Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 39:3 (2024) 1759-1770



Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi Journal of The Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University

Estimation of design parameters of a retaining wall with support vector regression approach

Ümit Çalık*回

Department of Civil Engineering, Faculty of Technology, Karadeniz Technical University, Trabzon, 61830, Türkiye

Highlights:

Graphical/Tabular Abstract

• Utilization of Support Vector Regression (SVR) for estimating design parameters of a retaining wall

- Examining the effectiveness of two common data sampling techniques in a geotechnical problem
- Evaluation the level of accuracy and reliability of the best SVR models with an existing article in the literature

Keywords:

Support Vector Regression

- Design parameters of a
- retaining wall
- Seismic loads
- Cohesive backfill soil
- Statistical indicators

Article Info:

Research Article Received: 13.09.2021 Accepted: 03.09.2023

DOI:

10.17341/gazimmfd.994823

Correspondence:

Author: Ümit Çalık e-mail: calik@ktu.edu.tr phone: +90 462 377 8419 The machine learning-based models of Support Vector Regression (SVR) are used to predict the magnitude (P_{ae}) and the point of action (z_{ae}) of seismic active earth thrust, the critical inclination (α_{cr}) of failure surface with the horizontal plane. The high capacity SVR models are developed with consideration of the nonlinear influences of several input parameters on the design parameters of a retaining wall. The validation of the built SVR models is also investigated by comparing their estimated values with an existing article in the literature. The statistical performance is presented in Table A using the six indicators (e.g., R², R²_{adj}, MSE, RMSE, MAE, and MAPE).

Elektronik / Online ISSN: 1304 - 4915 Basılı / Printed ISSN: 1300 - 1884

Table A. The values of statistic	l indicators at the validation stage
----------------------------------	--------------------------------------

	Pae	αcr	Zae	
R^2	0.990	0.911	0.876	
R^2_{adj}	0.980	0.829	0.758	
MSE	98.001	3.244	0.047	
RMSE	31.305	1.801	0.216	
MAE	24.379	1.301	0.185	
MAPE, %	7.173	2.156	5.310	

Purpose:

This study aims to use SVR to determine the nonlinear regression relationships among the input parameters, (e.g., wall height, surcharge load, cohesion and internal friction angle of backfill soil, adhesion between wall-backfill interface, tension cracks, horizontal and vertical seismic acceleration coefficients) for estimating the design parameters (P_{ae} , z_{ae} and α_{cr}) of the retaining wall. The success of the study is evaluated by comparing the results of the built regression models with the other article's values.

Theory and Methods:

SVR is a powerful and effective method to perform supervised machine learning tasks on very large datasets. SVR can be easily applied in major engineering branches because of its desirable advantages, such as the ease of adopting the nonlinear regression problems, the ability to obtain a successful model that expresses a broad variety of behavior under conditions of uncertainty in prediction, through its various covariance functions. Furthermore, the two common sampling techniques are used and compared for partitioning the data and searching for the best SVR models in this paper.

Results:

SVR indicates its ability to determine the nonlinear relationships while working with huge databases. Herein, it yields the highest values of R^2 and R^2_{adj} and the lowest values of MSE, RMSE, MAE, and MAPE. These statistical indicators reveal that the learning algorithms of SVR are more successful and can be used to especially predict P_{ae} and α_{cr} . It should be hereby noted that the SVR for predicting z_{ae} is relatively weaker. In addition, the sampling techniques cannot exhibit significant differences when compared to each other.

Conclusion:

SVR is one of the most powerful nonlinear regression methods to find a mathematical correlation among the variables of the considered problem. As a result, SVR presents adaptive regression models to minimize the effort, time, and money spent on estimating P_{ae} , z_{ae} and α_{cr} for entering different input parameters.

Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 39:3 (2024) 1759-1770



Mühendislik Mimarlık Fakültesi Dergisi Journal of The Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University

Elektronik / Online ISSN: 1304 - 4915 Basılı / Printed ISSN: 1300 - 1884

Destek vektör regresyonu yaklaşımı ile istinat duvarı tasarım parametrelerinin belirlenmesi

Ümit Çalık*回

Karadeniz Teknik Üniversitesi, Teknoloji Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 61830 Of, Trabzon, Türkiye

<u>Ö N E Ç I K A N L A R</u>

- Destek Vektör Regresyonunun (DVR) bir istinat duvarı tasarım parametrelerinin belirlenmesinde kullanımı
- İki yaygın veri örnekleme tekniğinin geoteknik bir problemdeki etkinliğinin incelenmesi
- En iyi DVR modellerinin doğruluk ve güvenilirlik seviyesinin literatürde var olan bir makale ile değerlendirilmesi

Makale Bilgileri	ÖZ
Araștırma Makalesi	Kritik kayma yüzeyinin yeri (α _{cr}), aktif zemin itkisinin büyüklüğü (Pae) ve etki mesafesi (zae); istinat
Geliş: 13.09.2021	duvarlarının arkasındaki geri dolgu zemini özellikleri, yükleme durumu ve enkesit geometrisi ile ilişkili
Kabul: 03.09.2023	birçok parametrenin etkisi altındadır. Son yıllarda, çok değişkenli geoteknik problemlerdeki matematiksel ilişkileri ortava çıkarabilen Destek Vektör Regresyonu (DVR) gibi güçlü makine öğrenme algoritmaları.
DOI:	zaman kaybettirici hesap adımlarını izlemeden kilit tasarım parametrelerinin tahmin edilmesinde
10.17341/gazimmfd.994823	kullanılmaktadır. Bu çalışma, 6 çekirdek (kernel) fonksiyonunu ve 2 veri örnekleme tekniğini göz önünde tutarak büyük bir veri kümesindeki değişkenler araşındaki en iyi regresyon modellerinin tespitinde DVR
Anahtar Kelimeler:	yöntemine başvurmuştur. P _{ae} için kübik fonksiyon, α_{cr} ve z_{ae} için medium gauss fonksiyon en iyi çekirdek
destek vektör (makine)	fonksiyon seçenekleri olmuştur. Model tahminlerinin gerçek değerlerden sapmaları, α_{cr} , P_{ae} ve z_{ae} için
regresyonu,	sırasıyla $\pm 8^\circ$, ± 20 kN/m ² ve ± 0.15 m gibi bir aralık içinde yer almıştır. DVR modellerin öngörü
istinat duvarlarının tasarım	yeteneklerinin doğrulanması, yepyeni bir data setindeki başka bir çalışmanın sonuçlarıyla istatistiksel olarak
parametreleri,	karşılaştırılması ile gerçekleştirilmiştir. Burada, DVR modeller en başarılı tahminlerini P_{ae} ve α_{cr} için
sismik yükler,	sergilemişlerdir. Bununla birlikte, z_{ae} için model tahminleri nispeten bir parça zayıf kalsa da yine kabul
kohezyonlu arka dolgu	edilebilir bir seviyededir. Ayrıca, SVR modellerin performansında veri örnekleme tekniklerinin kayda değer
zemini,	bir etkisi olmamıştır.
istatistiksel göstergeler	

Estimation of design parameters of a retaining wall with support vector regression approach

HIGHLIGHTS

• Utilization of Support Vector Regression (SVR) for estimating design parameters of a retaining wall

- Examining the effectiveness of two common data sampling techniques in a geotechnical problem
- Evaluation the level of accuracy and reliability of the best SVR models with an existing article in the literature

Article Info	ABSTRACT
Research Article	Support Vector (Machine) Regression, Design parameters of retaining walls, Seismic loads, Cohesive
Received: 13.09.2021	backfill soil, Statistical indicators The location of critical sliding surface (α_{cr}), the magnitude (P_{ae}) and
Accepted: 03.09.2023	application point (z_{ac}) of active earth thrust are influenced by many parameters related to the properties of
	backfill soil, loading conditions and cross-section geometry behind retaining walls. In recent years, the
DOI:	powerful machine learning algorithms such as Support Vector Regression (SVR), to reveal mathematical
10.17341/gazimmfd.994823	relationships in multivariate geotechnical problems, have been used for predicting of the key design parameters without following time-consuming calculation steps. This study applies SVR, considering 6
Keywords:	kernel functions and 2 data sampling techniques, to determine the best regression models between variables
Support vector (machine)	in a large dataset. The cubic function for P_{ae} and the medium gauss function for α_{cr} and z_{ae} are the best kernel
regression,	options. The deviations of α_{cr} , r_{ae} and z_{ae} fail within a range of ± 8 , ± 20 ki/lm ² and ± 0.15 m, respectively.
design parameters of	To verify predictive capabilities of the models, a statistical comparison is made with the results of allower
loads, cohesive backfill soil, statistical indicators	research using a totally new dataset. Herein, the models showed the most successful performance for P_{ac} and α_{cr} . However, the predictions for z_{ac} are relatively weaker but still at an acceptable level. Furthermore, there is no significant effects in the performance between the data sampling techniques

^{*}Sorumlu Yazar/Yazarlar / Corresponding Author/Authors : *calik@ktu.edu.tr / Tel: +90 535 436 0627

