Y.Y.U.Fen Bilimleri Enstitüsü
1(2),(1992),10-20

BASİT M/M/1 KUYRUĞUNUN DAĞILIM FONKSİYONU VE BEKLEME ZAMANI*

Hüseyin YILDIRIM Hüsnü BARUTOĞLU

ÖZET

Bu calışmada, kuyruk teorisinde bekleme zamanları ve ortalama bekleme zamanı üzerinde duruldu. Bekleme zaman dağılımı ve ortalama bekleme zamanı incelemek için M/M/1 kuyruğu ele alınmıştır.

SUMMARY:

In this study, it has been considered the waiting times and average waiting time in queueing theory. M/M/1 queue were investigated to show tehe distrubition of of waiting time and the average waiting time.

1.GİRİŞ

Bu bölümde bekleme zamanları ve ilgili dağılımları bulmak için bazı temel bilgiler verildi.

1.1.BİR KUYRUK DURUMUNUN AÇIKLAMASI

Bir kuyruğun durumunun, kuyruktaki müşterilerin sayılarıyla değiştiğini söyleyebiliriz. Bir müşterinin bekleme zamanı veya serviscisinin meşguliyet periyodları gibi bazı hesaplamalara yönelik detaylı bir çalışma için, bir kuyruğun yapısının açıklamasının yeterli olmadığı görülecektir.

Kuyruk sisteminin herhangi bir durumda varılış ve/veya servis zamanlarının değiştiği hallerde zaman içinde gelecekteki bir noktada, kuyruğun bir durumundaki kuyruk olasılığı hasaplanabilir. Eğer kuyruğun bu olasılığı hasaplanabilir ise, meşguliyet periyodları, bekleme zamanları, servis zamanları gibi faktörler bulunabilir.

Herhangi bir zamandaki kuyruğun, herhangi bir durumunu gösteren denklemler aşağıda verilmiştir.

*III.Ulusal Matematik Sempozyumunda bildiri olarak sunulmuştur

$P_t(S_1)$= Kuruğun, t zamanında S_1 durumunda olma olasılığı.
$T_t(S_1,S_2,a)$=t zamanında başlayıp a birim zaman aralığında S_1 durumundan S_2 durumuna yer değiştirmenin olasılığıdır.

Olasılık denklemi ise,

$$P_{t+a}(S_2)=\sum_{\text{tüm } S_1 \text{ durumları}} P_t(S_1)T_t(S_1,S_2,a) \quad (1.1)$$

şeklindedir. t+a zamanındaki olasılık denklemleri ile t anındaki olasılık denklemleri arasındaki bir ilişki vardır. Kuyruktaki müşterilerin sayısı kuyruğun durumunu tayin etmede önemlidir. $T_t(S_1,S_2,a)$ geçiş olasılıkları. t'den t+a aralığındaki kuyruktan ayrılmalar ve gelişmelerin ilgili olasılıklarıdır.

[t,t+a] aralığındaki gelişlerin sayısı, aralığın başlangıcı olan t'den önce en son gelen müşterinin geliş zamanına ve aralık uzunluğuna bağlıdır. Bu önceki gelişten sonraki T zamanının δt uzunluğundaki çok küçük bir aralıkta geliş şansı ele alınarak gösterilebilir. Eğer f(t) geliş arası olasılıkların olasılık yoğunluk fonksiyonu ve onun dağılım fonksiyonu $F(t)=\int_0^t f(u)du$ ise, $P(T,\delta t)$ küçük bir aralıktaki bir gelişin olasılığı olmak üzere,

$$P(T,\delta t)=\frac{\{(T,T+\delta t) \text{ arasındaki dağılımın oranı}\}}{\{T\text{'den fazla dağılımın oranı}\}}$$

olur. Çok küçük δt varsa $(T,T+\delta t)$ bölgesindeki dağılımın oranını bir dikdörtgen gibi düşünelim. Genişliği δt ve boyu f(T) olsun. T'den sonraki gelişlerin dağılımı 1-F(T)'dir. Buradan,

$$P(T,\delta t)=\frac{f(T)\delta t}{1-F(T)} \quad (1.2)$$

olur.

