öz genişlemesi için *K, U* nun büyük genişlemesi değilse, *M* ye *U* nun maksimal büyük genişlemesi denir [4].

M modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki denk koşulları sağlayan bir *E* modülü vardır:

1) *E, M* nin büyük injektif genişlemesidir.
2) *E, M* nin maksimal büyük genişlemesidir.

Yukarıdaki denk koşulları sağlayan *E* modülüne *M* nin injektif bürümü denir ve *E(M)* ile gösterilir [4].

3.12. Önerme (Proposition): Bir M modülü için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

1) M her eş-sonlu büyük injektif genişlemesinde bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir.
2) *M* her eş-sonlu maksimal büyük genişlemesinde bir zayıf Rad-tümleyene sahiptir.

İspat (Proof). $(1) \Longrightarrow (2)$ önermesi açıktır.

$(2) \Longrightarrow (1)$ K, M nin bir eş-sonlu büyük injektif genişlemesi ve L, M nin bir eş-sonlu maksimal büyük genişlemesi olsun. $\iota_1: M \longrightarrow K$, $\iota_2: M \longrightarrow L$ içerme fonksiyonları ve $I_L: L \longrightarrow L$ birim fonksiyonunu alalım. Bu takdirde f birebir olmak üzere aşağıdaki değişmeli diyagramı oluşturabiliriz:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"'] & K \arrow[d, "f"] \\ L \arrow[r, "I_L"'] & L \end{tikzcd}$$

M modülü hipotezden *L* de bir zayıf Rad-tümleyene sahip olduğundan, L nin $L = M + V$ ve $M \cap V \leq Rad(L)$ olacak şekilde bir V alt modülü vardır. $M \leq f(K)$ olduğundan $f(K) = f(K) \cap L = f(K) \cap (M + V) = M + f(K) \cap V$ elde edilir. Buradan her $k \in K$ için $f(k) = m + f(k_1) = f(m + k_1)$ olacak şekilde $m \in M$ ve $f(k_1) \in f(K) \cap V$ vardır. f birebir olduğundan $k = m + k_1 \in M + f^{-1}(V)$ dir. Dolayısıyla $K = M + f^{-1}(V)$ bulunur. Üstelik $f^{-1}(M) = M$ olduğundan $M \cap f^{-1}(V) = f^{-1}(M \cap V) \leq Rad(K)$ dir. Böylece $f^{-1}(V)$, *M* nin *K* de bir zayıf Rad-tümleyenidir.

R bir halka olsun. Eğer *R* nin her sol (sağ) ideali $_RR$ sol *R*-modülünde (R_R sağ *R*-modülünde) bir Rad-tümleyene sahipse, *R* ye Rad-tümlenmiş halka denir [19]. $R/Rad(R)$ bölüm halkası sol yarıbasit ve $R/Rad(R)$ bölüm halkasındaki idempotent elemanlar R ye yükseltilebilir ise, *R* ye yarımükemmel halka denir [8]. *R* halkasının yarımükemmel olması için gerek ve yeter şart her sol *R*-modülün *(CE)* özelliğine sahip olmasıdır [6].

R halka ve *M* bir *R*-modül olsun. *M* nin alt modüllerinin kafesi bir zincir ise, *M* modülüne tek serisel modül denir. Eğer *M* tek serisel modüllerin bir direkt toplamı ise, *M* modülüne serisel modül denir. *R* halkası sol (sağ) *R*-modül olarak tek serisel ise, *R* ye sol (sağ) tek serisel halka denir. *R* halkası hem sol hem sağ tek serisel ise, *R* ye tek serisel halka denir. Tek serisel *R* tamlık bölgesi için eğer $Rad(R)$, R nin sıfırdan farklı tek ideali ve $Rad^2(R) \neq 0$ ise *R* ye neredeyse basittir denir [20].

Aşağıda *(CWREE)* özelliğine sahip fakat *(CEE)* özelliğine sahip olmayan bir modül örneği sunulacaktır.

