



Değişken kesitli Timoshenko kolonlarının tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemiyle burkulma analizi

Buckling analysis of Timoshenko columns having variable cross-section by complementary functions method

Burkay Sivri^{*1} , Beytullah Temel¹ 

¹ Çukurova Üniversitesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, 01330, Adana Türkiye

Özet

Bu çalışmada, aksenal yük altında değişken kesitli kolonların burkulması Tamamlayıcı Fonksiyonlar Yöntemi (TFY) ile incelenmiştir. Eleman boyunca kesit özellikleri sürekli değişen kolonlar Timoshenko giriş teorisine göre modellenmiştir. İç kuvvet-şekil değiştirme ilişkileri ve denge denklemleri kullanılarak burkulma davranışını idare eden birinci mertebeden adi diferansiyel denklem takımı elde edilmiştir. Farklı sınır koşulları için eleman boyunca farklı koniklik değerlerinin ve uzunluk/kalınlık oranlarının burkulma yükü üzerindeki etkileri araştırılmıştır. Hesaplanan boyutsuz burkulma yükleri literatürdeki mevcut değerler ve Abaqus sonlu elemanlar programından elde edilen sonuçlar ile test edilmiştir. TFY'nin değişken kesitli kolonların elastik burkulma problemine uygulanabilirliği gösterilmiştir.

Anahtar kelimeler: Burkulma analizi, Tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi, Timoshenko kolonu

1. Giriş

Taşıyıcı sistemlerde kullanılan kolon elemanlar, çubuk eksenli doğrultusunda basınç kuvveti etkisi altındadır. Bu etkiden dolayı burkulma davranışlarının bilinmesi tasarım için önemlidir. Havacılık, uzay, tıp, makina ve inşaat mühendisliği gibi alanlarda üniform kesitler ve homojen-izotrop malzeme özellikleri istenilen mekanik özellikleri sağlayabilir. Mimari ve optimum mühendislik tasarımı için yapı elemanı boyunca değişken kesit ve malzeme özellikleri kullanılmaktadır. Gelişen eleman üretim teknikleriyle birlikte yapı elemanları bu talepleri karşılayabilecek şekilde imal edilebilir. Malzeme ve kesit özelliklerinin eleman eksenli ve/veya kesiti boyunca sürekli olarak değiştiği yapı elemanlarının mekanik davranışlarının bilinmesi bu sebepten gereklidir. Bu elemanların burkulma, serbest titreşim, zorlanmış titreşim, yorulma, aşınma, tokluk gibi mekanik özelliklerinin araştırılması önem kazanmıştır. Li [1], uygulamada sıklıkla karşılaşılan durumlar için değişken kesitli kolonların burkulma analizlerinde Bessel denklemlerini kullanmıştır. Elishakoff [2], homojen-izotrop olmayan kolonların burkulma yükünü, polinom tipi malzeme fonksiyonları için bulmuştur. Lee ve Lee [3], malzeme ve

Abstract

In this study, the buckling of variable cross-section columns under axial load is investigated by the Complementary Functions Method (CFM). Columns whose cross-sectional properties change continuously throughout the element are modeled according to the Timoshenko beam theory. By using the internal force-strain relations and equilibrium equations, a set of first-order ordinary differential equations governing the buckling behavior is obtained. The effects of different taper values and length/thickness ratios on the buckling load along the element are investigated for different boundary conditions. The calculated dimensionless buckling loads are tested with the available values in the literature and the results obtained from the Abaqus finite element program. The applicability of the CFM to the elastic buckling problem of variable cross-section columns has been demonstrated.

Keywords: Buckling analysis, Complementary functions method, Timoshenko column

kesit özelliklerinin kolon eksenli boyunca doğrusal değiştiği Euler-Bernoulli kolonlarının serbest titreşim ve burkulma analizini integral metodu ile çözmüşlerdir. Coşkun ve Atay [4], üniform ve değişken kesitli Euler-Bernoulli teorisine dayanan kolonların burkulmasını varyasyonel iterasyon yöntemiyle bulmuşlardır. Shahbaa ve arkadaşları [5], aksenal yönde fonksiyonel derecelenmiş girişlerin stabilite ve serbest titreşim analizini sonlu eleman metodu kullanarak yapmışlardır. Analizler için kullanılan giriş eleman modelini, şekil fonksiyonları kullanarak elde etmişlerdir. Gören ve Erim [6], on farklı kademeli ve kademesiz girişin kritik burkulma yüklerini sonlu eleman ve sonlu eleman-transfer matris metotlarını kullanarak hesaplamışlardır. Huang ve Li [7], üniform olmayan ve eksen boyunca eğilme rijitliği değişen Euler-Bernoulli kolonlarının burkulma davranışlarını idare eden diferansiyel denklemi, Fredholm integraline indirgemişlerdir. Soltani [8], elastik zemine oturan aksenal yönde derecelenmiş Timoshenko kolonlarının burkulma analizini sonlu eleman modeli kullanarak gerçekleştirmiştir. Rajasekaran [9], malzeme ve kesit özelliklerinin fonksiyonel olarak değiştiği kolonların titreşim ve burkulmasını diferansiyel transformasyon yöntemiyle araştırmıştır. Shahba ve arkadaşları [10], elastik