(1.2) denklemi T ve δt'nin bir fonksiyonudur. Böylece a uzunluğundaki bir aralıkta gelişlerin sayısı, sadece a'ya bağlı olmayıp, ayrıca aralığın başlangıcındaki ilk gelen müşteriden sonraki zamana da bağlıdır. Benzer olarak herhangi bir aralıktaki kuyruk sisteminden ayrılışlar, aralığın boyuna bağlı olur ve aralığın başlangıcında sürmekte olan herhangi bir servisin süresi aralık boyunca sabit kabul edilir.

Herhangi bir zamandaki kuyruğun durumunu matematiksel çalışmasının yapılması için aşağıdaki tanımlamalar yapılır.
1. Kuyruğun uzunluğu.
2. En son gelen müşterinin gelişine kadar geçen zaman.
3. Şu andaki tüm servis zamanlarının süresi.

1.1.1. ÖZEL BİR DAĞILIM FONKSİYONU

Eğer, (1.2) denklemi T'den bağımsız ise, 2 ve 3'ün bilinmesine gerek yoktur. Bu gereklilik bağımlılık şartı,

$$P(T,\delta t)=k\delta t=\frac{f(T)\delta t}{1-F(T)}=\frac{f(T)\delta t}{1-F(T)}=k.\delta t$$

$$f(t) = k[1-F(T)]$$

$$\frac{dF(T)}{dT} = k[1-F(T)]$$

$$\frac{dF(T)}{[1-F(T)]} = kdT$$

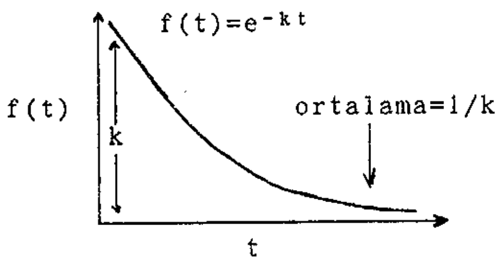
olur. Son ifadenin integrali alınırsa,

$$-\log[1-F(T)] = kT+C$$

olur.Genis aralıkları ve servis zamanları pozitif olduğu için, $F(0) = 0$ dır. $C=0$ olduğundan,

$$1-F(T)=e^{-kt}$$
$$F(T)=1-e^{-kt}$$
$$f(t)=ke^{-kt}$$

elde edilir. Bu ifade negatif üstel dağılımdır. Dağılımın ortalaması olan $1/k$ aynı zamanda zaman ortalamasıdır. Buradaki k, gelislerin oranı veya varsayım altındaki servis oranı gibi orantı sabiti olarak düşünülebilir. Bu dağılım, sekil (1.1) de verilmistir.



Sekil 1.1

1.1.2 M-NEGATIF ÜSTEL DAĞILIM

Yukarıda gösterildiği gibi, bir negatif üstel dağılıma sahip olan bir x rastlantı değiskeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{1}{A} e^{-x/A} \qquad , \quad 0 \leq x < \infty \qquad (1.4)$$

seklinde tanımlanır.

1.1.3 E_k- ERLANG DAĞILIMI

$$f(x)=\frac{b^{k+1} x^k e^{-bx}}{k!} \qquad , \quad 0 \leq x < \infty \qquad (1.5)$$

Bu dağılım, negatif üstel dağılımdan daha genel bir dağılımdır. Çünkü dağılım k ve b gibi iki ayrı parametreye bağlıdır.

1.1.4 D - DETERMİNİSTİK DAGILIM

$$f(x)=\int_0^x f(u)du = \begin{cases} 0 , & x<a \\ 1 , & x\geq a \end{cases} \quad (1.6)$$

Bu durumdaki x değerleri, a üzerinden alınır.

