SÜLEYMAN DEMİREL ÜNİVERSİTESİ TEKNİK BİLİMLER MESLEK YÜKSEKOKULU *SULEYMAN DEMIREL UNIVERSITY TECHNICAL SCIENCES VOCATIONAL SCHOOL*
SDU TEKNİK BİLİMLER DERGİSİ
SDU JOURNAL OF TECHNICAL SCIENCES

YIL : 2012
CİLT : 2
SAYI : 4
SAYFA : 8-12

Polinom Tabanlı Diferansiyel Alan Hesabı Metodu (PDQM)' nun İki Boyutlu Elektromanyetik Probleme Uygulanması

Ahmet Rıfat GÖRGÜN[1], Onur ARI[1], Şükrü ÖZEN[2,3]

[1]*Süleyman Demirel Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektronik ve Haberleşme Mühendisliği Bölümü, Isparta*
[2]*Akdeniz Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, 07058 Antalya*
[3]*Akdeniz Üniversitesi, Endüstriyel ve Tıbbi Uygulama Tabanlı Mikrodalga Araştırma Merkezi (EMUMAM), 07058 Antalya*

Özet- Bu çalışmada polinom tabanlı diferansiyel alan hesabı metodu iki boyutlu elektromanyetik problemi çözmek için uygulanmıştır. Çözüm bölgesi, dalga sayısı, kaynak ve sınır şartları belirlendikten sonra potansiyel hem PDQM ile hem de analitik olarak çözülmüş, karşılaştırılmış ve hata hesaplanmıştır. Çözüm bölgesi, dalga sayısı, kaynak ve sınır şartları sabitken grid sayısı arttırılmış ve grid sayısının doğruluğa etkisi incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Helmholtz denklemi, DQM, PDQM, nümerik yöntemler

Application of Polynomial-based Differential Quadrature Method (PDQM) to 2D Electromagnetic Problem

Abstract- In this work, polynomial-based differential quadrature method is applied to solve 2D electromagnetic problem. After the solution domain, wave number, source and boundary conditions have been determined, the potential has been solved and compared using both PDQM and analytically and error has been calculated. The number of grid points have been increased while the solution domain, wave number, source and boundary conditions are steady-state, the effect of the number of the grid points to the accuracy has been examined.

Key words: Helmholtz equation, DQM, PDQM, numerical methods

1.Giriş

Birçok mühendislik problemi, uygun sınır şartlarıyla birlikte (PDE) kısmi diferansiyel eşitliklerin bir seti yoluyla yönetilir. Örneğin ses dalgaları ve mikrodalgalar Helmholtz eşitliği yoluyla simüle edilebilir. Genellikle bu eşitliklerin kapalı-form çözümlerini elde etmek çok zordur. Ayrıca verilen bir diferansiyel eşitliğe bazı yaklaşık çözümler geliştirmek çözüm için önemlidir. Birçok durumda yaklaşık çözüm ayrık noktalarda fonksiyonel değerler yoluyla ifade edilir (Shu, 1999).

Günümüzde birçok kullanılabilir nümerik analiz metodu bulunmaktadır. Düşük dereceli metotlar kategorisinde bulunan FE metodu, değişken prensipleri veya ağırlık rezidüleri prensiplerine dayanır. FD metodu ise Taylor Serisi açılımı veya polinomsal yaklaşımlara dayanır (Shu, 1999).

FDM (Sonlu Farklar Metodu), FEM (Sonlu Element Metodu) ve BEM (Sınır Element Metodu) yoluyla elde edilen çözümler çevreleyen çok sayıdaki noktalar üzerinde hesap edilmek zorundadır. Bunun nedeni, bahsedilen metotların doğruluk ve kararlılığının, ayrılmış bölgenin inceliğine ve doğallığına güçlü bir şekilde bağlı olmasıdır. Sonuç olarak bu standart metotlar için hesapsal zorluklar sık sık göz önünde bulundurulur (Shu, 1999).
Düşük dereceli metotlarla (FEM, FDM) bu özel noktalarda doğru çözümlerin elde edilmesi için hala çok fazla düğüm noktası kullanılması gerekir. Kabul edilebilir derecede küçük sayıda düğüm noktaları kullanılarak doğru nümerik çözümleri elde etmek için etkili bir ayırma tekniği araştırması sonucunda Bellmann, 1971'de DQ metodunu tanımlamıştır (Bellmann ve Casti, 1971).