* Sorumlu yazar / Corresponding author, e-posta / e-mail: bsivri@cu.edu.tr (B. Sivri)

Geliş / Received: 13.09.2021 Kabul / Accepted: 11.10.2021 Yayınlanma / Published: 14.01.2022

doi: 10.28948/ngumuh.994891

mesnetli aksel yönde derecelenmiş Timoshenko teorisine dayalı kolonların serbest titreşim ve stabilite analizlerini sonlu elemanlar analiziyle incelemişlerdir. Soltani ve Asgarian [11], aksel yönde fonksiyonel derecelenmiş Timoshenko kolonlarının sonlu elemanlar formülasyonu ile lineer stabilite analizini gerçekleştirmişlerdir. Akgöz [12], değişken kesitli kolonların burkulma yükünü Ritz yöntemiyle bulmuştur. Kiriş modellerinde klasik kiriş teorisi kullanılmış olup, sınır koşullarının ve koniklik oranının burkulma yüküne etkisini parametrik olarak incelemiştir.

Bu çalışmada Timoshenko teorisine dayalı modellenen akseni boyunca değişken kesitli kolonların burkulma analizi TFY ile gerçekleştirilmiştir. TFY kullanmanın temel amacı sınır değer problemini başlangıç değer problemine dönüştürmektir. Yöntem sayesinde bilinmeyen fonksiyonların tamamı bir kerede elde edilebilir. Diferansiyel denklem çözümünde kullanılan Shooting Metodu başlangıç koşullarını belirlemek için deneme yanılma yöntemini kullanırken, TFY bağımsız başlangıç koşulları kullanarak daha az matematiksel işleme ihtiyaç duyar. Bu sayede farklı kesit değişim fonksiyonlarına sahip kolonların analizleri daha kısa sürede yapılabilir. Yazarların bilgisine göre, literatürde değişken kesitli Timoshenko kolonlarının burkulma yüklerinin TFY ile çözümüne rastlanmamıştır. Analizler, Python dilinde hazırlanan program aracılığıyla çözülmüştür. Çözümlerde homojen-izotrop malzeme kullanılmıştır. Bu çalışmada elde edilen burkulma yükleri, literatürdeki mevcut sonuçlar ve sonlu eleman programından bulunan sonuçlar ile karşılaştırılmıştır. Farklı sınır koşulları için koniklik değerlerinin ve uzunluk/kalınlık oranlarının burkulma yüküne etkisi parametrik olarak incelenmiştir.

2. Materyal ve metot

Burkulma davranışını idare eden kanonik denklemler, iç kuvvet-şekil değiştirme ilişkisinden ve serbest cisim diyagramı üzerinden yazılan denge denklemlerinden elde edilecektir.

Timoshenko teorisine göre aksel yer değiştirme U_x ile düşey yer değiştirme U_z Denklem (1)'deki gibi ifade edilebilir. Aksel birim şekil değiştirme ε_x ve açılmal birim şekil değiştirme γ_{xz} ifadeleri Denklem (2-3)'deki gibi yazılır [13].

$$U_x = u(x) + z\theta(x) \quad , \quad U_z = w(x) \quad (1)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = u' + z\theta' \quad (2)$$

$$\gamma_{xz} = \theta + w' \quad (3)$$

Eksel P basınç kuvveti taşıyan dikdörtgen kesitli kolonlarda; N normal kuvveti, M eğilme momenti, Q kesme kuvveti olmak üzere iç kuvvet-şekil değiştirme ilişkileri Denklem (4-6) 'da verilmektedir.

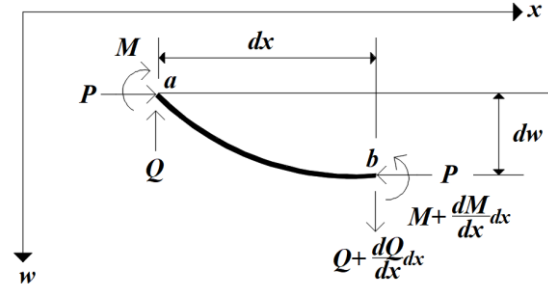
$$N = P \quad (4)$$

$$M = EI(x)\theta' \quad (5)$$

$$Q = k_s A(x)G(\theta + w') \quad (6)$$

Burada, E elastisite modülünü, G kayma modülünü, k_s kesite bağlı kayma düzeltme katsayısını, ν poisson oranını, θ dönme, w düşey yer değiştirmeyi göstermektedir.