1. Giriş (Introduction)

Geoteknik mühendisliğinde, çok sayıda girdi parametresinin etkisi altındaki problemlerin çözümünde kullanılan matematiksel/analitik denklemlerin oluşturulması ve her an değişebilen girdi değerleri için hesaplamaların tekrar gözden geçirilmesi ile dizayn parametrelerin yeniden belirlenecek olması büyük emek, para ve zaman kaybına neden olmaktadır. Bu yüzden son yıllarda inşaat mühendisliğinde, (laboratuvardaki ve/veya arazideki) deney sonuçlarından veya parametrik çalışma verilerinden, ilgilenilen problemin bağımsız ve bağımlı değişkenleri arasında doğrusal veya çoğu zaman karşılaşıldığı gibi doğrusal olmayan regresyon ilişkilerinin ortaya çıkarılması üzerinde çalışılmaktadır. Elde edilen kullanılabilir ve güvenilir regresyon modelleri, ortaya çıkacak yeni girdi değerinde, takibi zor, çözümü uzun süren ve hata yapma olasılığı yüksek işlem adımlarına gerek kalmadan, istenen çıktı değişkeninin tespit edilmesinde mühendisin işini oldukça kolaylaştırmaktadır. Literatüre bakıldığında uygun regresyon modellerinin inşa edilmesinde, lineer regresyon (LR) ve yapay sinir ağları (YSA) gibi geleneksel yöntemler çok sık kullanılmakla birlikte, son zamanlarda Rasgele Orman Regresyonu (ROR), Gauss Süreç Regresyonu (GSR) ve bu çalışmanın da kullandığı, Destek Vektör (Makine) Regresyonu (DVR) gibi güçlü makine öğrenme algoritmalarına sahip yöntemler bu alanda yerini almaktadırlar.

DVR yöntemi, çoklu değişkenler arasında yüksek komplekslik ve özellikle doğrusal olmayan ilişkilerin mevcut olduğu regresyon problemlerinin modellemesindeki başarısından dolayı tercih edilen ve Vapnik vd. [1]'in istatistiksel öğrenme teorisini esas alan yeni bir yaklaşımdır. Yapısal riskin minimizasyonu prensibi ile çalışan DVR, büyük hacimli veri kümelerinde bile, en uygun modele ulaşmada, muhtemel çözümler arasında hızlı seyreltmeye gitmesi ve optimizasyon işlerinde sık karşılaşılan yerel minimuma yakalanma probleminin üstesinden gelmesi en büyük avantajlarıdır [2].

Kolay uyum sağlayan matematiksel altyapısı nedeniyle DVR; değişik geoteknik problemlerin çözümünde şimdiden kullanılmaya başlanmıştır. Samui vd. [3]; CPT deney sonuçlarından toplam gerilmenin ve aşırı konsolidasyon oranının (AKO), Puri vd. [4]; SPT-N değerlerinden sıkışma indisi, likit limit, boşluk oranı, kohezyon, içsel sürtünme açısı gibi zemin parametrelerinin, Aboutaleb vd. [5]; zeminin yoğunluğu ve (Vp-Vs) sismik hızlardan oluşan 430 adet veriden serbest basınç dayanımının ve elastisite modülünün, Cruz vd. [6]; dilatometre deneyi parametreleri olan malzeme indisi, yatay gerilme indisi, dilatometre modülü değerlerinden maksimum kayma modülünün, Kurnaz ve Kaya [7]; doğal su içeriği, boşluk oranı, likit limit ve plastisite indisi değerlerinden oluşan 35 veri ile sıkışma indisinin, Samui ve Sitharam [8]; SPT kuyusundaki 2700 adet toplam gerilme, kuyu çapı, tij boyu, SPT kaşığı tipi gibi 4 parametreden SPT-N sayılarının, Günaydın vd. [9]; silt-kum-çakıl oranları, özgül ağırlık, likit limit ve plastik limit değerlerinden olusan 126 adet saha verisinden maksimum kuru birim hacim ağırlık ve optimum su içeriğinin tahmin edilmesindeki matematiksel regresyon modellerini DVR yöntemi ile oluşturmuşlardır.

Debnath ve Dey [10]; taş kolon çapı ve boyu, kolonlar arası mesafe ve dairesel temel sisteminin çapı gibi faktörlerden yumuşak killerde geogridle güçlendirilmiş taş kolon gruplarının taşıma gücünün, Das ve Dey [11]; drenajsız kohezyon, içsel sürtünme açısı, taş kolon çapı ve boyu, kolonlar arası mesafe değerlerinden taş kolonların taşıma gücünün, Pal ve Deswal [12]; kazık çapı ve boyu, yükleme eksantrisitesi, zeminin drenajsız kayma dayanımı değerlerinden ve Kardani vd. [13]; kazığın yan ve uç bölgelerindeki içsel sürtünme açısı, kazığın çapı ve boyu değerlerinden kohezyonsuz zeminlerde inşa edilen kazıkların taşıma gücünün, Moayedi ve Hayati [14]; 80 adet drenajsız kayma mukavemeti, efektif düşey gerilme, kazık çapı ve boyu değerlerinden killi zeminlerdeki kazıkların yanal sürtünme direncinin, Singh vd. [15]; kazıkların yükleme eğim açısı, kazık boyu, zeminin rölatif sıkılığı, kazık sayısı gibi parametrelerden oluşan 147 adet veriden eğik kazık gruplarının taşıma gücünün öngörüldüğü çalışmalarında DVR yöntemini kullanmışlardır.

Pal [16]; Goh ve Goh [17], Lee ve Chern [18], Xue ve Xiao [19]; SPT-N sayısı, eşlenik dinamik kayma gerilmesi, deprem büyüklüğü, toplam ve efektif gerilme, koni uç direnci, pik deprem ivmesi, ortalama dane boyutu gibi parametrelerinden oluşan veri kümelerinden sıvılaşma potansiyelini DVR yöntemi ile araştırmışlardır.

Samui [20]; temel boyutları, net temel taban basıncı ve ortalama SPT-N değerlerinden oluşan 272 adet veri ile kohezyonsuz zemindeki sığ temel oturmalarının, Ocak ve Seker [21]; metro tüneli inşaatı sırasında tünelin geometrik özellikleri, zemin özellikleri ve tünel açma metodu ile ilgili 18 farklı faktörden toplamda 230 saha verisini dikkate alarak zemin yüzeyindeki oturmaların, Oommen ve Baise [22]; Japonya'daki ve ABD'deki 8 depremdeki deprem büyüklüğü, deprem merkezine uzaklık, sıvılaşan tabakanın kalınlığı, ortalama dane boyutu, ince daneli zemin oranı gibi parametrelerden 484 adet veri ile yanal yer değiştirme miktarlarının hesaplanmasında DVR yöntemini tercih etmişlerdir.

Samui [23]; birim hacim ağırlık, kohezyon, içsel sürtünme açısı, boşluk suyu basıncı katsayısı, şev eğimi ve yüksekliği gibi parametrelerin bulunduğu 46 adet veriden şev güvenlik katsayısının belirlenmesini yine DVR yöntemi ile gerçekleştirmiştir.

İstinat duvarlarının tasarımında, arka zemin dolgusundaki kritik kayma yüzeyinin yatay düzlemle yaptığı açı (α_{cr}), aktif zemin itkisinin büyüklüğü (Pae) ve etkime mesafesi (Zae) bilinmesi gereken en önemli parametrelerdir. Calik [24], limit denge durumunda, belli bir mesafe uzaktaki yarı sonsuz statik sürşarj yükü ile sismik kuvvetlerin etkisi altındaki değişken eğimli c-\u00f6 (kohezyonlu ve içsel sürtünme açılı) duvar arka dolgu zeminini destekleyen istinat duvarındaki bu 3 tasarım parametresi için analitik çözüm denklemlerini çalışmasında sunmuştur. Hesaplamalarında duvar yüksekliği, statik sürşarj yükünün büyüklüğü ve istinat duvarına uzaklığı, arka dolgu zeminin birim hacim ağırlığı, kohezyonu ve içsel sürtünme açısı, arka dolgu yüzeyinin ve duvar arka yüzünün eğim açıları, duvar-dolgu ara kesitindeki sürtünme (adezyon) açısı, yatay ve düşey deprem ivme katsayıları ile arka dolgudaki çekme çatlağı bölgesi derinliği gibi zemin, yük ve geometri ile alakalı birden çok değişkeni girdi parametresi olarak kullanmıştır.

Yapılan literatür taramasında, DVR yönteminin aktif toprak itkisi problemlerinde kullanıldığı bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu yüzden α_{cr} , P_{ae} ve z_{ae} tasarım parametrelerinin, Calik [24]'ın analitik calısması yardımıyla 11 adet girdi değişkeninin farklı sayısal kombinasyonları ile oluşturulan büyük hacimli bir veri kümesi üzerinde doğrusal olmayan regresyon modellemesinin DVR ile gerçekleştirilmesi hedeflenmiştir. En iyi regresyon modelinin belirlenmesi, iki farklı örnekleme metodu ve altı değişik DVR kernel fonksiyonu ile Matlab programı yardımı ile gerçekleştirilmiştir. Ayrıca her bir çıktı değişkeni için ayrı ayrı elde edilen en yetenekli DVR modelin kullanılabilirliği, geçerliliği ve güvenirliliği; (DVR modellerin eğitim ve test aşamalarında kullanılmayan) yepyeni bir veri kümesinde, en iyi DVR regresyon modelinin öngörüsü ile Peng ve Zhu [25] tarafından hesaplanan sonuçların determinasyon (belirlilik) katsayısı, ayarlanmış determinasyon katsayısı, ortalama karesel hata, ortalama karesel hatanın karekökü, ortalama mutlak hata ve ortalama mutlak yüzde hata gibi akademik çalışmalarda sıklıkla kullanılan altı değişik

performans göstergesine göre istatistiksel olarak analiz edilmesi ile araştırılmıştır.