3.13. Örnek (Example): ([19]) $X = \{f: \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \mid f(t) = at + b\,, a, b \in \mathbb{Q} \text{ ve } a > 0\}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde tanımlı afin lineer dönüşümlerin grubu olsun. Bir $\sigma \in \mathbb{R}$ için $Y = \{f \in X \mid \sigma \leq f(\sigma)\}$ ve $Y^+ = \{f \in X \mid \sigma < f(\sigma)\}$ kümelerini düşünelim. *Y* ve Y^+ kümeleri *X* üzerinde bir sol sıralama tanımlar. Keyfi bir F cismi için $F[Y]$ yarıgrup grup halkasında $I = \sum_{g \in Y} +gF[Y]$ maksimal sağ idealdir. $F[Y] \backslash I$ sol ve sağ Ore kümedir ve buna karşılık gelen yerelleştirme *R* neredeyse basit tek serisel bir bölgedir. Keyfi bir $r \in R$ için $S = End(R/rR)$ halkası yarımükemmel olmayan Rad-tümlenmiş halkadır [19]. S Rad-tümlenmiş halka olduğundan, $_SS$ modülü [21] nolu kaynağın 3. Teoreminin bir sonucu olarak ($CWREE$) özelliğine sahiptir. Fakat $_SS$ modülü [6] nolu kaynağın 2.12. Teoremi gereği *(CEE)* özelliğine sahip değildir.

Her basit sol *R*-modülü injektif olan *R* halkasına sol *V*-halka denir. Bir R halkasının sol *V*-halka olması için gerek ve yeter şart her *M* sol *R*-modülü için $Rad(M) = 0$ olmasıdır [8].

3.14. Teorem (Theorem): Aşağıdaki ifadeler bir *R* sol *V*-halkası üzerinde *M* sol *R*-modülü için birbirine denktir:

1) M eş-sonlu injektiftir.
2) M *(CWE)* özelliğine sahiptir.
3) M *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

İspat (Proof). $(1) \Longrightarrow (2) \Longrightarrow (3)$ önermeleri açıktır.

$(3) \Longrightarrow (1)$ N modülü M nin bir eş-sonlu genişlemesi olsun. Bu takdirde N nin $N = M + K$ ve $M \cap K \leq Rad(N)$ olacak şekilde bir *K* alt modülü vardır. *R* sol *V*-halka olduğundan $Rad(N) = 0$ dır. Böylece $N = M \oplus K$ bulunur.

Bir *R* halkasının her *r* elemanı bazı *x* elemanları için *rxr* formunda yazılabilirse, *R* halkasına von-Neumann regüler halka denir. Değişmeli bir *R* halkasının von-Neumann regüler olması için gerek ve yeter şart *R* nin sol *V*-halka olmasıdır [8]. Buna göre 3.14. Teoreminin direkt sonucu olarak aşağıdaki gerçek ifade edilebilir.

3.15. Sonuç (Corollary): *R* değişmeli von-Neumann regüler halka ise, bu takdirde bir *M* *R*-modülünün eş-sonlu injektif olması için gerek ve yeter şart *M* modülünün *(CWRE)* özelliğine sahip olmasıdır.

3.16. Önerme (Proposition): *M* bir noetherian modül olsun. Eğer *M (CWRE)* özelliğine sahipse, bu takdirde *M* modülü *(CWE)* özelliğine sahiptir.

İspat (Proof). N modülü *M* nin bir eş-sonlu genişlemesi olsun. Hipotezden N nin $N = M + L$ ve $M \cap L \leq Rad(N)$ olacak şekilde bir L alt modülü vardır. *M* noetherian olduğundan $M \cap L$ alt modülü sonlu üretilmiştir. Bir modülün radikalinin kapsadığı sonlu üretilmiş alt modüller o modülün küçük alt modülü olduğundan $M \cap L \ll N$ bulunur. Böylece M *(CWE)* özelliğine sahiptir.

Bir M modülünün $M/Rad(M)$ bölüm modülü yarıbasit ise, M modülüne yarıyerel modül denir. Eğer ${}_RR$ sol R-modülü yarıyerel ise, R ye yarıyerel halka denir [11]. Bir M modülünün her eş-sonlu alt modülü M de bir zayıf tümleyene sahipse M ye eş-sonlu zayıf tümlenmiş modül (kısaca cws-modül) denir [22]. Bir R halkasının yarıyerel olması için gerek ve yeter şart her sol R-modülün eş-sonlu zayıf tümlenmiş olmasıdır [22].

3.17. Teorem (Theorem): Bir R halkası için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:

1) R yarıyereldir.
2) Her sol R-modül eş-sonlu zayıf tümlenmiştir.
3) Her sol R-modül *(CWRE)* özelliğine sahiptir.
4) Her sol R-modül *(CWREE)* özelliğine sahiptir.