Eksel P kuvveti altındaki kolonun serbest cisim diyagramı Şekil 1. üzerinden b noktasına göre toplam moment dengesi yazılırsa, moment değişimi Denklem (7)'deki gibi bulunabilir.



Şekil 1. Aksel P kuvveti altındaki kolonun serbest cisim diyagramı

$$M' = Q + Pw' \quad (7)$$

Düşey ve yatay kuvvetlerin dengesinden, normal ve kesme kuvvetlerindeki değişimler Denklem (8)'de verilmiştir.

$$Q' = 0, \quad N' = 0 \quad (8)$$

Yukarıda verilen denklemler kullanılarak, burkulma davranışını idare eden diferansiyel denklemler, kanonik formda aşağıdaki gibi bu çalışmada elde edilmiştir.

$$\frac{du}{dx} = \frac{N}{EA(x)} \quad (9)$$

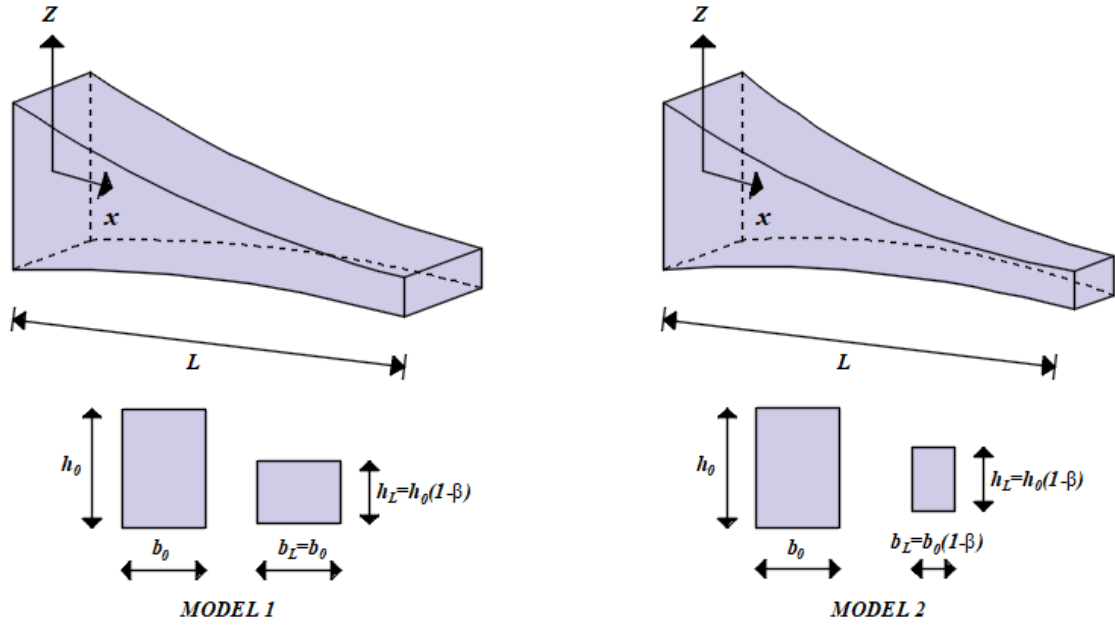
$$\frac{dw}{dx} = - \left(\frac{k_s GA(x)}{k_s GA(x) - P} \right) \theta \quad (10)$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI(x)} \quad (11)$$

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad (12)$$

$$\frac{dQ}{dx} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{dM}{dx} = Q - P \left(\frac{k_s GA(x)}{k_s GA(x) - P} \right) \theta \quad (14)$$



Şekil 2. Ekseni boyunca değişken kesitli kolon modelleri

Denklem (9-14)'de verilen adi diferansiyel denklem takımı, TFY [13-16] ile çözülecektir. TFY, lineer sınır değer problemini başlangıç değer problemine dönüştüren bir çözüm yöntemidir. Başlangıç değer problemi çözümleri beşinci mertebeden Runge-Kutta (RK5) algoritması ile yapılacaktır [17].

$$F(y) = k_n y^{(n)} + k_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + k_1 y' + k_0 \quad (15)$$

Denklem (15)'de verilen n. mertebeden diferansiyel denklem, n adet adi diferansiyel denklem takımına indirgenir. Bu denklem takımı, n adet homojen ve bir adet homojen olmayan başlangıç değer problemi olarak çözülür. İntegrasyon sabitleri ise problemin sınır koşullarından elde edilir. Bu çalışmada ele alınan problemlerin çözümlerinde Tablo 1'de verilen üç farklı sınır koşulu kullanılmıştır.