1.1.5 KENDEL'İN KUYRUK GÖSTERİMİ

Gelis zaman dağılımı/Servis zaman dağılımı/Hizmetci sayısı

M/M/1, M/M/n, M/D/1, $E_k/E_t/1$,...

1.1.6 MARKOV PROSESİ

İndeks kümesindeki n sayıda zaman noktasının herhangi bir $t_1<t_2<...<t_n$ kümesi için, X_{t_n} nin X_{t_1}, X_{t_2}, X_{t_3},....$X_{t_{n-1}}$ nin verilen değerlerine göre şartlı dağılımı yalnızca $X_{t_{n-1}}$'in değerine bağlı ise, $\{X_t,\ t \in T\}$ prosesine Markov prosesi adı veilir. Buna göre, herhangi gerçel X_1, X_2, X_3,..., X_n sayıları için,

$$P(X_{t_n}= X_n/ X_{t_1} = x_1, X_{t_2} = x_2,..., X_{t_{n-1}}=X_{n-1}) = P(X_{t_n}=x_n/ X_{t_{n-1}}=x_{n-1})$$

olur.

1.1.7 POISSON PROSESİ

Durum uzayı kesikli ve dağılım fonksiyonu sürekli olan önemli bir olasılık prosesidir.

Bir kentten başka bir kente gelen telefon konusmaları, arabaların bir benzin istasyonuna gelmeleri, alıcıların bir mağazaya gelmeleri poisson prosesi için örneklerdir.

1. Verilen bir zaman aralığında ortaya çıkan olayların sayısı yalnızca zaman aralığının uzunluğuna bağlıdır.

2. Olayların ortaya çıkısı bir birinden bağımsızdır. Verilen bir zaman aralığında ortaya çıkan olaylar, bu aralıkla ortak noktası olmayan başka bir aralıkta ortaya çıkan olayları etkilemezler.

3. Çok küçük bir δt zaman aralığında iki yada daha çok olayın ortaya çıkması olasılığı, tek olayın ortaya çıkması olasılığından çok daha küçüktür.

2.1 BASİT BİR KUYRUK (M/M/1)

Gelisler arası negatif üstel dağılımlı, servis zamanı negatif üstel dağılımlı ve bir özel hizmetçili kuyruk.

2.1.1 PARAMETRELERİN DAGILIMI

f(t) gelis arası zaman dağılımı ve gelişler arası ortalama aralık a olsun. O halde,

$$f(t)= \lambda e^{-\lambda t} \quad (2.1)$$

olur. Burada, λ= Musterilerin gelis oranı=1/a dır. g(u) servis zaman dağılım fonksiyonu ve ortalama servis zaman, s olsun. O zaman,

$$g(u)=\mu e^{-\mu t} \tag{2.2}$$

olur. Burada, μ= servis oranı=1/s dir. $P_t(i)$ = t anında sistemde i tane müşterinin olma olasılığı. i>0 ise, servisin yapıldığı bir müsteri ve servis için bekleyen (i-1) müsteri olacaktır.

2.1.2 KUYRUK ICIN OLASILIK DENKLEMLERİ

t zaman uzunluğunu, δt'den t+ δt'ye kadar olduğunu düşüneceğiz. Aralığın başlangıcındaki $P_t(i)$ olasılıklarına dayanarak $P_{t+\delta t}(0)=P_t(0)$X(aralıkta gerçekleşmeyen olasılıklar)

+ $P_t(1)$X(aralıklta tamamlanmış bir servisin olasılığı)

+ $P_t(2)$X(aralıkta tamalanmıs iki servisin olasılığı)

+ ...