2. Metodoloji (Methodology)

2.1. Analitik Problem ve Denklemleri (The Analytical Problem and its Equations)

Bu çalışmada dikkate alınan problemin geometrisi, sisteme etkiyen statik ve sismik kuvvetler ile olası doğrusal kayma yüzeyi Şekil 1a'da görselleştirilmiştir. Söz konusu problemde, aktif toprak itkisi durumunun mevcut olduğu varsayıldığında, sistemdeki tüm kuvvetlerin oluşturacağı kuvvet poligonu Şekil 1b'deki gibi olacaktır. Şekil 1'de yer alan tüm semboller, Simgeler kısmında ayrıntıları ile listelenmiştir.

Şekil 1a'da görüldüğü üzere problemdeki arka dolgu şevi sonsuz uzunlukta olmayıp belli bir mesafede yatay hale gelmektedir. Ayrıca istinat duvarı ile arasında mesafe bulunan yarı sonsuz bir düzgün yayılı yük sisteme uygulanmaktadır. Deprem yüklerinin etkisini dikkate almamızı sağlayan ve büyüklükleri (W+Q)k_h ve (W±Q)k_v ile ifade edilen yatay ve düşey yönde iki sismik kuvvet vektörü de probleme etki etmektedir.

Kohezyonlu zeminlerde görülen çekme gerilmesi çatlaklarının etkisini dikkate almak için Nian ve Han [26] tarafından verilen Eş. 1 ve Eş. 2 kullanılmıştır. Bu iki eşitlik ile çekme çatlağı derinliği hesabında arka dolgu zemininin mühendislik özellikleri, şev eğimi ve deprem parametreleri göz önüne alınabilmektedir.

$$z_c = \frac{2\mathrm{H}\left(\frac{c}{\gamma H}\right)}{\left[(1+A)^2 + \frac{4tan^2\Psi}{cs^2\varphi}\right](1\mp k_v)cos\varphi} \left[sin\varphi(1+A) + \sqrt{(1+A)^2 + 4tan^2\Psi}\right]$$
(1)

$$A = \tan \psi \tan i \, \operatorname{ve} \psi = \tan^{-1} \left(\frac{k_h}{1 \pm k_\nu} \right) \tag{2}$$

Culmann (1866) ve Mononobe-Okabe metotlarını müşterek bir çerçevede düşündüğümüzde ve Şekil 1b'de görülen tüm kuvvetlerin yatay ve düşey yönde denge olduğu kabul edildiğinde; statik ve deprem yükleri altında, kırık şev yüzeyli kohezyonlu ve içsel sürtünme açılı bir zemini destekleyen arka yüzü eğimli istinat duvarında zemin-duvar ara yüzeyinin normali ile δ açısı yapan aktif toprak itkisi, Eş. 3 ve Eş. 4 ile hesaplanabilmektedir. Bu iki eşitliğin elde edildiği sürecin tüm adımları Calik [24]'de açıkça verildiğinden burada ayrıca ifade edilmeyecektir.

$$P_{ae} = \frac{(W+Q)(1\mp k_v + mk_h) + C_a(m\cos\beta - \sin\beta) - C(m\cos\alpha + \sin\alpha)}{m\cos(90 - \beta + \delta) + \sin(90 - \beta + \delta)}$$
(3)

$$m = \tan(90 + \phi - \alpha) \tag{4}$$

Eş. 3 ve Eş. 4'ün yardımıyla hesaplanan P_{ae} değerini maksimize eden α_{cr} açısı duvar arka dolgu içindeki olası kayma yüzeyinin yerini (yatay eksenle yaptığı (kritik) açıyı) vermektedir. Burada maksimum P_{ae} tespitinde birçok α açısının art arda denemesi gerektiğinden problemin çözümünde, Culmann ve Mononobe-Okabe metotlarına ek olarak deneme-yanılma yönteminin de işe katılması gerekmektedir. Bu yüzden Calik [24]'de bahsi geçen bu üç yöntemi de barındıran bir çözüm algoritması oluşturulmuştur.

Maksimum P_{ae} ve α_{cr} açısının belirlenmesinden sonra, istinat duvarlarının devrilme stabilitesinin irdelenmesi için kullanılan bir parametre olan, P_{ae} 'nin duvara etkidiği nokta z_{ae} 'nin yerinin tespit edilmesi gerekmektedir. Bu çalışmada, Seed ve Whitman [27]'ın metodu esas alınarak, hesaplanan her bir P_{ae} 'nin; sadece statik yükleme altındaki sistemde oluşan toprak itkisi P_a 'nin ve statik yüklemedeki sisteme ayrıca eklenen sismik (deprem) yüklerinden dolayı oluşan (ek) toprak itkisi ΔP_{ae} 'nin toplamından meydana geldiği kabul edilmiştir.

Statik yükleme koşullarında oluşan P_a'nın etki ettiği yer Terzaghi [28]'nin önerdiği işlem adımları takip edilerek yaklaşık olarak bulunabilmektedir. Şekil 1a'da verilen problem en kesitindeki P₁, P₂, P₃ ve P₄ Culmann yöntemiyle belirlenen kritik kayma kamasının köşe noktalarını göstermektedir. Ayrıca C_G noktası, kırıklı şev üzerinde statik sürşarj yükünün bulunduğu bu kayma kamasının ağırlık merkezini ifade etmektedir. C_G noktasında geçen ve kayma yüzeyine paralel olarak çizilen bir doğru, istinat duvarının tepesi ile topuğu birleştiren P₁P₂ düzlemine kadar uzatılırsa duvar-zemin ara kesitinde C'_G ile gösterilen bir noktadan geçer. İşte P_a ile gösterilen bileşke toprak itkisi istinat duvarının arka yüzündeki bu C'_G noktasından çizilen yüzey normali ile δ açısı yapacak şekilde etki edecektir.



Şekil 1. (a) Problemin enkesit görüntüsü (Sectional view of the problem) (b) Kuvvet poligonu (Force polygon)

Dinamik (sismik) yüklemenin yapıldığı durumda oluşan ΔP_{ae} , P_1P_2 düzlemi üzerindeki duvar tabanından 0.6H yukarısındaki bir noktadan çizilen yüzey normali ile δ açısı yaptığı kabul edilmektedir [29]. Bazı deneysel çalışmalarda ΔP_{ae} yerinin 0,45H-0,55H arasında alınması gerektiği söylense de burada güvenli tarafta kalınması sebebiyle 0,6H olarak hesaba katılmıştır [30].

Statik ve dinamik yüklemenin kayma kamasına eş zamanlı etkidiği düşünüldüğünde aktif toprak itkisi P_{ae} 'nin etki yeri, P_a ve ΔP_{ae} itkilerine bağlı olarak, Eş. 5'deki gibi hesaplanmaktadır. Ayrıca z_{ae} yerinin bulunması ile alakalı tüm işlem ve çizimler ayrıntılı bir şekilde Şekil 1a gösterilmiştir.

$$z_{ae} = \frac{P_{a} * z_{a} + \Delta P_{ae} * (0, 6H)}{P_{ae}}$$
(5)

Nihayetinde P_{ae} , duvar-zemin ara kesit düzlemi üzerinde duvar tabanında z_{ae} kadar bir mesafede çizilen yüzey normali ile δ açısı yapan bir bileşke kuvvet vektörü olmaktadır.

Böylece, problem en kesit geometrisinin, (statik ve sismik) yükleme durumlarının ve arka dolgu zemininin geoteknik özelliklerinin; kritik kayma yüzeyinin nerede oluşacağı, toplam aktif toprak itkisinin büyüklüğünün ne olacağı ve bu aktif itkinin nereye etkiyeceği gibi üç parametrenin bulunmasındaki etkilerinin hangi yöntemler ve analitik denklemler yardımıyla gerçekleştirileceği burada özetlenmiş oldu.

2.2. Veri Kümelerinin Üretimi (Generating datasets)

Zemin topoğrafyası, istinat duvarı enkesit geometrisi, arka dolgu zemininin mühendislik özellikleri ve sisteme etkiyen (statik ve sismik) yüklerle alakalı 11 adet girdi parametresi ile giriş veri kümesi; istinat duvarı dizaynında bilinmesi gerekli olan kritik kayma yüzeyinin yatayla yapmış olduğu açı, aktif toprak itkisinin büyüklüğü ve etkime yeri gibi 3 adet çıktı parametresi ile çıkış veri kümesi oluşturulmuştur. Buradaki toplam 14 parametrenin sembolleri, birimleri, giriş verilerinin aldığı değerler ve çıkış verilerinin istatistiksel karakteristiğini ortaya koyan en büyük, en küçük, ortalama ve standart sapma değerleri Tablo 1'de özetlenmektedir.