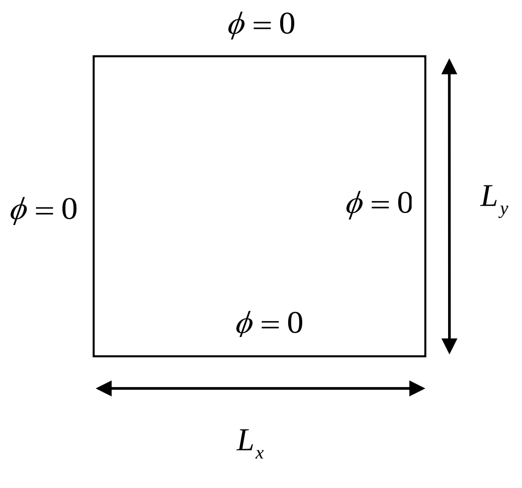
Mingle diferansiyel alan hesabı metodu lineer olmayan difüzyon eşitliğine uygulamıştır (Mingle, 1973; Mingle, 1977). Civan ve Sliepcevich diferansiyel alan hesabı metodunu genişletmiş ve genelleştirmişlerdir. Ayrıca bu metodu poission eşitliğine ve çok boyutlu problemlere uygulamışlardır (Civan ve Sliepcevich, 1983; Civan ve Sliepcevich, 1984). 1996'da Bert ve Malik Diferansiyel Alan hesabı Metot'un tarihsel gelişimini kavram olarak ortaya koymuşlardır. Shu ve Chew 1997 yılında fourier açılımı tabanlı diferansiyel alan hesabı metodunun Helmholtz öz vektör problemlerine uygulanışını göstermiştir (Shu ve Xue Shu ve Xue 1999 yılında diferansiyel alan hesabı metot yoluyla Helmholtz denklemini çözmüştür (Shu ve Xue, 1999). Shu ve Chew 1999 yılında çoklu bölge genelleştirilmiş diferansiyel alan hesabı (GDQ) metotla dikdörtgen sınırlı dalga kılavuzlarının analizini gerçekleştirmişlerdir (Shu ve Xue, 1999).

Günümüzde, DQ metodu; Helmholtz eşitlikleri, Helmholtz öz vektör problemleri, Burgers eşitlikleri, iki boyutlu Poisson eşitlikleri ve bastırılamayan Navier-Stokes eşitliklerinin çözümü ile yapısal ve titreşim analizi uygulamaları, ısı transferi uygulamaları, kimyasal reaktör uygulamaları ve dalga kılavuzu uygulamaları gibi mühendislik ve fizik bilimlerindeki değişik problem ve uygulamalarda etkili bir şekilde kullanılmaktadır.

2. Örnek Problem ve Çözümü

Bu örnekte iki boyutlu Helmholtz problemini ele alındı. Çözüm bölgesi olarak $L_{x}=L_{y}=1$ alınarak kare bir çözüm bölgesi belirlendi. Dalga sayısı olarak k= 0,5 ve kaynak olarak da $f(x,y) = (-2\pi^2 + 0{,}5)\sin \pi x . \sin \pi y$ kaynağı alındı. Sınır şartı, tüm sınırlarda ϕ=0'dır. Burada amaç potansiyeli hem PDQM hem de analitik olarak bulup karşılaştırarak bazı sonuçlara ulaşmaktır. Problemin gerçek çözümü aşağıdaki eşitlikle verilmiştir.

$$\phi_{analitik} = \sin \pi x . \sin \pi y$$



Şekil 1. İki boyutlu Helmholtz problemi

Hesap bölgesi L_x uzunluğunda ve L_y genişliğinde bir dikdörtgensel bölgedir. Örneğimizde iki boyutlu Helmholtz denklemini çözmek için PDQM uygulanacaktır. Öncelikle 2.1a ve 2.1b deki Chebychev-Gauss-Lobatto düğüm dağıtımı kullanılarak düğüm noktalarının x ve y koordinatları belirlendi.

$$0 \le X \le L_x, \quad 0 \le Y \le L_y$$

$$X_i = \frac{1}{2}[1-\cos(\frac{i-1}{N-1}.\pi)].L_x$$

i=1, 2, …., N (2.1a)

$$Y_j = \frac{1}{2}[1-\cos(\frac{j-1}{M-1}.\pi)].L_y$$

j=1, 2, …., M (2.1b)

Bu örnek N=M=5 ve N=M=7 için gerçekleştirildi.

İki boyutlu Helmholtz denkleminin genel formu,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + k^2 \phi = f(x,y)$$

Helmholtz denkleminin PDQ karşılığı

$$\sum_{k=1}^{N} W_{ik}^{(2)} \phi_{kj} + \sum_{k=1}^{M} \overline{W_{jk}}^{(2)} \phi_{ik} + k^2 . \phi_{ij} = f_{ij}$$

N ve M sırasıyla x ve y yönlerinde düğüm noktaları sayısı , $W_{ik}^{(2)}$ ve $\overline{W_{jk}}^{(2)}$ sırasıyla x ve y yönlerindeki ağırlık katsayılarıdır.