(2.1) ve (2.2) denklemlerinden, ortalama bir müsterinin gelisinin olasılığı, kücük bir δt değeri icin $\lambda\delta t$ dir. Aynı sekilde, aralıkta bitecek bir servisin olasılığı $\mu\delta t$ dir. Aralıkta gerçeklesen iki olayın olasılığı, yani iki gelis, iki ayrılıs veya bir gelis, bir ayrılıs, δt^2 ile orantılı olacaktır. Biz konumuzda, δt'nin katlarını ihmal edeceğiz.

Başlangıcta sistemde hiç müşteri yokken, aralık hiç bir seyin olmaması olasılığı, aralığa hic bir müsterinin ulaşmamasıdır. Yani $(1-\lambda\delta t)$ dir. Böylece yukarıdaki olasılık denklemi,

$$P_{t+\delta t}(0)=P_t(0)(1-\lambda\delta t) + P_t(1)\mu\delta t + 0(\delta t^2) + \ldots \tag{2.3}$$

seklindedir. $(t+\delta t)$ anındaki diğer olasılıklar için denklemler aynı formdadır.

$P_{t+\delta t}(j)=P_t(j)$ (aralıkta hic bir olayın olmaması)

$+P_t(j-1)$ (aralığı bir müsterinin gelmesi olasılığı)

$+P_t(j+1)$ (aralıkta sevisi tamamlanmıs bir müşterinin olasılığı)

+aralıktaki cok katlı olayların terimleri.

Bu denklem, j=1,2,3,4,...,∞ için sağlanır. Aralıkta hic bir seyin olmaması olasılığı, şu anda ne bir gelişin ne de bir servisin olmaması olasılığıdır. Yani, $(1-\lambda\delta t)(1-\mu\delta t)$dir. Bu halde denklem,

$$P_{t+\delta t}(j) = P_t(j)(1-\lambda\delta t)(1-\mu\delta t)+P_t(j-1)\lambda\delta t+P_t(j+1)\mu\delta t + 0(\delta t^2) \qquad j=1,2,3,\ldots,\infty \tag{2.4}$$

seklinde düzenlenir. Bu (2.3) ve 2.4) denklemlerini yeniden düzenlersek,

$$\frac{[P_{t+\delta t}(0)-P_t(0)]}{\delta t}=\mu P_t(1)-\lambda P_t(0)+0(\delta t^2) \qquad (2.5)$$

$$\frac{[P_{t+\delta t}(j)-P_t(j)]}{\delta t}=P_t(j-1)+\mu P_t(j+1)-(\lambda+\mu)+P_t(j)+0(\delta t^2)$$

$$j=1,2,3,4...,\infty \qquad (2.6)$$

$t \longrightarrow 0$ olduğundan bu denklemler,

$$\frac{d}{dt} P_t(0) = \mu P_t(1)-\lambda P_t(0) \qquad (2.7)$$

$$\frac{d}{dt} P_t(j)=\lambda P_t(j-1)+\mu P_t(j+1)-(\lambda+\mu)P_t(j) \qquad (2.8)$$

$$j=1,2,3,4...,\infty$$

şeklende elde edilir.

2.1.3 BİR KUYRUĞUN SABİT DURUMU

Genel olarak, zamanın belirli bir noktasından sonraki kısa bir periyoddan ziyade, uzun zaman periyodunda bir kuyruğun hareketi üzerindeki olasılık denklemlerinden görebilirizki, üstel terimler t'nin büyük değerleri için ihmal edilebilir (1). Böylece, P_j olasılıkları düzgün olarak t'den bağımsız terimlere yakınsayacak. Sistemin sabitliği, sistemdeki müşteri sayısının değiştmediği anlamında değil; sadece olasılıkların değişmediği anlamında sabittir.