Tablo 1. Sınır koşulları

Sınır Koşulu	$u=0$	$w=0$	$\theta=0$
Ankastre Mesnet (A)	$u=0$	$w=0$	$\theta=0$
Sabit Mesnet (S)	$u=0$	$w=0$	$M=0$
Serbest Uç (Se)	$u=0$	$Q=0$	$M=0$

Analizi yapılan problemin P burkulma yükleri, sınır koşulları dikkate alınarak, diferansiyel denklem takımının homojen çözümünden elde edilen katsayılar matrisinin determinantını sıfır yapan değerlerden elde edilmektedir. Burkulma yükleri, Secant metoduyla iteratif olarak bulunmaktadır.

Ekseni boyunca değişken kesit özelliklerine sahip iki ayrı kolon modeli Şekil 2'de gösterilmiştir. Model 1'de eksen boyunca sadece yükseklik değişirken, Model 2'de hem yükseklik hem de genişlik birlikte değişmektedir. Her iki model için kesit alanı $A(x)$ ve kesit atalet momenti $I(x)$ değişimi Tablo 2'de verilmektedir.

Tablo 2. Kesit alanı ve atalet momenti değişimi

Model No	$I(x)$	$A(x)$
Model 1	$I_0(1-\beta \frac{x}{L})^3$	$A_0(1-\beta \frac{x}{L})$
Model 2	$I_0(1-\beta \frac{x}{L})^4$	$A_0(1-\beta \frac{x}{L})^2$

3. Sayısal Uygulamalar

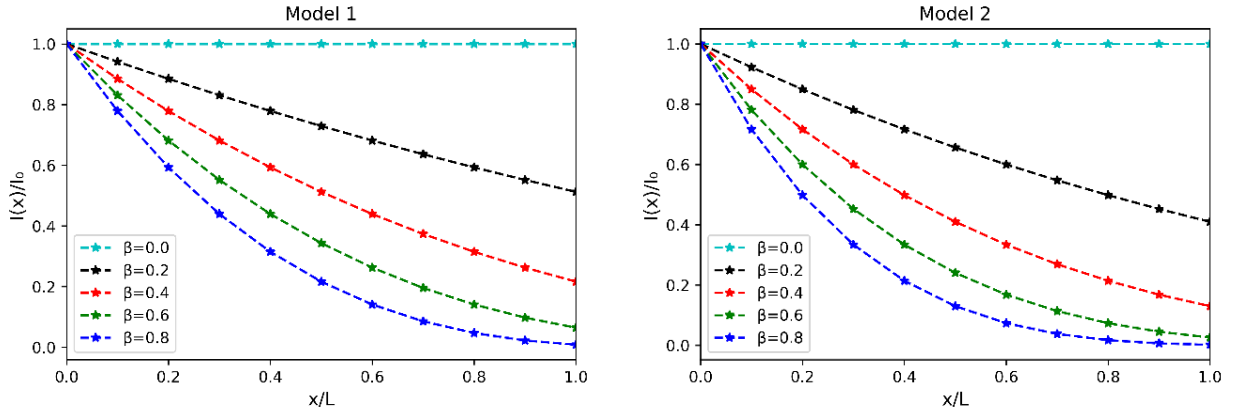
3.1. Uygulama 1

Kullanılan çözüm yönteminin uygunluğu, yakınsaması ve etkinliğini göstermek için literatürde analitik çözümü verilen homojen-izotrop malzemeye sahip bir kolon ele alınmıştır. Kolonun burkulma analizlerinde kullanılan boyutsuzlaştırma parametreleri Denklem (16)'da verilmiştir.

$$r = \frac{I_0}{A_0 L^2} \quad \bar{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{EI_0} \quad (16)$$

Analizlerde, $r = 0.01$, $L = 1 \text{ m}$, $k_s = 5/6$ ve $\nu = 0.3$ olarak alınmıştır. $x = 0$ başlangıç noktasında kesit atalet momenti ve alanı sırasıyla $I_0 = b_0 h_0^3 / 12$ ve $A_0 = b_0 h_0$ bağlantılarından hesaplanmıştır.

Model 1 ve Model 2 için çeşitli β değerlerine göre kolon boyunca atalet momentinin değişimi Şekil 3'de gösterilmiştir. Tablo 2'de verilen değişim fonksiyonlarında $\beta = 0$ alınırsa, problem sabit kesitli kolon problemine dönüşmektedir. Bu durumda homojen-izotrop malzemeli Timoshenko kolonun çeşitli adım aralıkları ve Sabit-Sabit (S-S), Ankastre-Sabit (A-S), Ankastre-Ankaste (A-A) ve Ankastre-Serbest (A-Se) sınır koşulları için bulunan boyutsuz burkulma yükleri, Tablo 3'de literatürde verilen analitik sonuçlar [18] ile karşılaştırılmıştır.



Şekil 3. Çeşitli β değerleri için kolon boyunca atalet momentinin değişimi

Tablo 3. Homojen-izotrop Timoshenko kolonların boyutsuz burkulma yükleri

Sınır Koşulları	Bu Çalışma			Wang [18]
	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$	
S-S	7.546	7.546	7.546	7.546
A-S	12.385	12.387	12.387	12.387
A-A	17.676	17.689	17.690	17.690
A-Se	2.291	2.291	2.291	2.291

Tablo 3 incelendiğinde, $N = 10$ adım aralığında sabit kesitli kolonlarda yeterli derecede yakınsamanın sağlandığı görülmektedir.