İspat (Proof). $(1) \Leftrightarrow (2)$ [22] nolu kaynağın 2.22. Sonucu gereği açıktır.

$(2) \Longrightarrow (3)$ M sol R-modül ve N, M nin eş-sonlu genişlemesi olsun. Hipotezden N nin $N = M + L$ ve $M \cap L \ll N$ olacak şekilde bir L alt modülü vardır. Böylece $M \cap L \leq Rad(N)$ elde edilir.

$(3) \Longrightarrow (4)$ M bir sol R-modül olsun. Hipotezden M nin her alt modülü *(CWRE)* özelliğine sahiptir. Bu takdirde 3.4. Teoremi gereği M modülü *(CWREE)* özelliğine sahiptir.

$(4) \Longrightarrow (1)$ M sonlu üretilmiş R-modül ve $U \leq M$ olsun. Bu takdirde M/U bölüm modülü sonlu üretilmiştir. Hipotez gereği U *(CWREE)* özelliğine sahip olduğundan, M nin $M = U + L$ ve $U \cap L \leq Rad(M)$ olacak şekilde bir L alt modülü vardır. Böylece [9] nolu kaynağın 3.9. Teoremi gereği R yarıyerel halkadır.

Bir M projektif modülüne $Çek(f) \ll M$ şartını sağlayan $f: M \longrightarrow N$ epimorfizması ile birlikte N modülünün projektif örtüsü denir. Bir R halkasının yarımükemmel olması için gerek ve yeter şart her sonlu üretilmiş R-modülün bir projektif örtüye sahip olmasıdır [8].

3.18. Önerme (Proposition): R yarımükemmel halka ise, bu takdirde her sol R-modül *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

İspat (Proof). M sol R-modül ve N , M nin eş-sonlu genişlemesi olsun. Burada N nin $N = M + T$ olacak şekilde en az bir T alt modülü olduğunu not edelim. N/M bölüm modülü sonlu üretilmiş ve R halkası yarımükemmel olduğundan, N/M [8] nolu kaynak gereği bir projektif örtüye sahiptir. Buna göre [23] nolu kaynağın 4.40. Yardımcı Teoreminden N nin $N = M + K$ ve $M \cap K \ll K$ olacak şekilde bir K alt modülü vardır. Bu nedenle $M \cap K \leq Rad(N)$ olup ispat tamamlanır.

3.18. Önermesinin tersi genel olarak doğru olmayabilir; yani her sol R-modülü *(CWRE)* özelliğine sahip olmasına rağmen R halkası yarımükemmel olmak zorunda değildir.

3.19. Örnek (Example): ([8]) a ve b asal sayılar olmak üzere aşağıdaki halkayı göz önüne alalım:

$$R := \mathbb{Z}_{a,b} = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, a \nmid n \text{ ve } b \nmid n \right\}$$

R yarımükemmel halka değildir. Ayrıca, R yarıyerel olduğundan 3.17. Teoreminden her sol R-modül *(CWRE)* özelliğine sahiptir.

Bir M modülü her eş-sonlu genişlemesinde bol Rad-tümleyene sahip ise, M modülüne *(CREE)* özelliğine sahiptir denir [21].

3.19. Örneğinde ${}_RR$ modülünü göz önüne alalım. 3.17. Teoremi gereği ${}_RR$ *(CWREE)* özelliğine sahiptir. Ayrıca [19] nolu kaynağın 2.1. Örneği gereği R Rad-tümlenmiş halka değildir. Buna göre [21] nolu kaynağın 3. Teoremi gereği ${}_RR$ modülü *(CREE)* özelliğine sahip değildir.

(E) özelliğine sahip her modül *(WRE*)* özelliğine de sahip olmasına rağmen bu önermenin tersi doğru değildir. Aşağıda buna bir örnek verilecektir.

3.20. Örnek (Example): ([16]) R yarıyerel olmayan Dedekind bölgesi için R nin tamlayanı R^*, R nin kesir cismi S ve boştan farklı bir I indis kümesini göz önüne alalım. Bu takdirde $M = R^* \oplus S^{(I)} \oplus R$ R-modülü [16] nolu kaynaktan görülür ki *(WRE*)* özelliğine sahiptir. Fakat M modülü [14] nolu kaynağın 3.5. Teoreminden *(E)* özelliğine sahip değildir.