Uzun bir zaman periyodu üzerindeki kuyruğun hareketi sabit durum olasılıkları ile belirlenecektir. Sabit durum olasılaklarının denklemleri, zamana bağlı olasılık denklemlerinden daha koylaydır. Burada, sabit durum olasılıklarının denklemleri zamandan bağımsız olduğundan, denklemlerden t'yi atabiliriz. Bundan dolayı,

P(j)=sistemde bulunan j tane müsterinin sabit durum olasılığı.

$$j=0,1,2,3,...,\infty \qquad (2.9)$$

seklindedir. Sabit durumda da,

$$\frac{d}{dt} P_t(j)=0 \qquad (2.10)$$

$$j=0,1,2,3,...,\infty$$

olur. (2.7) ve (2.8) denklemlerinden,

$$\mu P(1)- P(0)=0 \qquad (2.11)$$

ve

$$\lambda P(j-1)+\mu P(j+1)-(\lambda+\mu)P(j)=0 \qquad (2.12)$$

$$j=1,2,3,...,\infty$$

ifadeleri elde edilir.(2.11) ve (2.12) denklemleri birlikte göz önünde bulundurularak,

$$\mu P(j)=\lambda P(j-1)$$
$$j=1,2,3,\ldots,\infty$$

elde edilir. Buradan da,

$$\mu P(1) = \lambda P(0)$$
$$\mu P(2) = \lambda P(1)$$
$$\mu P(3) = \lambda P(2)$$
$$\ldots \quad \ldots$$
$$\mu P(j-1) = \lambda P(j-2)$$
$$\mu P(j) = \lambda P(j-1)$$

ve

$$\mu^j P(1)P(2)\ldots P(j-1)P(j) = \lambda^j P(0)P(1)\ldots P(j-2)P(j-1)$$
$$\mu^j P(j) = \lambda^j P(0)$$
$$P(j) = (\lambda/\mu)^j P(0) \qquad (2.13)$$
$$j = 1,2,\ldots,\infty$$

elde edilir. Olasılıklar Toplamı Kuralından,

$$\sum_{j=o}^{\infty} P(j)=1 = \sum_{j=o}^{\infty} (\lambda/\mu)^j P(0)$$

$$= \frac{P(0)}{1-(\lambda/\mu)} \qquad \lambda<\mu \quad \text{için} \qquad (2.14)$$

$$P(0) = [1-(\lambda/\mu]$$

bulunur. $(\lambda/\mu) =$ olarak gösterilirse, olasılıklar,

$P(j)= \rho^j(1-\rho)$ bulunur.

2.1.4. MUSTERİ BEKLEME ZAMAN DAGILIMI

Sabit durum olasılıkları, özeilikle müşteriler sisteme geldiği bir anda geçerlidir. Sistemde j müşterinin olması olasılığı (2.13) ile verilmiştir. Bir müşteri geldiği zaman sistemde müşteri yoksa, müşteri servis için beklemek zorunda değildir. Sistemde hiç müşterinin olmadığı P(0) sabit durum olasılığı ile gösterilir. Servis için beklemek zorunda olmayan bir müşterinin olasılığı.

$$P(0)= 1-\rho \qquad (2.15)$$

dır. Diğer bütün durumlarda müşteriler beklemek zorundadır. Bir müşteri geldiğinde sistemde j tane müşteri varsa, servisin yapılması için, j tane müşterinin servisinin yapılmasını beklemek zorundadır. Çünkü sistemli olarak kuyruğa ilk gelene ilk servis yapılır.

Bekleme zamanını muhtelif bölümler olarak ele alacağız. Müşterinin servis zamanından sonraki, ilk müşterinin servisi, gelişi üzerine yapılır. Diğer (j-1) müşterinin özel servis zamanları, diğer safhalarda yapılır. Eğer W_j müşterilerin bekleme zamanı ise,

$$W_j= r_1+S_2 +S_3+\ldots+S_j \qquad (2.16)$$

olur.Burada, r_1= varsayım altındaki müşterilerin gelişi üzerine servisi yapılan müşterilerin servis zamanının kalan kısmıdır. $S_2,S_3,\ldots,S_j$ varsayım altındaki müşterilerden önce servis bekleyen (j-1)tane müşterinin özel servis zamanlarıdır.