Değişken kesitli Timoshenko kolonunun farklı koniklik değerleri ve A-Se sınır koşulu için bulunan boyutsuz burkulma yükleri Tablo 4'de verilmiştir. Tablo 4 incelendiğinde, A-Se sınır koşuluna sahip değişken kesitli Timoshenko kolonları için TFY ile bulunan boyutsuz burkulma yüklerinin, literatürde verilen sonuçlarla oldukça uyumlu olduğu görülmektedir.

Tablo 4. A-Se kolonun farklı koniklik değerleri için boyutsuz burkulma yükleri

β	Model 1		Model 2	
	Bu Çalışma $N = 10$	Soltani [11]	Bu Çalışma $N = 10$	Soltani [11]
0.1	2.089	2.088	2.016	2.016
0.2	1.884	1.884	1.742	1.742
0.3	1.676	1.676	1.471	1.471
0.4	1.465	1.465	1.203	1.203
0.5	1.250	1.250	0.941	0.941
0.6	1.029	1.029	0.688	0.688
0.7	0.800	0.800	0.448	0.447
0.8	0.561	0.560	0.234	0.236
0.9	0.301	0.301	0.069	0.073

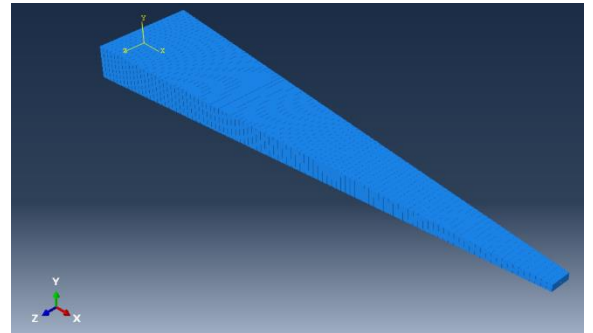
İki kesit değişim modeli için bulunan boyutsuz burkulma yükleri arasındaki farkın, β değeri ile birlikte artmakta olduğu, ayrıca Model 1 kesit değişimi için daha büyük boyutsuz burkulma yüklerinin elde edildiği anlaşılmaktadır.

3.2. Uygulama 2

Bu problemde ilk olarak, uzunluk/kalınlık oranının değişken kesitli kolonların burkulma yüküne etkisi TFY ve Abaqus [19] sonlu elemanlar programı ile araştırılmıştır. Analizlerde kullanılan boyutsuzlaştırma parametresi Denklem (17)'de verilmiş ve $L = 1 m$, $\nu = 0.3$ ve $k_s = 0.85$ alınmıştır.

$$\overline{P}_{cr} = \frac{P_{cr} L^2}{EI_0} \quad (17)$$

Uzunluk/kalınlık oranı $L/h_0 = 5$ olan değişken kesitli Timoshenko kolonlarının burkulma analizlerinin, sonlu eleman (SE) çözümleri iki boyutlu düzlemde yapılmıştır. Kesit değişimini modelleyebilmek için kolon uzunluğu doğrultusunda 50, 100 ve 200 homojen-izotrop elemana bölünmüştür. SE analizlerinde kayma deformasyonlarının dikkate alındığı B21 elemanı kullanılmıştır. Birbiri ardına gelen her iki eleman arasına giriş tipi bağlantı tanımlanmıştır. Modelin SE programı arayüzündeki görüntüsü Şekil 4'de gösterilmiştir. TFY ile çözümlerde $N = \{5, 10, 20, 50\}$ integrasyon adım aralıkları kullanılarak, çeşitli koniklik oranları ve sınır koşulları için bulunan boyutsuz burkulma yükleri, Tablo 5'de Abaqus programından elde edilen değerler ile karşılaştırılmıştır.



Şekil 4. Değişken kesitli kolonun SE modeli

Tablo 5. $L/h_0 = 5$ oranı için kolonunun farklı koniklik değerleri için boyutsuz burkulma yükleri