Tablo 1'de görüleceği üzere, problemin iki giriş parametresi $k_v ve \delta$ giriş parametreleri bağımsız bir değişken olarak dikkate alınmamıştır. Geoteknik mühendisliğinde yanal toprak basıncı problemlerin çözümünde çok sıklıkla tercih edilen, sırasıyla kh ve ϕ giriş parametreleri değerlerinin 1/2'si ve 2/3'ü oranları kullanılarak hesaplamalara katılmıştır. Bir önceki bölümde bahsedilen geoteknik yöntemler, denklemler ve çözüm adımları ile 11 girdi parametresinin birbirinden farklı sayısal kombinasyonları ile hesaplamalar gerçekleştirilerek üç çıktı parametresi için her birinde 119393 adet veri barındıran çıkış veri kümeleri oluşturulmuştur. Tablo 1'de verilen giriş parametre değerleri ile veri kümelerinin 236196 adet veriye sahip olması gerekirken, bu çalışmanın bir parçası olan ve veri oluşturmada kullanılan Culmann yönteminin ϕ -i- $\psi \leq 0$ için çözüm vermemesi sebebiyle 116803 veri elenmek zorunda kalınmıştır.

Bu çalışmada, çok fazla sayıda veri barındıran (büyük data içeren) üç veri kümesinden faydalanılarak bağımsız girdi parametreleri ile her bir bağımlı çıktı (hedef) parametresi arasındaki doğrusal ve doğrusal olmayan regresyon ilişkilerini ortaya koyacak istatistiksel bir modelin oluşturulması amaçlanmıştır. Buradaki büyük verinin analizinde, son yıllarda popülerleşen, istatistiksel öğrenme teorisine dayalı bir makine öğrenme algoritması olan Destek Vektör (Makine) Regresyonu (DVR) tercih edilmiştir.

2.3. Destek Vektör Makineleri (DVM) ve Destek Vektör Regresyonu (DVR)

(Support Vector Machines (SVM) and Support Vector Regression (SVR))

Destek vektör makineleri, Vapnik [31] tarafından geliştirilen kernel fonksiyon tabanlı makine öğrenim algoritmasıdır. Bu yöntemin ilk kullanımı data sınıflandırma problemlerinde olmasına rağmen, son yıllarda regresyon temelli veri analizi çalışmalarında da yer verilmektedir. Ancak burada DVM'ler ile regresyon analizi yapılırken temel bazı kavramlarında değişiklik yapıldığından bu yaklaşım destek vektör regresyonu (DVR) veya destek vektör makine regresyonu (DVM-R) olarak ifade edilmektedir [32].

Veri odaklı istatistiksel öğrenmeye dayanan DVR, Şekil 2'de sağ tarafta gösterilen (doğrusal veya doğrusal olmayan) hiper düzlem, karar sınırları (marjinler, ε) ve gevşek (aylak) değişkenler (ζ) gibi DVM kavramları barındırmaktadır [33].

DVR'nin öğreniminde N adet $\{(x_1,y_1), (x_2,y_2), ...(x_i,y_i)\}$ veri çiftlerinden oluşan girdi kümesi kullanılarak, alttan ve üstten, ε ile sınırlandırılmış tolerans bandının merkezinden geçen bir regresyon fonksiyonu olan f(x) belirlenmeye çalışılmaktadır. Bu f(x) fonksiyonunu şöyle ifade edebiliriz:

$$f(x) = \langle w.x \rangle + b \tag{6}$$

Parametre ve Birimi	Kategori	Değerler				
H (m)	Girdi	6, 8 ve 10				
$L_1(m)$	Girdi	0, 2, 4 10				
β (°)	Girdi	70, 80 ve 90				
i (°)	Girdi	0, 10 ve 20				
$q (kN/m^2)$	Girdi	15, 30 ve 45				
$c (kN/m^2)$	Girdi	0, 10 ve 20				
φ (°)	Girdi	25, 30 ve 35				
γ (kN/m ³)	Girdi	16, 18 ve 20				
kh	Girdi	0, 0,1 ve 0,2				
kv	Girdi	$\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3} k_{h}$				
δ (°)	Girdi	$\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ ϕ	Min.	Maks.	Ortalama	St. Sapma
$P_{ae}(kN/m)$	Çıktı	- 0	26,978	1218,665	301,274	181,402
$z_{ae}(m)$	Çıktı	-	1,759	6,058	3,299	0,854
$\alpha_{\rm cr}(^{\circ})$	Çıktı	-	26,326	67,837	51,691	6,771



Şekil 2. Hiperdüzlem, marjinler, gevşek değişkenler ve ɛ-tüpü (Hyperplane, margins, slack variables and ɛ-tube)

Eş. 6'da x giriş vektörünü, w hiper düzlemin ağırlık vektörünü, b ise DVR ağının bias terimini göstermektedir [34]. Eş. 6'daki regresyon fonksiyonundan, Eş. 7'de gösterilen ε -duyarsız kayıp fonksiyonu $L_{\varepsilon}(y)$ ile elde edilmektedir.

$$L_{\varepsilon}(\mathbf{y}) = |\mathbf{y} - f(\mathbf{x})|_{\varepsilon} = \begin{cases} 0, & |\mathbf{y} - f(\mathbf{x})| \le \epsilon \\ |\mathbf{y} - f(\mathbf{x})| - \varepsilon, & |\mathbf{y} - f(\mathbf{x})| > \epsilon \end{cases}$$
(7)

DVR'de regresyon fonksiyonunu belirlenmesi ε -duyarsız kayıp fonksiyonu etrafında, sınırları marjinlerle belirlenmiş, Şekil 2'de görülen bir ε -tüpü inşa ederek sağlanmaktadır. Regresyon fonksiyonu ile belirlenen değerin, gerçek değere göre sapması (rezidüel) ε 'den küçük ise (hata ε -tüpün içinde kalıyorsa) bu fonksiyon kabul edilebilir iken; iki değer arasındaki fark ε 'den büyük ise (hata ε -tüpün dışına çıkıyorsa) bu fonksiyon tercih edilmez ve cezalandırılır. O zaman buradaki tüm çaba, gerçek değerden sapmayı ε değerinin altında tutmak olduğundan, regresyon fonksiyonun elde edilmesi Eş. 9'da ifade edilen kısıtlar altında Eş. 8'deki eşitliği minimize etmekten geçmektedir.

Minimize
$$\frac{1}{2} ||w||^2 + C \sum_{1}^{N} (\zeta_i + \zeta_i^*)$$
 (8)

Kısıtlar : $y - f(x) < \varepsilon + \zeta_i \text{ ve } f(x) - y < \varepsilon + \zeta_i^*$, $\zeta_i \text{ ve } \zeta_i^* \ge 0, C > 0$ (9)

Burada $||w||^2$ ağırlık vektörünün Öklit normunu, C tolerans bandının dışına çıkan noktaların sayısını azaltmakta kullanılan ceza terimini göstermektedir [35]. Gevşek değişkenler ζ_i ve ζ_i^* ise verilerin oluşturulan ɛ-tüpünün içine düşüp düşmediğini gösteren değişkenlerdir. Eş. 9, Lagrange formunda yazıldığında Eş. 10'daki biçime dönüşmektedir.

$$L(\alpha) = -\varepsilon \sum_{i=1}^{N} (\alpha_i + \alpha_i^*) + \sum_{i=1}^{N} y_i (\alpha_i - \alpha_i^*) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_i^*) (\alpha_j - \alpha_j^*) \langle x_i, x_j \rangle$$

$$(10)$$

$$\sum_{i=1}^{N} (\alpha_i - \alpha_i^*) = 0 ; \ 0 \le \alpha_i^* \le C \ ve \ 0 \le \alpha_i \le C$$
(11)

 $L(\alpha)$ fonksiyonundaki α_i ve α_i^* terimleri Lagrange çarpanlarıdır. DVR'nin eğitimi sırasında Eş. 11 koşulu göz önüne alınarak Eş. 10 maksimize edildiğinde bu eşitlikteki bazı Lagrange çarpanlarının sıfır değerini almadığı görülecektir. Bu çarpanların sıfır olmadığı eğitim dataları destek vektörler olarak adlandırılmakta ve regresyon eşitliğinin bulunmasında kullanılmaktadır. Bir başka deyişle marjinlerle inşa edilen ϵ -tüpünün içine düşen girdi noktalarının Lagrange çarpanları sıfır olduğundan regresyon eşitliğine katkısı olmayacaktır.

Nihayetinde yeni çıktı datalarının tahmininde kullanılacak olan regresyon fonksiyonu, doğrusal (lineer) olarak ayrılabilen eğitim kümeleri için Eş. 12, doğrusal olarak ayrılamayan (lineer olmayan) eğitim kümeleri için Eş. 13'deki gibi gösterilmiştir.

$$f(x) = \sum_{\substack{\text{Dest.}\\ \text{vekt.}}} (\alpha_i - \alpha_i^*) \langle x_{i,r} x \rangle - \frac{1}{2} w[x_r + x_s]$$
(12)

$$f(x) = \sum_{\substack{\text{Dest.}\\ \text{vekt.}}} (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x_{i,r} x) - \frac{1}{2} w[x_r + x_s]$$
(13)

Burada x_r ve x_s destek vektörlerini, K(xi, x) kernel fonksiyonunu ifade etmektedir. Kernel fonksiyonu eğitim datalarının doğrusal olarak sınıflandırılamadığında; çekirdek hilesi (kernel trick) kullanarak orijinal girdi uzayını, özellik uzayı adı verilen daha yüksek boyutlu bir uzayla ile eşleştirerek hesaplama hatalarını en aza indirmeye yardımcı olan bir fonksiyondur. Literatürde çok sık kullanılan kernel fonksiyonlar polinom ve radyal tabanlı gauss kernelleridir [36]. Sonuç olarak destek vektör makine regresyonundaki temel amaç; eğitim verilerinin ε ile sınırlandırılmış tolerans bandı içinde kalması ve mümkün olduğunca düz bir regresyon hiper düzleminin belirlenmesidir.