Özel servis zamanının dağılımı bilinen üstel dağılımdır. Dağılımı bilinmeyen bekleme zamanının bir parçası olan r_1 dir. Varsayım altındaki müsterilerin gelişi üzerine servisi yapılan müsterilerin servis zamanının artan kısmı r_1 dir. Gelislerden önceki T zamanında baslayan servis dağılımını ele alalım. Toplam servis zamanı olan $T+r_1$ Negatif üstel dağılımına sahiptir. r_1 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu, $g(r_1)$ olsun. Buradan, F(T) Negatif üstel Dağılımın toplam olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun.

$$F(T) = 1-e^{-\mu T}$$

$$g(r_1)dr_1 = \frac{\mu e^{-\mu(t+r_1)}}{[1-F(T)]} dr_1 \qquad (2.17)$$

olur.

O halde,

$$g(r_1)dr_1 = \frac{\mu e^{-\mu(T+r_1)}}{e^{-\mu T}}$$
$$= \mu e^{-\mu r_1} dr_1 \qquad (2.18)$$

olur. Yani, servis zamanının artan kısmı olan r_1, tanımlanmıs servis zamanı gibi tam olarak (Negatif Üstel Dağılıma) aynı dağılıma sahiptir.

2.1.5.TEOREM

Baslangıctan itibaren j inci olayın ortaya çıkısına kadara geçen zaman $T_1+T_2+....+T_j$ olur. $T_1+T_2+....+T_j$ olasılık değiskeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu, Gamma olasılık yoğunluk fonksiyonudur.

İspat: (2.2) de verilin üstel olasılık yoğunluk fonksiyonunun moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_T(S) = E(e^{st}) = \frac{\mu}{\mu-S}$$

olur. $T_1, T_2, ..., T$ bağımsız olasılık değiskenleridir. Buna göre,

$$Z = T_1+T_2+....+T$$

nin moment çıkaran fonksiyonu,

$$M_Z(S) = E[e^{s(T_1+T_2+....+T_j)}]$$
$$= [M_Z(S)]^j$$
$$= \left[\frac{\mu}{\mu-S}\right]^j \qquad (2.19)$$

bulunur. (2.19) Gamma Olasılık Yoğunluk fonksiyonunun moment çıkaran fonksiyonudur. $Z = T_1+T_2+....+T_j$ nin olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f_Z(Z) = \frac{\mu^j}{(j-1)!} Z^{(j-1)} e^{-\lambda z} \quad , Z > 0$$
$$= 0 \quad , Z \leq 0 \qquad (2.20)$$

seklinde yazılır.
W_j'nin bilesenlerinin dağılımı bilinen üstel dağılımdır. Ayrıca servis zamanları birbirinden bağımsızdır. Bu halde W_j'nin dağılımını bulabiliriz. Teorem 2.1.5'e göre,
W_j= t'nin Olasılık Yoğunluk fonksiyonu,

$$f(t) = \frac{\mu^j t^{(j-1)} e^{-\mu t}}{(j-1)!} \qquad (2.21)$$

seklinde bulunur. t anında beklemekte olan bir müsterinin herhangi sayısı icin, bir t anında beklemek zorunda olan müsterilerin olasılıklarının toplamı olmalıdır. W(t) Olasılık Yoğunluk fonksiyonu olsun. Buradan,

$$W(t) = \sum_{j=1}^{\infty} P(j) W_j(t)$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} (1-\rho)\, \rho^j \frac{\mu^j t^{(j-1)} e^{-\mu t}}{(j-1)!}$$
$$= (1-\rho)\, \rho \mu e^{-\mu t} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\mu \rho t)^{j-1}}{(j-1)!}$$
$$= (1-\rho) \rho \mu e^{-\mu(1-\rho)t} \qquad (2.22)$$

olarak hesaplanır. Bu fonksiyon, bu kuyrukta (M/M/1) bekleyen bir müsterinin bekleme zamanını tam olarak tanımlar.
Ortalama bekleme zamanı,