		A-A		A-S		S-S		A-Se		
		Model 1	Model 2	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2	
$\beta = 0.2$	Abaqus	50 Eleman	21.3893	19.0245	12.2303	10.8761	6.5561	5.8328	1.9755	1.8348
		100 Eleman	21.3889	19.0241	12.2306	10.8765	6.5565	5.8328	1.9755	1.8348
		200 Eleman	21.3881	19.0234	12.1481	10.8000	6.5558	5.8324	1.9756	1.8349
	TFY	N=5	21.3573	18.9863	12.3941	11.0003	6.5560	5.8326	1.9756	1.8349
		N=10	21.3836	19.0106	12.3969	11.0027	6.5562	5.8327	1.9756	1.8349
		N=20	21.3843	19.0112	12.3969	11.0028	6.5562	5.8327	1.9756	1.8349
		N=50	21.3843	19.0112	12.3969	11.0028	6.5562	5.8327	1.9756	1.8349
$\beta = 0.4$	Abaqus	50 Eleman	14.8838	11.2335	8.3220	6.2828	4.4010	3.3201	1.5335	1.2727
		100 Eleman	14.8830	11.2328	8.3228	6.2831	4.4014	3.3203	1.5336	1.2728
		200 Eleman	14.8811	11.2309	8.2523	6.2239	4.4010	3.3200	1.5336	1.2728
	TFY	N=5	14.8466	11.1802	8.4065	6.3216	4.4013	3.3204	1.5336	1.2728
		N=10	14.8722	11.2016	8.4084	6.3229	4.4012	3.3203	1.5336	1.2728
		N=20	14.8729	11.2025	8.4084	6.3229	4.4012	3.3203	1.5336	1.2728
		N=50	14.8729	11.2025	8.4084	6.3229	4.4012	3.3203	1.5336	1.2728
$\beta = 0.6$	Abaqus	50 Eleman	8.8620	5.2103	4.8514	2.8530	2.5452	1.4865	1.0747	0.7325
		100 Eleman	8.8601	5.2084	4.8525	2.8537	2.5456	1.4869	1.0748	0.7327
		200 Eleman	8.8568	5.2046	4.7955	2.8124	2.5453	1.4867	1.0749	0.7327
	TFY	N=5	8.8250	5.1953	4.8852	2.8561	2.5459	1.4873	1.0749	0.7328
		N=10	8.8453	5.1728	4.8857	2.8564	2.5456	1.4870	1.0749	0.7327
		N=20	8.8469	5.1755	4.8857	2.8564	2.5456	1.4869	1.0749	0.7327
		N=50	8.8469	5.1755	4.8857	2.8563	2.5456	1.4869	1.0749	0.7327
$\beta = 0.8$	Abaqus	50 Eleman	3.6635	1.3539	1.9686	0.7244	1.0435	0.3723	0.5841	0.2535
		100 Eleman	3.6591	1.3509	1.9701	0.7253	1.0442	0.3728	0.5844	0.2538
		200 Eleman	3.6498	1.3421	1.9302	0.7040	1.0442	0.3728	0.5845	0.2539
	TFY	N=5	3.7632	1.0304	1.9645	0.6897	1.0434	0.3698	0.5844	0.2531
		N=10	3.6416	1.3301	1.9769	0.7219	1.0445	0.3730	0.5845	0.2539
		N=20	3.6482	1.3335	1.9767	0.7221	1.0444	0.3730	0.5845	0.2539
		N=50	3.6483	1.3340	1.9767	0.7221	1.0444	0.3729	0.5845	0.2539

Tablo 5 incelendiğinde, A-A sınır koşuluna sahip kolonların Abaqus sonlu elemanlar programından 50 ve 200 eleman kullanılarak elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin bağıl farkları sırasıyla, $\beta = 0.2$ ve {Model 1 ve Model 2} için $\{ \%5.61 \times 10^{-3}, \%5.78 \times 10^{-3} \}$ iken, $\beta = 0.8$ ve {Model 1 ve Model 2} için $\{ \%0.375, \%0.879 \}$ olarak elde edilmiştir.

Aynı sınır koşuluna sahip Timoshenko kolonlarının TFY ile $N = \{10, 50\}$ adım aralıkları için bulunan boyutsuz

burkulma yüklerinin bağıl farkları sırasıyla, $\beta = 0.2$ ve {Model 1 ve Model 2} için $\{ \%3.27 \times 10^{-3}, \%3.16 \times 10^{-3} \}$ iken, $\beta = 0.8$ ve {Model 1 ve Model 2} için $\{ \%0.184, \%0.292 \}$ olarak bulunmaktadır. Farklı L/h_0 oranları için değişken kesitli Timoshenko kolonlarının iki ayrı kesit değişim modeli ve çeşitli koniklik oranlarındaki boyutsuz burkulma yükleri Tablo 6-7'de verilmiştir. Analizlerde $N = 20$ adım aralığı kullanılmıştır.