3.21. Önerme (Proposition): *(WRE*)* özelliğine sahip bir modülün her direkt toplam terimi *(WRE*)* özelliğine sahiptir.

İspat (Proof). M *(WRE*)* özelliğine sahip bir modül ve K, M nin bir direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde M nin $M = K \oplus V$ olacak şekilde bir V alt modülü vardır. K nin bir N eş-atom genişlemesini alalım. $L = N \oplus V$ olsun. Buna göre $\psi: M \longrightarrow L$ doğal injeksiyonu göz önüne alınırsa $N/K \cong (N \oplus V)/\psi(M) = L/\psi(M)$ bölüm modülü eş-atomdur. Bu takdirde $M \cong \psi(M)$ *(WRE*)* özelliğine sahip olduğundan L nin $L = \psi(M) + T$ ve $\psi(M) \cap T \leq Rad(L)$ olacak şekilde bir T alt modülü vardır. Buradan $\theta: L \longrightarrow N$ doğal projeksiyonu yardımıyla $N = K + \theta(T)$ bulunur. Ayrıca $Çek(\theta) \leq \psi(M)$ olduğundan

$$\theta(\psi(M) \cap T) = \theta(\psi(M)) \cap \theta(T) = K \cap \theta(T) \leq$$
$$\theta(Rad(L)) = Rad(N)$$ elde edilir.

3.22. Önerme (Proposition): Bir M modülünün *(WREE*)* özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M nin her alt modülünün *(WRE*)* özelliğine sahip olmasıdır.

İspat (Proof). $(\Longrightarrow)$ $U \leq M$ ve N, U nun bir eş-atom genişlemesi olsun. $M \oplus N$ modülünün $L = \{(u, -u) \in M \oplus N | u \in U\}$ alt modülüne göre bölüm modülü $T = M \oplus N/L$ olsun. Buna göre her $m \in M$ için $\alpha(m) = (m, 0) + L$ ile tanımlı $\alpha: M \longrightarrow T$ fonksiyonu ve her $n \in N$ için $\beta(n) = (0, n) + L$ ile tanımlı $\beta: N \longrightarrow T$ fonksiyonu birer monomorfizmadır. $\iota_1: U \longrightarrow N$ ve $\iota_2: U \longrightarrow M$ içerme fonksiyonları olmak üzere aşağıdaki diyagram oluşturulabilir:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\iota_1"] \arrow[d, "\iota_2"'] & N \arrow[d, "\beta"] \\ M \arrow[r, "\alpha"'] & T \end{tikzcd}$$

Burada $T = \alpha(M) + \beta(N)$ eşitliği kolaylıkla görülür. Her $(m,n) + L \in T$ için $\theta\big((m,n) + L\big) = n + U$ ile $\theta: T \longrightarrow N/U$ fonksiyonunu tanımlayalım. Bu θ fonksiyonu $Çek(\theta) = \alpha(M)$ özelliğine sahip bir epimorfizmadır. Böylece $N/U \cong T/\alpha(M)$ bölüm modülü eş-atomdur. α monomorfizma olduğundan, hipotez gereği, T modülünün $T = \alpha(M) + K$, $\alpha(M) \cap K \leq Rad(T)$ ve $K \leq \beta(N)$ olacak şekilde bir K alt modülü vardır. Buna göre $N = \beta^{-1}\big(\alpha(M)\big) + \beta^{-1}(K) = U + \beta^{-1}(K)$ ve $U \cap \beta^{-1}(K) \leq Rad(N)$ dir.

$(\Longleftarrow)$ N, M modülünün bir eş-atom genişlemesi olmak üzere N nin bir L alt modülü için $N = M + L$ olsun. Bu takdirde $N/M \cong L/M \cap L$ bölüm modülü eş-atom olup hipotez gereği $M \cap L$ alt modülü L modülünde bir K zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. Dolayısıyla $L = (M \cap L) + K$ ve $M \cap K \leq Rad(L)$ dir. Buradan $N = M + L = M + \big((M \cap L) + K\big) = M + K$ olup K, M nin N de bir zayıf Rad-tümleyenidir.

3.23. Sonuç (Corollary): Bir M modülünün *(WREE*)* özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart M nin her alt modülünün *(WREE*)* özelliğine sahip olmasıdır.