$$\int_0^{\infty} tW(t)dt = \int_0^{\infty} t(1-\rho)\, \rho \mu e^{-\mu(1-\rho)t}\, dt$$
$$= \frac{\rho}{(1-\rho)\mu} = \frac{\rho}{(1-\rho)} S, \quad S=1/\mu \qquad (2.23)$$

seklindedir. Sabit durumdaki sistem icin müsterilerin ortalama sayısı,

$$\text{Sistemdeki ortalama sayı} = \sum_{j=0}^{\infty} jP(j)$$
$$= \sum_{j=0}^{\infty} j \rho^j (1-\rho)$$
$$= \frac{\rho}{(1-\rho)} \qquad (2.24)$$

kuyruktaki müsterinin ortalam sayısı,

$$\sum_{j=1}^{\infty} (j-1)P(j) = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^j (j-1)(1-\rho)$$
$$= \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad (2.25)$$

seklindedir.

Serviscinin utulasyonu $= 1-P(0)$
$= 1-(1-\rho)$
$= \rho$ (2.26)

dır.

3.1.1.ENGELLI M/M/1 KUYRUGU

Rastgele gelisli ve negatif üstel servis zamanlı tek serviscili, n müşterinin bulunması durumunda, α^n olasılık birlestiren basit kuyruğu ele alalım. Buradaki α sabiti $0 \le \alpha \le 1$ seklindedir. Kuyruk birleşim olasılığı üstel olarak α dağılımlı, daha büyük veya daha küçük kuyruk uzunluk oranı ile azalır.

λ= engelden önceki müşterilerin gelis oranı.
μ= servis oranı

Bunlara göre sabit durum olasılıkları.

$$\lambda P(0)=\mu P(1)$$
$$(\mu+\lambda\alpha^n)=\mu P(n+1)+\lambda\alpha^{n-1}\, P(n-1)$$
$$1 \le n < \infty \qquad (3.1)$$

buradan,

$$P(n)= \lambda/\mu\alpha^{n-1}(n-1) \quad \text{olur.}$$

$\mu=\lambda/\mu$ olarak alınırsa,

$$P(n)=u^n\alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}\, P(0) \qquad (3.2)$$
$$0 \le n < \infty$$

olur. Olasılıkların toplamından,

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n)=1, P(0)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} U^n \alpha^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

(3.3)

olur.Sistemin utililsationu= $1-P(0)$
Engel olusturmayan sistemin utilisationu U dur, öyle ki engeli olusturan müsterilerin, bir kısımını veren $(1-P(0))/U$ dan kuyruk uzunluğu ile müsteriler vazgeçirilemez. Engelin olusma olasılığı, $1-(1-P(0))/U$ dır.

kuyruktaki müsterilerin ortalama sayısı $= \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)P(n)$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} nP(n)-[1-P(0)] \qquad (3.4)$$

Sistemindeki müsterilerin ortalama sayısı$= \sum_{n=0}^{\infty} nP(n)$
f(t) bekleme zaman dağılımı,

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n t^{n-1} e^{-\mu t}}{(n-1)!} \alpha^n P(n) \qquad (3.5)$$

seklindedir. Buradan, ortalama bekleme zamanı,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mu} \alpha^n P(n)= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} nP(n+1)$$ olur.

KAYNAKLAR

1. ÇINLAR, E, "Introduction to stochastic processes" Northwestern Uhiverstiy, 1975,

2. İNAL, C, "Olasılıksal süreçlere giris". Hacettepe Üniv. yayınları A-56, 1988,

3. KENDALL, D.G., Stachastic processes ocurring in the theory of queues and their analiysis by the methot of the imbedded markov chain; Ann.Math. Stat., 24,p. 338-334, 1953

4. PARZEN, E., "Stochastic Processes", London 1962

5. TAKACS, "Introduction to the theory of Queues". New York, 1961