DVR tekniğinin en önemli avantajı Eş. 8'deki yapısal riski minimize ettiğinden, her zaman global ve tekil bir çözüme yakınsamaktadır. Yapay sinir ağları gibi yerel çözümlere götürme riski taşıyan yöntemlere göre üstünlüğü buradan gelmektedir. Ayrıca kompleks sistemlere adaptasyonda ve eğitim kümesinde eksik verilerin bulunduğu problemlerde de çözüme ulaşabilen etkili bir yöntem olarak karşımıza çıkmaktadır [37].

2.4. DVR Modellerinin Oluşturulması (Developing SVR models)

Veri kümelerinin her birindeki girdi ve çıktı parametreleri arasındaki regresyon ilişkisini ortaya koyacak DVR modellenmesi, Matlab programının Regression Learner modülü ile gerçekleştirilmiştir. DVR modellemenin eğitim safhasında polinom tabanlı *lineer (DVR-LP), kuadratik (DVR-QP) ve kübik (DVR-CP) kerneller* ve radyal tabanlı *fine (DVR-FG), medium (DVR-MG) ve coarse (DVR-CG) (gauss) kerneller* olmak üzere 6 farklı çekirdek (kernel) fonksiyon kullanılmıştır [38].

Modellemeye geçmeden önce, en iyi regresyon modelinin inşa edilmesini oldukça etkileyen, modellemenin eğitim ve test aşamaları için gereken verilerin ilgili kümelerden rasgele seçilmesi gerekmektedir. Bunun için, tüm veri setini yüzdesel olarak eğitim ve test için ayıran örnekleme yöntemi ile veri kümesini K sayıda alt kümeye ayıran ((K-1) adet alt kümeyi eğitim, 1 adet alt kümeyi test için kullanan) örnekleme yöntemi olmak üzere iki farklı örnekleme yöntemi kullanılmıştır. İlk örnekleme yönteminde veri kümesindeki verilerin %70'i DVR modelin eğitiminde, geri kalan %30'u eğitilen modelin doğrulamasında (test edilmesinde) kullanılmak üzere ayrılmıştır. İkinci örneklemede veri kümesi rasgele 5 alt kümeye bölünmüş olup 4 tanesi modelin oluşturulmasında, geri kalan 1 tanesi doğrulamada kullanılmıştır. Bu örnekleme yöntemi böylece bitmemekte, her bir alt küme doğrulama kümesi olacak bir döngü içinde tek tek eğitim ve test prosedürüne tabi tutulmak suretiyle devam etmektedir. Bu çalışmanın araştırmacılar için bir diğer faydası DVR ile veri modelleme metodunda, büyük veri kümelerinde en iyi örnekleme yönteminin hangisi olacağının ortaya çıkarılmasını sağlamasıdır.

Her bir modelin inşasında kullanılan örnekleme yöntemi ve çekirdek fonksiyonunun istatistiksel performanslarının araştırılmasında, determinasyon (belirlilik) katsayısı (\mathbb{R}^2), ayarlanmış determinasyon katsayısı (\mathbb{R}^2_{adj}), ortalama karesel hata (MSE), ortalama karesel hatanın karekökü (RMSE), ortalama mutlak hata (MAE) ve ortalama mutlak yüzde hata (MAPE) gibi 6 değişik göstergesi kullanılmıştır. Bu istatistiksel göstergelere ait bağıntılar sırasıyla Eş. 14-Eş. 19'da verilmistir.

$$R^{2} = 1 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_{i} - p_{i})^{2}}{\sum_{i=1}^{n} (a_{i} - \bar{p}_{i})^{2}}\right)$$
(14)

$$R^{2}_{adj} = 1 - \left[\frac{(1-R^{2})(n-1)}{(n-k-1)}\right]$$
(15)

$$MSE = \frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - p_i)^2}{n}$$
(16)

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (a_i - p_i)^2}{n}}$$
(17)

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |(a_{i-}p_{i})|$$
(18)

MAPE =
$$\frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{(a_i - p_i)}{a_i} \right| \right] * 100$$
 (19)

Bu eşitliklerdeki a, verinin (gerçek) girdi değeri, p_i modelin (tahmini) çıktı değeri, $\overline{p_i}$ modelin çıktı değerlerinin ortalaması; n eğitim kümesindeki veri sayısı, k modeldeki bağımsız değişken sayısını ifade etmektedir.

Bu çalışmada seçilen 6 gösterge, her bir DVR modelin, inşa edilmesinde kullanılan, eğitim ve test kümelerindeki verileri tahmin ederken ki başarı durumunun ortaya çıkarılmasında kapsamlı ipuçları vermektedir. Örneğin R² ve R²_{adj} değerleri bire ne kadar yakın

oluyorsa, o kadar uygun bir DVR model elde ediliyor demektir. Ayrıca MSE, RMSE, MAE ve MAPE değerlerinin sıfıra yakınlaşması, elde edilen DVR modelin tahmin kabiliyetinin iyi yönde geliştiğine işaret etmektedir. Bu bilgiler ışığında en iyi DVR modelin seçiminde; MSE, RMSE, MAE ve MAPE göstergelerini minimize eden, 1'e en yakın R² ve R²_{adj} değerlerini veren çekirdek fonksiyonu ve örnekleme yöntemi başarılı kabul edilecektir.

3. Sonuçlar ve Tartışmalar (Results and Discussions)

Bu çalışmadaki aktif yatay toprak itkisi problemine ait 11 adet girdi parametresi ve 3 adet çıktı parametresinin DVR ile modellemesinde 6 farklı çekirdek fonksiyonu ve 2 ayrı örnekleme yöntemine göre bulunan R², R²_{adj}, MSE, RMSE, MAE değerleri ve modellemede geçen süre Tablo 2- Tablo 7'de verilmektedir. Ayrıca bu tablolardaki en başarılı DVR modeli veren fonksiyonun bulunduğu satır italik biçimde yazılarak gösterilmiştir.

Tablo 2 ve Tablo 3'deki istatistiksel gösterge değerlerine göre, P_{ae} çıktı parametresini, iki örnekleme yönteminde de en iyi ve en hızlı tahmin eden çekirdek fonksiyonunun DVR-CP olduğu ortaya çıkmıştır. Bununla birlikte, DVR-CP, ilk örnekleme metodu olan giriş veri kümesini yüzdesel olarak ayırma yönteminde, ikinci örnekleme metodu olan giriş veri kümesini 5-katlamalı çapraz doğrulamalı ayırma yöntemine göre, yaklaşık iki kat hızlı modelleme yapmıştır. Şunu da söylemek gerekir ki; örnekleme yönteminin P_{ae} için oluşturulan DVR modellerin istatiksel performansı üzerinde etkisi çok az olmakla birlikte, yine de ilk örnekleme metodu daha başarılı olmuştur.

Tablo 4 ve Tablo 5'deki değerlere bakıldığında, α_{cr} çıktı parametresini en iyi ancak diğer çekirdek fonksiyonlara göre en yavaş modelleyen DVR-MG olmuştur. Bununla birlikte ilk veri örnekleme yönteminin tercih edilmesi, DVR'nin yaklaşık üç kat daha hızlı regresyon modellemesi yapmasını sağlamıştır. Ancak ikinci örnekleme metodundaki öngörme başarısı çok az da olsa daha iyi neticelenmiştir.

Tablo 6 ve Tablo 7'de görüldüğü üzere, z_{ae} çıktı parametresini istatistiksel olarak en iyi modelleyen çekirdek fonksiyon yine DVR-MG olmuştur. Bununla birlikte regresyon modelinin inşa edilme hızı diğer çekirdek fonksiyonları içinde en hızlı ikinci fonksiyon olarak kendini göstermiştir. Yine bu çıktı parametresi için de örnekleme yöntemlerine göre bir kıyaslama yapılmak istenirse, ilk örnekleme yönteminde yaklaşık iki buçuk kat daha hızlı sonuçlara ulaşılmıştır.