İspat (Proof). M modülü *(WREE*)* özelliğine sahip, $U \leq M$ ve N, U nun bir eş-atom genişlemesi olsun. N nin bir K alt modülü için $N = U + K$ olsun. $N/U \cong K/U \cap K$ bölüm modülü eş-atomdur. 3.22. Önermesi gereği $U \cap K$, K modülünde bir T zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. Dolayısıyla $K = (U \cap K) + T$ ve $(U \cap K) \cap T = U \cap T \leq Rad(K)$ yazılır. Böylece $N = U + K = U + \big((U \cap K) + T\big) = U + T$ olup istenen elde edilir.

3.24. Önerme (Proposition): Bir R sol V-halkası üzerinde *(WRE*)* özelliğine sahip her sol R-modül injektiftir.

İspat (Proof). M (WRE)* özelliğine sahip bir R-modül ve N, M nin bir genişlemesi olsun. N modülünün keyfi bir U alt modülü için $Rad(N/U) = N/U$ olsun. R sol V-halka olduğundan $Rad(N/U) = 0$ dır. Buradan $N = U$ elde edilir. Bu nedenle N modülü eş-atomdur. Eş-atom modüllerin sınıfı bölüm modülleri altında kapalı olduğundan N, M modülünün eş-atom genişlemesidir. O halde hipotez gereği M modülü N de bir L zayıf Rad-tümleyenine sahiptir. Dolayısıyla $N = M + L$ ve $M \cap L \leq Rad(N)$ dir. R sol V-halka olduğundan $Rad(N) = 0$ olup M modülü N nin bir direkt toplam terimidir.

Bir M modülü her genişlemesinde zayıf Rad-tümleyene sahip ise, M modülüne *(WRE)* özelliğine sahiptir denir [24].

Aşağıda 3.24. Önermesi ve [24] nolu kaynağın 9. Sonucundan direkt elde edilen bir denklik ifade edilecektir.

3.25. Sonuç (Corollary): Aşağıdaki ifadeler bir R sol V-halkası üzerinde M R-modülü için birbirine denktir:

1) M (*WRE*) özelliğine sahiptir.
2) M (*WRE**) özelliğine sahiptir.
3) M injektiftir.

4. SONUÇ (CONCLUSION)

Bu makale boyunca *(CWRE)* ve *(CWREE)* özelliğine sahip modüller üzerinde çalışılmıştır. *(CWRE)* özelliğinin direkt toplam terimleri tarafından korunduğu gösterilmiştir. *(CWREE)* özelliğine sahip modüllerin *(CWRE)* özelliğine sahip alt modülleri ile karakterize edilebildiği ispatlanmıştır. *(CWRE)* özelliğine sahip modüller sınıfının özel bir şart ile sonlu direkt toplamlar altında kapalı olduğu gösterilmiştir. *(CWREE)* özelliğine sahip fakat *(CREE)* özelliğine sahip olmayan bir modül örneği sunulmuştur. Değişmeli von-Neumann regüler halka üzerinde eş-sonlu injektif modüllerin *(CWRE)* özelliğine sahip modüller ile çakıştığı gösterilmiştir. Modülleri *(CWRE)* ve *(CWREE)* özelliğine sahip olan halkalar belirlenmiştir. Bunlara ek olarak *(WRE*)* ve *(WREE*)* özelliğine sahip modüller tanımlanmıştır. *(WRE*)* özelliğinin modülün direkt toplam terimleri tarafından aktarıldığı ispatlanmıştır. *(WRE*)* ve *(WREE*)* özelliğine sahip modüllerin arasındaki ilişki ifade edilmiştir. Sol V-halkalar üzerinde *(WRE*)* özelliğine sahip modüllerin injektif olduğu kanıtlanmıştır.

TEŞEKKÜR (ACKNOWLEDGEMENT)

Makalenin değerlendirilmesine ve geliştirilmesine katkı sağlayan değerli hakemlere teşekkür ederiz.

ETİK STANDARTLARIN BEYANI
(DECLARATION OF ETHICAL STANDARDS)

Bu makalenin yazarları çalışmalarında kullandıkları materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve/veya yasal-özel bir izin gerektirmediğini beyan ederler.

YAZARLARIN KATKILARI (AUTHORS' CONTRIBUTIONS)

Emine ÖNAL KIR: Kavramları tanımlamış, önermeleri ispatlamış ve makalenin yazım işlemini gerçekleştirmiştir. / Defined the notions, proved the propositions and wrote the manuscript.