Ağırlık katsayılarının hesabında Quan ve Chang'in yaklaşımı kullanılmıştır. Quan ve Chang yaklaşımlarında Lagrange Interpolasyon Polinom' u kullanmaktadırlar.

$$b_{ij} = \frac{2}{x_j - x_i}\left(\prod_{k=1,k\neq i}^{N} \frac{x_i - x_k}{x_j - x_k}\right)\left(\sum_{l=1,l\neq i}^{N} \frac{1}{x_i - x_l}\right)$$

$$i \neq j \qquad (2.1c)$$

$$b_{ii} = 2\sum_{k=1,k\neq i}^{N-1}\left[\frac{1}{x_i - x_k}\left(\sum_{l=k,l\neq i}^{N} \frac{1}{x_i - x_l}\right)\right]$$

$$i = j \qquad (2.1d)$$

PDQ yaklaşımının performansı 2.1e eşitliği ile ölçülmüştür.

$$\Delta\phi = \left|\phi_{ij} - \phi_{analitik}(x_i, y_j)\right| \qquad (2.1e)$$

Burada ϕ_{ij} , (x_i, y_j) ağ noktasındaki nümerik çözüm, $\phi_{analitik}(x_i, y_j)$ ise ağ noktasındaki gerçek çözümdür.

3. Analitik, Nümerik Sonuçlar ve Hata

Tablo 1. Örnek problemin N=M=5 , L_x = L_y =1 ve k^2 =0.5 değerleri için PDQ metodu ile çözülerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.1464$	$X_3 = 0.5000$	$X_4 = 0.8536$	$X_5 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.1464$	0	0.1975	0.4457	0.1975	0
$Y_3 = 0.5000$	0	0.4457	1.0055	0.4457	0
$Y_4 = 0.8536$	0	0.1975	0.4457	0.1975	0
$Y_5 = 1.00$	0	0	0	0	0

Tablo 2. Örnek problemin N=M=5 , L_x = L_y =1 ve k^2 =0.5 değerleri için PDQ metodu ile çözülerek elde edilen $\phi_{analitik}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.1464$	$X_3 = 0.5000$	$X_4 = 0.8536$	$X_5 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.1464$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0
$Y_3 = 0.5000$	0	0.4440	1.0000	0.4440	0
$Y_4 = 0.8536$	0	0.1972	0.4440	0.1972	0
$Y_5 = 1$	0	0	0	0	0

Tablo 3. Örnek problemin N=M=5 , L_x = L_y =1 ve k^2 =0.5 değerleri için PDQ metodu ile çözülerek elde edilen hata $\Delta\phi$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.1464$	$X_3 = 0.5000$	$X_4 = 0.8536$	$X_5 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.1464$	0	0.0004	0.0017	0.0004	0
$Y_3 = 0.5000$	0	0.0017	0.0055	0.0017	0
$Y_4 = 0.8536$	0	0.0004	0.0017	0.0004	0
$Y_5 = 1$	0	0	0	0	0

Tablo 4. Örnek problemin N=M=7 , L_x = L_y =1 ve k^2 =0.5 değerleri için PDQ metodu ile çözülerek elde edilen ϕ_{ij}

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.06$	$X_3 = 0.25$	$X_4 = 0.5$	$X_5 = 0.75$	$X_6 = 0{,}93$	$X_7 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.06$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_3 = 0.25$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_4 = 0.5$	0	0.2089	0.7071	1.0000	0.7071	0.2089	0
$Y_5 = 0.75$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_6 = 0.93$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_7 = 1$	0	0	0	0	0	0	0

Tablo 5. Örnek problemin N=M=7 , L_x = L_y =1 ve k^2 =0.5 değerleri için PDQ metodu ile çözülerek elde edilen $\phi_{analitik}(x_i, y_j)$

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.06$	$X_3 = 0.25$	$X_4 = 0.5$	$X_5 = 0.75$	$X_6 = 0{,}93$	$X_7 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.06$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_3 = 0.25$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_4 = 0.5$	0	0.2089	0.7071	1.0000	0.7071	0.2089	0
$Y_5 = 0.75$	0	0.1477	0.5000	0.7071	0.5000	0.1477	0
$Y_6 = 0.93$	0	0.0436	0.1477	0.2089	0.1477	0.0436	0
$Y_7 = 1$	0	0	0	0	0	0	0

Tablo 6. Örnek problemin N=M=7 , L_x = L_y =1 ve k^2 =0.5 değerleri için PDQ metodu ile çözülerek elde edilen $\Delta\phi$