Tablo 2. Verileri yüzdesel ayırma yöntemi ile P_{ae} için istatistiksel gösterge değerleri(The values of statistical indicators for P_{ae} with the data partitioning method)

		R ₂	R^2_{adj}	MSE	RMSE	MAE	Süre (sn.)	
=	DVR-LP	0,89	0,79	3572,0	59,766	42,71	2216,0	
dek Z	DVR-QP	0,99	0,98	272,4	16,505	11,998	2443,6	
Si Ci	DVR-CP	1,00	1,00	61,960	7,872	6,458	1441,9	
Çe Çe	DVR-FG	0,92	0,85	2667,8	51,651	34,652	3644,7	
μ	DVR-MG	1,00	1,00	72,075	8,490	6,957	1705,1	
	DVR-CG	0,99	0,98	176,45	13,283	9,934	2409,7	

 Tablo 3. 5-katlamalı çapraz doğrulamalı yöntem ile Pae için istatistiksel gösterge değerleri (The values of statistical indicators for Pae with the 5-fold cross-validation method)

		R2	R2adj	MSE	RMSE	MAE	Süre (sn.)
2	DVR-LP	0,89	0,79	3611,8	60,099	42,926	5453,9
/or	DVR-QP	0,99	0,98	272,17	16,497	11,972	6624,3
kire (Sij	DVR-CP	1,00	1,00	62,434	7,902	6,502	3193,9
on Cel	DVR-FG	0,93	0,86	2260,8	47,547	32,003	9947,3
Ц	DVR-MG	1,00	1,00	72,371	8,507	6,997	3888,8
	DVR-CG	0,99	0,98	170,41	13,054	9,812	4934,7

Çalık / Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 39:3 (2024) 1759-1770

		R2	R^2_{adj}	MSE	RMSE	MAE	Süre (sn.)	
JE	DVR-LP	0,82	0,67	8,339	2,888	1,984	1979,7	
dek	DVR-QP	0,91	0,83	3,916	1,979	1,352	3371,7	
siy	DVR-CP	0,94	0,88	2,722	1,650	1,014	3949,3	
Ce]	DVR-FG	0,91	0,83	4,003	2,001	1,388	4440,3	
Γ.	DVR-MG	0,96	0,92	1,807	1,344	0,864	4527,6	
	DVR-CG	0,92	0,85	3,629	1,905	1,272	4353,3	

Tablo 4. Verileri yüzdesel ayırma yöntemi ile α_{cr} için istatistiksel gösterge değerleri (The values of statistical indicators for α_{cr} with the data partitioning method)

Tablo 5. 5-katlamalı çapraz doğrulamalı yöntem ile α_{cr} için istatistiksel gösterge değerleri(The values of statistical indicators for α_{cr} with the 5-fold cross-validation method)

		R ₂	R^2_{adj}	MSE	RMSE	MAE	Süre (sn.)
2	DVR-LP	0,82	0,67	8,270	2,876	1,978	5121,0
Jek /or	DVR-QP	0,92	0,85	3,870	1,967	1,341	9104,6
sir	DVR-CP	0,94	0,88	2,713	1,647	1,012	11285,0
Çel ont	DVR-FG	0,93	0,86	3,308	1,819	1,270	12566,0
Ē	DVR-MG	0,96	0,92	1,766	1,329	0,855	12821,0
	DVR-CG	0,92	0,85	3,543	1,882	1,252	12320,0

 Tablo 6. Verileri yüzdesel ayırma yöntemi ile zac için istatistiksel gösterge değerleri

 (The values of statistical indicators for zac with the data partitioning method)

		R ₂	R ² adj	MSE	RMSE	MAE	Süre (sn.)
., 2	DVR-LP	0,95	0,90	0,036	0,191	0,147	2341,8
/or	DVR-QP	0,99	0,98	0,009	0,095	0,073	3854,5
kire	DVR-CP	1,00	1,00	0,003	0,058	0,048	4352,2
<u>Cel</u>	DVR-FG	0,93	0,86	0,052	0,228	0,169	4845,8
щ	DVR-MG	1,00	1,00	0,002	0,050	0,042	3579,0
	DVR-CG	0,99	0,98	0,007	0,082	0,064	4025,1

 Tablo 7. 5-katlamalı çapraz doğrulamalı yöntem ile zae için istatistiksel gösterge değerleri (The values of statistical indicators for zae with the 5-fold cross-validation method)

		R2	R^2_{adj}	MSE	RMSE	MAE	Süre (sn.)	
Þ	= DVR-LP	0,95	0,90	0,037	0,191	0,147	6459,8	
lek	친 DVR-QP	0,99	0,98	0,009	0,094	0,073	10038,0	
siy	g DVR-CP	1,00	1,00	0,003	0,058	0,048	11808,0	
Cel	ð DVR-FG	0,94	0,88	0,042	0,206	0,155	13375,0	
-	DVR-MG	1,00	1,00	0,002	0,049	0,041	9574,3	
	DVR-CG	0,99	0,98	0,006	0,081	0,062	10966,0	

Ancak bir kez daha örnekleme yönteminin değiştirilmesinin DVR-MG modellerin istatistiksel performansı üzerindeki etkisinin hemen hemen hiç olmadığı tespit edilmiştir.

Şekil 3, Şekil 4 ve Şekil 5'ün sol tarafında Pae, acr ve zae için inşa edilen en iyi DVR modellerine ait gerçek değerler-tahmini değerler grafikleri ve bu grafikler üzerinde de 45 derece hattı verilmiştir. Buradaki 45 derece hattı üzerine ve yakın çevresine düşen veri noktaların çokluğu modellerin tahmin kabiliyetinin yüksek olduğuna bir işaretidir. Bir başka deyişle her bir veri noktasının bu hatta uzaklığının artması model tahminlerindeki hata miktarının artması demektir. Bu çalışmada elde edilen DVR modellerin, R² ile R²_{adi} değerlerinin nerdeyse bire eşit olması ve gerçek değer ile tahmini değer arasındaki hatayı esas alan MSE, RMSE ve MAE istatistiksel göstergelerin çıktı parametrelerinin Tablo 1'de verilen karakteristik değerleri ile kıyaslandığında makul seviyelerde olması bu diyagonal hat çevresinde verilerin kümelenmesini sağlamıştır. Bu eğilim aktif toprak itkisi probleminin 3 çıktı parametresinin DVR yöntemi ile 11 girdi parametreli büyük hacimli veri kümesinden oldukça başarılı bir şekilde tahmin edilebileceğini göstermiştir. Ancak bu üç şekil üzerindeki 45 derece hatları dikkate alındığında gerçek değerlerden en fazla sapmanın da α_{cr}için kullanılan DVR-MG modelinde olduğu not edilmelidir.

Şekil 3, Şekil 4 ve Şekil 5'in sağ tarafındaki gerçek değerler-sapma miktarları grafiklerinde; gerçek girdi verisi değerleri ile belirlenen en iyi DVR modelin tahminleri arasındaki sapma miktarlarının (rezidüeller) yaklaşık olarak P_{ae} için ±20 kN/m², α_{cr} için ±8° ve z_{ae} için ±0,15 m alt ve üst sınırları içinde seyreden bir değişim bandında yer alındığı görülmektedir. Burada verilen maksimum sapma değerleri Tablo 1'de verilen çıktı parametrelerinin karakteristik değerlerden küçük çıkması DVR modellerin istatistiksel olarak tahmin başarısını tekrar ortaya koymaktadır.

4. Dvr Modellerin Doğrulanması (Validation of the Svr Models)

Bu çalışmada P_{ae} , α_{cr} ve z_{ae} çıktı parametrelerinin öngörülmesinde ortaya konan en iyi DVR modellerin istatistiksel olarak doğrulanması ve kullanılabilirliği Tablo 8'de ayrıntıları verilen farklı ve yeni bir giriş veri kümesi ile Peng ve Zhu [25] ait makale kullanılarak gerçekleştirilmiştir. Her bir çıktı parametresi için doğrulama kümeleri 4374 adet veri noktası içerecek şekilde oluşturulmuştur. Doğrulama prosedürünün ilk adımında, 11 girdi parametresi ile P_{ae} , α_{cr} ve z_{ae} değerleri Peng ve Zhu [25]'nun ortaya koyduğu analitik denklemler ve bu çalışmada elde edilen en başarılı DVR modeller kullanılarak ayrı ayrı hesaplanmıştır. İkinci adımda, her bir çıktı parametresi itki probleminin 4374 farklı durumu için referans alınan makalenin sonuçları ile DVR modelin ön gördüğü değerlerin R², R²_{adi} MSE,

Çalık / Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 39:3 (2024) 1759-1770



Şekil 3. P_{ae} için en iyi DVR-CP modelin tahmini değer ve rezidüel dağılım grafikleri (The plots of the predicted response and residuals of the best SVR model with CP function for P_{ae})



Şekil 4. α_{cr} için en iyi DVR-MG modelin tahmini değer ve rezidüel dağılım grafikleri (The plots of the predicted response and residuals of the best SVR model with MG function for α_{cr})



Şekil 5. z_{ae} için en iyi DVR-MG modelin tahmini değer ve rezidüel dağılım grafikleri (The plots of the predicted response and residuals of the best SVR model with MG function for z_{ae})

RMSE, MAE ve MAPE gibi altı istatistiksel göstergeyle DVR modellemelerinin doğruluğu ve yeterliliği sorgulanmıştır. Dikkate

alınan altı istatistiksel göstergeye ait değerler her bir çıktı parametresi için Tablo 9'da özetlenmiştir.