Hamza ÇALIŞICI: Kavramların hangi özelliklerinin araştırılacağını belirlemiştir, makalenin yazım sürecini desteklemiştir. / Determined which features of the notions will be investigated, supported the writing process of the manuscript.

ÇIKAR ÇATIŞMASI (CONFLICT OF INTEREST)

Bu çalışmada herhangi bir çıkar çatışması yoktur. / There is no conflict of interest in this study.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

[1] Dalkılıç O. and Demirtaş N., “VFP-soft kümeler ve karar verme problemleri üzerine uygulaması”, Politeknik Dergisi, 24(4):1391-1399, (2021).

[2] Güler E., “Rotational hypersurfaces satisfying 〖Δ〗^I R=AR in the four-dimensional Euclidean space”, Politeknik Dergisi, 24(2):517-520, (2021).

[3] Karadağ M., “A note on nearly hyperbolic cosymplectic manifolds”, Politeknik Dergisi, 23(4):1403-1406, (2020).

[4] Sharpe D. W. and Vamos P., “Injective Modules”, Lecturers in Pure Mathematics University of Sheffield, Cambridge at the University Press, (1972).

[5] Alizade R., Bilhan G. and Smith P. F., “Modules whose maximal submodules have supplements”, Communications in Algebra, 29 (6): 2389-2405, (2001).

[6] Çalışıcı H. and Türkmen E., “Modules that have a supplement in every cofinite extension”, Georgian Mathematical Journal, 19: 209-216 (2012).

[7] Zöschinger H., “Komplementierte moduln über Dedekindringen”, Journal of Algebra, 29: 42-56 (1974).

[8] Wisbauer R., “Foundations of modules and rings”, Gordon and Breach, Philadelphia, (1991).

[9] Wang Y. and Ding N., “Generalized supplemented modules”, Taiwanese Journal of Mathematics, 10(6): 1589-1601 (2006).

[10] Clark J., Lomp C., Vanaja N. and Wisbauer R., “Lifting modules. Supplements and Projectivity in Module Theory”, Frontiers in Mathematics, Birkhäuser, Basel, (2006).

[11] Lomp C., “ On semilocal modules and rings”, Communications in Algebra, 27 (4): 1921-1935 (1999).

[12] Zöschinger H., “Invarianten wesentlicher Überdeckungen”, Mathematische Annalen, 237: 193-202 (1978).

[13] Choubey S. K., Pandeya B. M. and Gupta A. J., “Amply weak Rad-supplemented modules”, International Journal of Algebra, 6 (27): 1335-1341, (2012).

[14] Zöschinger H., “Moduln, die in jeder erweiterung ein komplement haben”, Mathematica Scandinavica, 35: 267-287 (1974).

[15] Polat N. M., Çalışıcı H. and Önal E., “ Modules that have a weak supplement in every cofinite extension”, Palestine Journal of Mathematics, 4(1): 553-556 (2015).

[16] Nişancı Türkmen B., “Modules that have a supplement in every coatomic extension”, Miskolc Mathematical Notes, 16 (1): 543-551 (2015).

[17] Önal E., Çalışıcı H. and Türkmen E., “ Modules that have a weak supplement in every extension”, Miskolc Mathematical Notes, 17(1): 471-481, (2016).

[18] Eryılmaz F. Y. and Eren Ş., “Totally cofinitely weak Rad-supplemented modules”, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 80 (5): 683-692 (2012).

[19] Büyükaşık E. and Lomp C., “On a recent generalization of semiperfect rings”, Bulletin of the Australian Mathematical Society, 78: 317-325, (2008).

[20] Puninski G., “Some model theory over a nearly simple uniserial domain and decompositions of serial modules”, Journal of Pure and Applied Algebra , 163 (3): 319-337 (2001).

[21] Nişancı Türkmen B., “Modules that have a Rad-supplement in every cofinite extension”, Miskolc Mathematical Notes, 14 (3): 1059-1066 (2013).

[22] Alizade R. and Büyükaşık E., “Cofinitely weak supplemented modules”, Communications in Algebra, 31 (11):5377-5390, (2003).

[23] Mohamed S. H. and Müller B. J., “Continous and discrete modules”, London Mathematical Society Lecture Note Series 147, Cambridge University Press, (1990).

[24] Önal Kır E. and Çalışıcı H., “Modules that have a weak Rad-supplement in every extension”, Journal of Science and Arts, 3 (44): 611-616 (2018)