Tablo 6. $L/h_0 = 10$ oranı için kolonunun farklı koniklik değerleri için boyutsuz burkulma yükleri

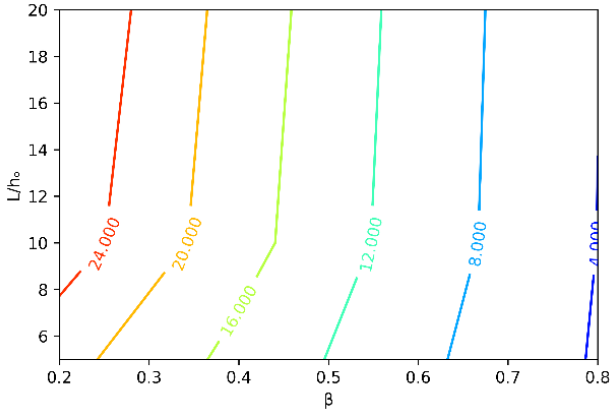
β	A-A		A-S		S-S		A-Se	
	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2
0.2	26.2033	23.3500	13.9063	12.3828	6.9492	6.1883	2.0111	1.8711
0.4	17.5229	13.3253	9.2323	7.0080	4.6109	3.4920	1.5600	1.3000
0.6	10.0194	5.9926	5.2537	3.1291	2.6389	1.5552	1.0925	0.7505
0.8	3.9674	1.5114	2.0817	0.7848	1.0725	0.3891	0.5937	0.2616

Tablo 7. $L/h_0 = 20$ oranı için kolonunun farklı koniklik değerleri için boyutsuz burkulma yükleri

β	A-A		A-S		S-S		A-Se	
	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2	Model 1	Model 2
0.2	27.7665	24.7585	14.3427	12.7829	7.0549	6.2840	2.0202	1.8804
0.4	18.3374	13.9801	9.4637	7.2018	4.6664	3.5376	1.5668	1.3070
0.6	10.3605	6.2327	5.3541	3.2047	2.6633	1.5731	1.0970	0.7551
0.8	4.0551	1.5614	2.1095	0.8019	1.0798	0.3934	0.5961	0.2636

Tablo 6-7 incelendiğinde L/h_0 oranı arttıkça dört farklı sınır koşulu için de boyutsuz burkulma yüklerinin arttığı görülmüştür. En büyük boyutsuz burkulma yükleri A-A sınır koşuluna sahip kolonlarda elde edilirken, en küçük boyutsuz burkulma yükleri ise, A-Se sınır koşulu için elde edilmiştir.

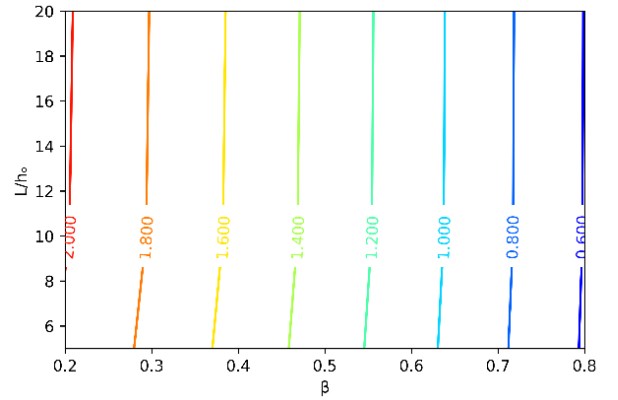
İki farklı sınır koşulu için Model 1 kesit değişimine sahip Timoshenko kolonlarının, koniklik oranı ve uzunluk/kalınlık oranına bağlı boyutsuz burkulma yüklerinin eşdeğer eğrileri Şekil 5-6'da verilmiştir.



Şekil 5. A-A sınır koşulu için kolonun boyutsuz burkulma yüklerinin eşdeğer eğrileri

Şekil 5 incelendiğinde, A-A sınır koşuluna sahip kolonlarda, düşük β değerleri için L/h_0 oranının boyutsuz burkulma yüküne etkisinin, yüksek β değerlerine kıyasla daha fazla olduğu görülmektedir.

Şekil 6'ya göre ise, A-Se sınır koşulu altında kolonda çeşitli β değerleri için elde edilen boyutsuz burkulma yüklerinin L/h_0 oranlarından çok az etkilendiği anlaşılmaktadır.



Şekil 6. A-Se sınır koşulu için kolonun boyutsuz burkulma yüklerinin eşdeğer eğrileri

4. Sonuçlar

Bu çalışmada değişken kesitli, Timoshenko kiriş teorisine dayalı kolonların burkulma analizi TFY kullanılarak yapılmıştır. Araştırmada iki farklı kesit değişim modeli kullanılmıştır. Analizlerde, β değeri arttıkça, elde edilen boyutsuz burkulma yükleri azalmaktadır. Dolayısıyla, çözüm yöntemlerinde kullanılan eleman sayısı ve adım aralıklarının önemi artmaktadır. L/h_0 oranı azaldıkça kayma deformasyonlarının boyutsuz burkulma yüküne etkisinin artmakta olduğu görülmektedir. Ayrıca, değişken kesitli kolonlarda L/h_0 oranının, burkulma yükü üzerindeki etkisinin, sınır koşullarına bağlı olarak değiştiği anlaşılmaktadır. Yapılan çalışma sonucunda, TFY'nin değişken kesitli kolonların burkulma analizinde etkin bir şekilde kullanılabilirdiği gösterilmiştir.