Tablo 8. Doğrulama veri kümesinin detayları (Details of the validation dataset)

Parametre ve Birimi	Kategori	Değerler
H (m)	Girdi	7, 9 ve 12
$L_1(m)$	Girdi	0
β (°)	Girdi	65, 75 ve 85
i (°)	Girdi	0
$q (kN/m^2)$	Girdi	20, 40 ve 60
c (kN/m ²)	Girdi	0, 10 ve 20
φ (°)	Girdi	27, 33 ve 38
$\gamma (kN/m^3)$	Girdi	17, 19 ve 21
kh	Girdi	0, 0,1 ve 0,2
kv	Girdi	$\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3}$ k _h
δ (°)	Girdi	$\frac{1}{2}$ ve $\frac{2}{3} \phi$

 Tablo 9. Doğrulama aşamasındaki istatistiksel gösterge değerleri

 (The values of statistical indicators at the validation stage)

	Pae	α_{cr}	Zae
R ₂	0,990	0,911	0,876
R _{2adj}	0,980	0,829	0,758
MSE	98,001	3,244	0,047
RMSE	31,305	1,801	0,216
MAE	24,379	1,301	0,185
MAPE, %	7,173	2,156	5,310

Tablo 9'daki istatistiksel göstergeler incelendiğinde, DVR'nin makine öğrenme algoritması ve regresyon modellemesinin, eğitim ve test edilme aşamalarında kullanılmayan (gizli tutulmuş) tamamen yabancı yeni bir veri kümesindeki P_{ae} çıktı parametresinin tahmininde en başarılı sonuçları vermekle birlikte, α_{cr} değerlerini öngörmede de oldukça etkin olduğu ortaya koyulmuştur. Bununla birlikte, DVR modellerin Peng ve Zhu [25]'nun tarafından hesaplanan z_{ae} değerlerini ön kestiriminde göreceli olarak bir parça zayıf kaldığı not edilmelidir. Yine de mühendislik problemlerindeki veri analizi çalışmalarında Hair vd, [39] tarafından ifade edilen düşük RMSE değeri ile R² ve R²_{adj} göstergelerinin 0,75'in üzerinde olması koşulunca, DVR algoritması ile yapılacak regresyon modellemelerinin, P_{ae}, α_{cr} ve z_{ae} parametreleri için yeterli güvenilirlik ve doğruluk seviyesinde kabiliyetli olduğu ortaya çıkmaktadır.

5. Simgeler (Symbols)

ai	: Verinin gerçek değeri
А	: Eş. 2'de verilen birimsiz değişken
b	: DVR ağının bias terimi
с	: Arka dolgu zemininin (birim) kohezyonu
ca	: İstinat duvarı ile arka dolgu arasındaki (birim)
	adezyon
С	: Olası kayma yüzeyindeki toplam kohezyon;
	DVR'deki ceza terimi
Ca	: İstinat duvarı ile arka dolgu arasındaki toplam
	adezyon
CG	: Kayma kamasının ağırlık merkezi
C' _G	: C _G 'den kayma düzlemine paralel çizilen doğrunun
	istinat duvarı arka yüzeyini kestiği nokta
DVM	: Destek vektör makineler
DVR	: Destek vektör (makine) regresyonu
DVR-LP	: Destek vektör regresyonu lineer kernel
DVR-QP	: Destek vektör regresyonu kuadratik kernel
DVR-CP	: Destek vektör regresyonu kübik kernel
DVR-FG	: Destek vektör regresyonu fine gauss kernel
DVR-MG	: Destek vektör regresyonu medium gauss kernel
DVR-CG	: Destek vektör regresyonu coarse gauss kernel

f(x)	: Regresyon fonksiyonu
GSR	: Gauss sürec regresvonu
н	· İstinat duvarının yüksekliği
:	· A also doloumum o čim o osos
1	Arka dolgunun egim açısı
k	: Regresyon modelının bağımsız değişken sayısı
kh	: Yatay sismik ivme katsayısı
k _v	: Düsev sismik ivme katsavısı
$\mathbf{K}(\mathbf{x}; \mathbf{x})$	· Kernel fonksiyonu
I(<i>A</i>], <i>A</i>)	. Es 4'de venilen hinimaiz de čielven
	. Eş. 4 de vemen birmisiz degişken
MAE	: Ortalama mutlak hata
MAPE	: Ortalama mutlak yüzde hata
MSE	: Ortalama karesel hata
Nn	· Veri kümesindeki veri savısı
I, II	: c duvarsuz kavin fonksivanu
Le	
L_1	: Surşarj yukunun istinat duvarına olan yatay uzaklığı
L_2	: Kayma kaması üzerindeki sürşarj yükünün yatay
	genişliği
n;	· Regresvon modelinin tahmini cıktı değeri
$\frac{P^1}{\overline{D}}$: Regression modelinin tahmini çıktı değerlerinin
p_1	. Regresyon modernini tanının çıkti degenerinin
	ortalamasi
P_1, P_2, P_3, P_4	: Kayma kamasının köşe noktaları
Pa	: Statik durumda aktif toprak basıncı itkisi
Paa	· Sismik durumda aktif toprak basıncı itkişi
r ac	· Sisink dulundu ukti topluk busitet tatisi
q	
Q	: Kayma kaması üzerindeki toplam surşarj yukunun
	değeri
R	: Kayma kamasına etkiyen bileşke kuvvet
RMSE	: Ortalama karesel hatanın karekökü
ROR	· Rasgele orman regressioni
NOK D ²	
K ²	: Determinasyon (belirilik) katsayisi
R^{2}_{adj}	: Ayarlanmış determinasyon katsayısı
sn	: Saniye
SPT	: Standart Penetrasyon denevi
SPT_N	· SPT cavici
51 1-19	. Si i sayisi
Xi	: Giriş vektoru degişkeni
x _r ve x _s	: Destek vektörleri
W	: Hiper düzlemin ağırlık vektörü
W	: Kayma kamasındaki zeminin toplam ağırlığı
V:	· Cıkıs vektörü değişkeni
VSA	Vonov cinin očlom
ISA	a rapay sinir agiari
Zc	: Çekme çatlağı bölgesi derinliği
Za	: Statik durumda aktif toprak basıncı itkisinin duvara
	etkime noktası
7	· Sismik durumda aktif toprak başıncı itkişinin duyara
Lac	etkime noktosi
0	
р	: Duvar arka yuzeyinin yatay eksenle yaptığı açı
θ	: Duvar arka yüzeyi ile kayma yüzeyi arasındaki açı
ΔP_{ae}	: Sadece deprem yüklerinden dolayı oluşan aktif
	toprak itkisi
a	: Olası göçme vüzevlerinin vatav eksenle vanmış
u	alduğu azı
α_{cr}	: Göçme yüzeyinin yatay eksenle yapmış olduğu kritik
	açı
α_i ve α_i^*	: Lagrange çarpanları
δ	: İstinat duyarı ile arka dolgu arasındaki sürtünme açış
-	· Karar sınırları (mariinler)
с 	. Ixarar Similari (maljimer)
γ	: Arka doigu zemininin birim nacim agiriigi
φ	: Arka dolgu zemınının ıçsel sürtünme açısı
ψ	: Sismik eylemsizlik açısı
ζ	: Gevsek (aylak) değişkenler
$\ \mathbf{w}\ ^2$: Ağırlık vektörünün Öklit normu

6. Sonuçlar (Conclusions)

Bu çalışmada; istinat duvarının yüksekliği, sürşarj yükünün büyüklüğü ve istinat duvarına uzaklığı, arka dolgu zeminin birim hacim ağırlığı, kohezyonu ve içsel sürtünme açısı, arka dolgu yüzeyinin ve duvar arka yüzünün eğim açıları, duvar-dolgu ara kesitindeki sürtünme (adezyon) açısı, yatay ve düşey deprem ivme katsayıları ile arka dolguda çekme çatlağı bölgesinin varlığı gibi bir çok parametrenin dikkate alındığı aktif toprak itkisi probleminin üç önemli çıktısı bileşke toprak itkisinin büyüklüğü ve etkime yeri ile kritik kayma yüzeyinin yatay düzlemle yaptığı açının tespitinde, makine öğrenme tabanlı DVR yöntemi yardımıyla, doğrusal olmayan regresyon modelleri oluşturulmuştur.

Problemin her bir çıktı parametresi için en iyi DVR modelin seçimi; iki örnekleme metodu ve altı çekirdek fonksiyonun istatistiksel olarak kıyaslanması suretiyle gerçekleştirilmiştir. Bunu takiben, geoteknik literatürdeki güncel bir makalenin analitik denklemleri ile oluşturulan yepyeni bir veri kümesinin noktalarında, oluşturulan en iyi DVR modellerin öngörüleri test edilerek doğrulama yapılmıştır. Aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