1.0e-004 *

	$X_1 = 0$	$X_2 = 0.06$	$X_3 = 0.25$	$X_4 = 0.5$	$X_5 = 0.75$	$X_6 = 0{,}93$	$X_7 = 1$
$Y_1 = 0$	0	0	0	0	0	0	0
$Y_2 = 0.06$	0	0.0213	0.0564	0.0235	0.0564	0.0213	0
$Y_3 = 0.25$	0	0.0564	0.1376	0.0041	0.1376	0.0564	0
$Y_4 = 0.5$	0	0.0235	0.0041	0.2637	0.0041	0.0235	0
$Y_5 = 0.75$	0	0.0564	0.1376	0.0041	0.1376	0.0564	0
$Y_6 = 0.93$	0	0.0213	0.0564	0.0235	0.0564	0.0213	0
$Y_7 = 1$	0	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0

4. Sonuçlar

Örnek problem N=M=5 , L_x = L_y =1 ve k^2 =0.5 değerleri için analitik olarak ve PDQM ile nümerik olarak çözülmüştür. Tablo 3' den de görüldüğü gibi hata ($\Delta\phi$)' nın maksimum değeri $5.5\text{x}10^{-3}$ olarak elde edilmiştir. C.L.Chang konvansiyonel düşük dereceli FEM (Sonlu Elemanlar Metodu) kullanarak aynı problemi aynı parametre değerleri için N=M=5 iken çözmüş ve ($\Delta\phi$)' nın maksimum değerini $2.802\text{x}10^{-1}$ bulmuştur (Chang, 1990). Yani İki boyutlu Helmholtz eşitliği Polinom Tabanlı Diferansiyel Alan Hesabı Metodu (PDQM) ile FEM (Sonlu Elemanlar Metodu) kıyasla daha az sayıda düğüm noktası kullanılarak çözülebilir ve doğruluğu daha yüksek nümerik sonuçlar elde edilebilir. Tüm parametreler aynı iken sadece grid sayısını artırıp N=M=7 yaptığımızda ise Tablo 6' dan görüldüğü gibi hata ($\Delta\phi$)' nın maksimum değeri $1.376\text{x}10^{-5}$ olarak elde edilmiştir. Görüldüğü gibi grid sayısının artması doğruluğu arttırmıştır.

5. Kaynaklar

[1] Bellman, R. E., and Casti, J. 1971. Differential Quadrature and Long-term Integration. J. Math. Anal. Appl., vol. 34, pp. 235-238.

[2] Chang, C. L. 1990. A Least Squares Finite Element Method for the Helmholtz Equation, Comput. Methods Appl. Mech.Engrg. 83, 1-7.

[3] Civan, F. and Sliepcevich, C. M., 1983. Application of Differential Quadrature to Transport Processes. J. Math. Anal. Appl. , vol. 93, pp. 206-221.

[4] Civan, F and Sliepcevich, C. M. 1983. Solution of the Poission Equation by Differential Quadrature. Int. J. Numer. Methods. Engrg. , vol. 19, pp. 711-724.

[5] Civan, F and Sliepcevich, C. M. 1984. Differential Quadrature for Multi- dimensional Problems. J. Math. Anal. Appl. , vol. 101, pp. 423-443.

[6] Civan, F and Sliepcevich, C. M. 1984. On the Solution of the Thomas-fermi Equation by Differential Quadrature. J. Math. Anal. Appl. , vol. 101, pp. 423-443.

[7] Mingle, J. O., 1973. Compitational c Considerations in Nonlinear Diffusion. Int. J. Numer. Methods. Engrg. , vol. 7, pp. 103-116.

[8] Mingle, J. O. 1977. The Method of Differential Quadrature for Transient Nonlinear Diffusion. J. Math. Anal. Appl. , vol. 60, pp. 559-569.

[9] Shu, C. and Chev, Y .T. 1997. Fourier Expansion-based Differential Quadrature and Its Application to Helmholtz Eigenvalue Problem. Commun numer methods eng. Vol. 13, ıss 8, pp. 643-653.

[10] Shu, C. and Xue, H. 1999. Solution of Helmholtz Equation by Differential Quadrature Method. Comput method appl. M. , vol. 175, ıss 1-2, pp. 203-212.

[11] Shu, C. and Chev, Y. T. 1999. Application of Multi-domain gdq Method to Analysis of Waveguides with Rectangular Boundaries. In: Kong ja Electromagnetic Waves: pier 21. Emw publishing, pp. 643-653, USA.

[12] Shu, C., 1999. Differential Quadrature and Its Application in Engineering, Springer Singapure.