Çıkar çatışması

Yazarlar çıkar çatışması olmadığını beyan etmektedir.

Benzerlik oranı (iThenticate): % 10

Kaynaklar

- [1] Q. S. Li, Exact solutions for buckling of non-uniform columns under axial concentrated and distributed loading. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 20 (3), 485-500, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0997-7538\(01\)01143-3](https://doi.org/10.1016/S0997-7538(01)01143-3).
- [2] I. Elishakoff, Inverse buckling problem for inhomogeneous columns. *International Journal of Solids and Structures*, 38 (3), 457-464, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00049-4](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00049-4).
- [3] J. K. Lee and B. K. Lee, Free vibration and buckling of tapered columns made of axially functionally graded materials. *Applied Mathematical Modelling*, 75, 73-87, 2019. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2019.05.010>.
- [4] S. B. Coşkun and M. T. Atay, Determination of critical buckling load for elastic columns of constant and variable cross-sections using variational iteration method. *Computers & Mathematics with Applications*, 58 (11-12), 2260-2266, 2009. <https://doi.org/10.1016/j.camwa.2009.03.072>.
- [5] A. Shahba, R. Attarnejad, and S. Hajilar, Free vibration and stability of axially functionally graded tapered Euler-Bernoulli beams. *Shock and Vibration*, 18 (5), 683-696, 2011. <https://doi.org/10.3233/SAV-2010-0589>.
- [6] G. Binnur ve S. Erim, Değişken kesitli ankastre timoshenko kirişin statik stabilite analizi. *Dokuz Eylül Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Fen ve Mühendislik Dergisi*, 2(2), 75-86, 2000.
- [7] Y. Huang and X. F. Li, Buckling analysis of nonuniform and axially graded columns with varying flexural rigidity. *Journal of engineering mechanics*, 137(1), 73-81, 2011. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)EM.1943-7889.0000206](https://doi.org/10.1061/(ASCE)EM.1943-7889.0000206).
- [8] M. Soltani, Finite element modelling for buckling analysis of tapered axially functionally graded Timoshenko beam on elastic foundation. *Mechanics of Advanced Composite Structures*, 7(2), 203-218, 2020.
- [9] S. Rajasekaran, Buckling and vibration of axially functionally graded nonuniform beams using differential transformation based dynamic stiffness approach. *Meccanica*, 48(5), 1053-1070, 2013. <http://dx.doi.org/10.1007/s11012-012-9651-1>
- [10] A. Shahba, R. Attarnejad, M. T. Marvi and S. Hajilar, Free vibration and stability analysis of axially functionally graded tapered Timoshenko beams with classical and non-classical boundary conditions. *Composites Part B: Engineering*, 42(4), 801-808, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.01.017>.
- [11] M. Soltani and B. Asgarian, Finite element formulation for linear stability analysis of axially functionally graded nonprismatic timoshenko beam. *International Journal of Structural Stability and dynamics*, 19(02), 1950002, 2019. <https://doi.org/10.1142/S0219455419500020>.
- [12] B. Akgöz, Ritz yöntemi ile değişken kesitli kolonların burkulma analizi. *Mühendislik Bilimleri ve Tasarım Dergisi*, 7(2), 452-458, 2019. <https://doi.org/10.21923/jesd.539288>.
- [13] T. A. Aslan, A. R. Noori ve B. Temel, Fonksiyonel derecelenmiş malzemeli kirişlerin sönümlü ve sönümsüz zorlanmış titreşim analizi. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 35(2), 497-510, 2020. <https://doi.org/10.21605/cukurovaummfd.792455>.
- [14] T. A. Aslan, A. R. Noori ve B. Temel, Daire eksenli yapı elemanlarının tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile statik analizi. *Çukurova Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 32(1), 23-30, 2017. <https://doi.org/10.21605/cukurovaummfd.310041>.
- [15] A. R. Noori, T. A. Aslan and B. Temel, An efficient approach for in-plane free and forced vibrations of axially functionally graded parabolic arches with nonuniform cross section. *Composite Structures*, 200, 701-710, 2018. <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.05.077>.
- [16] H. Rasooli ve B. Temel, Değişken kesitli ve tabakalanmış kompozit malzemeli doğru ve daire eksenli karma sistemlerin tamamlayıcı fonksiyonlar yöntemi ile statik analizi. *Niğde Ömer Halisdemir Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 8(3), 46-56, 2019. <https://doi.org/10.28948/ngumuh.627482>
- [17] S.C. Chapra ve R. P. Canale, *Yazılım ve Programlama Uygulamalarıyla Mühendisler İçin Sayısal Yöntemler*. Literatür Yayınevi, 2003.
- [18] C.M. Wang, C.Y. Wang and J.N.Reddy, *Exact Solutions for Buckling of Structural Members*. Florida CRC Press, 2005.
- [19] Dassault Systèmes, ABAQUS/CAE v6.14, 2016.