- Burada dikkate alınan geoteknik mühendisliği probleminin doğası gereği çok sayıdaki girdi ve çıktı parametreleri ile oluşturulan büyük bir veri setindeki değerler kullanılarak, parametreler arasında matematik tabanlı doğrusal olmayan regresyon modellerin kurulmasında DVR'nin mühendislik açısından kullanılabilir seviyede doğru, etkin ve güvenilir bir makine öğrenme algoritması olduğu istatistiksel olarak yüksek R² ve R²_{adj}ile düşük MSE, RMSE ve MAE değerlerinin elde edilmesi ile kendisini kanıtlamıştır.
- P_{ae} çıktı parametresinin regresyon analizinde tetkik edilen tüm çekirdek fonksiyonlarından DVR-CP kerneller en iyi ve en hızlı sonuçları vermiştir. Problemin diğer çıktı parametreleri olan α_{er} ve z_{ae} için DVR-MG kernelleri en başarılı regresyon ilişkilerini ortaya koyarken, aksine diğer çekirdek fonksiyonları içinde en hızlı sonuç veren fonksiyon olamamışlardır. Özellikle α_{er} için DVR-MG kerneli en yavaş modelleme yapan fonksiyon olmuştur.
- En iyi regresyon modelinin DVR yöntemiyle ortaya çıkarılmasında, veri kümesini yüzdesel olarak ayıran örnekleme metodu veri kümesini K sayıda alt kümeye ayıran örnekleme metoduna göre yaklaşık 2,5 kat daha hızlı modellemeler gerçekleştirmiştir. Ancak örnekleme yöntemi seçiminin, istatistiksel göstergeler üzerinde kayda değer bir etkisi olmamıştır. Bu yüzden DVR ile regresyon modellemesinde eğitim ve test aşamaları için veri kümesinin yüzdesel olarak ayıran örnekleme metodu hem emek hem de zaman tasarrufu nedeniyle bu problem için açık bir tercih olacaktır.
- Bu çalışmanın doğrulaması referans alınan makalenin çözümleri ile en iyi DVR model öngörüleri arasındaki sapmaları (rezidüelleri) esas alan en çok kullanılan R², R²_{adj}, MSE, RMSE, MAE ve MAPE gibi altı istatistiksel gösterge yardımıyla yapılmıştır. DVR ile elde edilen regresyon modellerinin özellikle P_{ae} ve α_{cr} çıktı parametrelerini hızlı ve doğru tahmin etmede oldukça başarılı olduğu ortaya çıkmaktadır. Diğer çıktı parametresi z_{ae}'nin DVR yöntemiyle kurulan ilişki modelince belirlenmesinde diğerlerine nispeten daha zayıf bir tahmin performansı görülse de pratik mühendislik uygulamaları için sıfıra yakın RMSE, 0,75'den büyük R² ve R²_{adj} değerleri ile elde edilen sonuçlar kabul edilebilir bir doğruluk ve kullanılabilirlik seviyesindedir.

Sonuç olarak; DVR'nin uygun bir çekirdek fonksiyonu ile, bu çalışmadaki gibi çok sayıda (bağımlı ve bağımsız) değişkeni aynı anda barındıran geoteknik problemlerde, parametreler arasındaki matematiksel ilişkiyi güçlü ve etkili bir biçimde ortaya çıkarma yetkinliğine sahip lineer olmayan regresyon metodu olduğu doğrulanmıştır. Bu yüzden DVR makine öğrenme algoritması, istinat yapılarının tasarımında ve analizinde olduğu gibi, çoklu girdi parametreli geoteknik çalışmalarında emek, zaman ve para israfını en aza indirgeyecek hızlı ve alternatif bir yöntem olarak inşaat mühendislerine takdim edilebilir.

Kaynaklar (References)

- Vapnik V.N., Golowich S.E., Smola A., Support vector method for function approximation, regression estimation, and signal processing, 9th International Conference on Advances in Neural Information Processing Systems, San Mateo-CA, 281-287, 2-5 December, 1996.
- Osowski S., Siwek. K., Markiewicz T., MLP and SVM networks a comparative study, 6th Nordic Signal Processing Symposium (NORSIG), Espoo-Finland, 37-40, 9-11 June, 2004.
- Samui P., Sitharam T.G., Kurup P.U., OCR prediction using support vector machine based on piezocone data, J. Geotech. Geoenviron. Eng., 134 (6), 894-898, 2008.
- Puri N., Prasad H.D., Jain A., Prediction of geotechnical parameters using machine learning techniques, Procedia Computer Science, 125, 509–517, 2018.
- Aboutaleb S., Behnia M., Bagherpour R., Bluekian B., Using nondestructive tests for estimating uniaxial compressive strength and static Young's modulus of carbonate rocks via some modeling techniques, Bull. Eng. Geol. Environ., 77, 1717-1728, 2018.
- Cruz M., Santos J.M., Cruz N., Using neural networks and support vector regression to relate marchetti dilatometer test parameters and maximum shear modulus, Appl. Intell., 42, 135-146, 2015.
- Kurnaz T.F., Kaya Y., The comparison of the performance of ELM, BRNN, and SVM methods for the prediction of compression index of clays, Arabian Journal of Geosciences, 11 (24), 770-784, 2018.
- Samui P., Sitharam T.G., Site characterization model using least-square support vector machine and relevance vector machine based on corrected SPT data (N_c), Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., 34, 755-770, 2010.
- Günaydın O., Özbeyaz A., Söylemez M., Regression analysis of soil compaction parameters using support vector method, Celal Bayar University Journal of Science, 14 (4), 443-447, 2018.
- Debnath P., Dey A.K., Prediction of bearing capacity of geogridreinforced stone columns using support vector regression, Int. J. Geomech., 18 (2), 1-15, 2018.
- Das M., Dey A.K., Prediction of bearing capacity of stone columns placed in soft clay using SVR model, Arabian Journal for Science and Engineering, 44, 4681-4691, 2019.
- **12.** Pal M., Deswal S., Modelling pile capacity using Gaussian process regression, Computers and Geotechnics, 37, 942-947, 2010.
- 13. Kardani N., Zhou A., Nazem M., Shen S., Estimation of bearing capacity of piles in cohesionless soil using optimised machine learning approaches, Geotech. Geol. Eng., 38 (9), 2271-2291, 2019.
- 14. Moayedi H., Hayati S., Artificial intelligence design charts for predicting friction capacity of driven pile in clay, Neural Computing and Applications, 31, 7429-7445, 2019.
- Singh T.V., Pal M., Arora V.K., Modeling of oblique load test on batter pile group based on Support Vector Machines and Gaussian Regression, Geotech. Geol. Eng., 36, 1597-1607, 2018.
- Pal M., Support vector machines-based modeling of seismic liquefaction potential, Int. J. Numer. Analyt. Meth. Geomechanics, 30 (10), 983-996, 2006.
- Goh A.T.C., Goh S.H., Support vector machines: Their use in geotechnical engineering as illustrated using seismic liquefaction data, Comput. Geotech., 34, 410-421, 2007.
- Lee C., Chern S., Application of a support vector machine for liquefaction assessment, Journal of Marine Science and Technology, 21 (3), 318-324, 2013.
- Xue X., Xiao M., Application of genetic algorithm-based support vector machines for prediction of soil liquefaction, Environ. Earth Sci., 75 (874), 1-11, 2016.
- Samui P., Support vector machine applied to settlement of shallow foundations on cohesionless soils, Comput. Geotech., 35 (3), 419-427, 2008.
- Ocak I., Seker S.E., Calculation of surface settlements caused by EPBM tunneling using artificial neural network, SVM, and Gaussian processes, Environ. Earth Sci., 70, 1263-1276, 2013.
 Oommen T., Baise L.G., Model development and validation for
- Oommen T., Baise L.G., Model development and validation for intelligent data collection for lateral spread displacements, Journal of Computing in Civil Engineering, 24 (6), 467-477, 2010.
- **23.** Samui P., Slope stability analysis: A support vector machine approach, Environmental Geology, 56 (2), 255-267, 2008.
- Calik U., Critical inclination of failure surface and seismic active earth thrust for a broken slope backfill, Turkish Journal of Civil Engineering, 33 (4), 12027-12043, 2022.

Çalık / Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University 39:3 (2024) 1759-1770

- Peng J., Zhu, Y., Derivation of Shukla's generalized expression for dynamic active thrust by inclined slice element method, Soil Mechanics and Foundation Engineering, 562, 77-81, 2019.
- Nian T., Han J., Analytical solution for Rankine's seismic active earth pressure in c-φ soil with infinite slope, Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 1399, 1611-1616, 2013.
- Seed H.B., Whitman R.V., Design of earth retaining structures for dynamic loads, ASCE Specialty Conference on Lateral Stresses in the Ground and Design of Earth Retaining Structures, Ithaca-New York, 103-147, 22-24 June, 1970.
- Terzaghi K., Theoretical Soil Mechanics, John Wiley, New York, A.B.D., 1943.
- **29.** Das B.M., Sobhan K., Principles of Geotechnical Engineering 9th Edition, Cengage Learning, Boston, A.B.D., 2018.
- 30. Yang J., Lung W.H., Seismic design of retaining walls considering vertical ground acceleration, 4th International Conference on Earthquake Geotechnical Engineering, Thessaloniki-Greece, 25-28 June, 2007.
- **31.** Vapnik V.N., The Nature of Statistical Learning Theory, Springer-Verlag, New York, A.B.D., 1995.
- Scholkopf B., Smola A.J., Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization and Beyond, MIT Press,

A.B.D., 2002.

- Karal Ö., Compression of ECG data by support vector regression method, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 33 (2), 743-755, 2018.
- 34. Gökdemir A., Çalhan A., Deep learning and machine learning based anomaly detection in internet of things environments, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 37 (4), 1945-1956, 2022.
- **35.** Yabanova İ., Yumurtacı M., Classification of dynamic egg weight using support vector machine, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 33 (2), 393-402, 2018.
- Cristianini N., Shawe-Taylor J., An Introduction to Support Vector Machine, Cambridge Univ. Press, London, İngiltere, 2000.
- **37.** Vapnik V.N., An overview of statistical learning theory, IEEE Transactions on Neural Networks, 10 (5), 988-999, 1999.
- Acı M., Doğansoy G.A., Demand forecasting for e-retail sector using machine learning and deep learning methods, Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University, 37 (4), 1945-1956, 2022.
- Hair J.F., Sarstedt M., Hopkins L., Kuppelwieser V.G., Partial least squares structural equation modeling (PLS-SEM): An emerging tool in business research, European Business Review, 26 (2), 106-121, 2014.