HERHANGİ BiR ÜLKENİN DENGELİ TARIMSAL ÜRETİM PLANLAMASININ MODELLENMESİ

Necmettin TANRIÖVER *, Öykü EREN ÖZSOY**

Geliş: 23.02.2009 Kabul: 31.07.2009

ÖZET

Bir ülke çeşitli bölge ve vilayetlerden oluşur. Buralarda farklı bir çok tarımsal ürün üretilir. Bunların bir kısmı bu vilayetlerin kendi içinde tüketilir, bir kısmı da dışarıdan gelen taleplere arzedilir. Ancak, bu üretim-tüketim, arz-talep olaylarında dengeyi sağlayacak tam bir çözüm çoğu zaman yoktur. Ama uygun bir çözümün bulunup uygulanması gerekir. Bu uygun çözüm de, tam çözümü olmayan böyle ekonomik, sosyal ve mühendislik problemlerinde, tam çözüme en yakın olan yaklaşık çözüm olabilir. İşte bu çalışmada, bir ülkenin farklı bölge veya vilayetlerinde üretilen, tüketilen ve arzedilen çeşitli ürünler için, bu bölgeler ve ürünlerle ilgili arz-talep dengesini sağlayan üretim (arz) matrisinin tam veya yaklaşık hesaplama yöntemleri, matematiksel modellemeler ve bilgisayar programları yapılarak verildi.

Anahtar Kelimeler: Üretim, Tüketim, Arz, Talep, Denge Denklemi, Matematiksel Modelleme, Bilgisayar Programlama, Tam Çözümler, Yaklaşık Çözümler.

MODELING OF BALANCED AGRICULTURAL PRODUCTION PLANNING OF ANY COUNTRY

ABSTRACT

A country consists of various provinces or regions. Many different kinds of agricultural products are produced in them. Some of them are consumed in these provinces and some are supplied to outside demands However,in most of time, there is no exact solution that provides balance for such production-consumption and supply-demand cases. On the other hand, an appropriate solution should be found and applied.Such a solution can be the approximate solution which is closest to the exact solution of such economical, social and engineering problems which do not have exact solutions. In this study, for various products which are produced, consumed and supplied in different regions and provinces of a country, exact and approximate calculation procedures of production (supply) matrix, which provides the supply-demand equilibrium related with these regions and products, were given by constructing mathematical models and computer programs.

Keywords: Production, Consumption, Supply, Demand, Equilibrium Equation, Mathematical Modeling, Computer Programming, Exact Solutions, Approximate Solutions.

** Başkent Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Bağlıca-ANKARA, ntanriov@baskent.edu.tr*
** * Başkent Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, Bağlıca-ANKARA, oeren@baskent.edu.tr*

1. GİRİŞ

Bir ülkenin değişik bölgelerinde değişik tarım ürünleri üretilir. Bunların bir kısmı üretildikleri bölgelerde tüketilir, bir kısmı da dış talebi karşılar. Bir ürünün fiyatı iyi olduğunda, ertesi yıl o üründen çok üretilir, bu defa satış fiyatları maliyet fiyatlarının altına bile düşebilir. Bu durumda bazen bu ürünler tarlalarda çürümeye bile bırakılır, üretici zarar eder. Bunun üzerine daha sonraki yıl o üründen çok az üretilir, bu defa da iç veya dış talep karşılanamaz. Bu durumla endüstri ürünlerinde de karşılaşılabilir. Talep fazlası üretilmiş endüstri ürünleri de, ya depolarda bekletilir veya teknolojisi, modası eskidiği için çürümeye bırakılır ya da hurdaya çıkartılır.

İşte bu sorunun çözümü için, üretim-tüketim-talep dengelerini sağlayan; hangi bölgelerde, hangi ürünlerden ne kadar üretilmesi gerektiğinin hesaplanması gerekir.
Bunun için, öncelikle ülkede ekonomi kayıtlı olmalıdır. Kayıtsız ekonomilerde sadece tahminlere göre hareket edilir. O da çoğu zaman dengesizlik problemlerine neden olur. Eğer ekonomide her şey kayıtlı ise bu problem matematiksel olarak, bilgisayarlar yardımı ile kolayca çözülebilir. Çünkü o zaman gerekli veriler, faktörler ve parametreler belirlidir.

Ancak, ekonominin bir kısmı kayıtlı, bir kısmı kayıtsız ise yine de matematiksel ve bilgisayar destekli üretim-tüketim-talep planlamaları ile problemleri yaklaşık olarak çözmek mümkündür. Bu da kaba tahminlerle ve dayanıksız umutlarla hareket etmekten çok daha iyidir.

Bir veya birden çok ürünün üretilmesi, stoklanması, bu ürünlerin piyasaya arzedilmesi, piyasanın bu ürünlere olan talebinin belirlenmesi, arz-talep dengesinin kurulması üzerine bir çok araştırmacı değişik zamanlarda bir çok çalışmalar yapmışlardır (Anton ve Rorres, 1994: 685-697; Buffa ve Sarin, 1987: 142-150; Dinler, 2000: 30, 134; Parasız, 1994: 79, 129, 316). Dengenin sağlanması probleminin bazen tam çözümü olmuştur (Campbell, 1980: 157-305; Kolman ve Hill, 2001: 118-124), bazen yaklaşık çözümü olmuştur (Anton ve Rorres, 1994: 685-697). Her iki halde de, denge denklemleri büyük sistemler vermiş ise, bilgisayar destekli çözüm programlarına ihtiyaç duyulmuş ve bilgisayarlar kullanılmıştır (Anton ve Rorres, 1994: 685-697; Nahapetyan ve Pardalos, 2006; Neill, 2002). Üretim ve talep bir çok parametreye, etkene bağlı olduğundan, denge denkleminin kurulması ve çözülmesi, doğru ve yerinde bir üretim planlaması yapımında ana (temel) yol gösterici olur.

1. KULLANILAN SEMBOLLER VE VARSAYIMLAR

Bir ülkede m vilayet, ve buralarda üretilip tüketilen n farklı ürün olsun.
i : vilayet ya da bölge indisi. $i = 1,2,\ldots\ldots,m$
j : ürün indisi. $j = 1,2,\ldots\ldots.,n$
x_{ij} : j. ürünün i. vilayette yıllık üretilen miktarı (ton). $x_{ij} > 0$

k_{ij} : j. ürünün i. vilayette iç tüketim katsayısı. $0 \leq k_{ij} \leq 1$
t_{ij} : j.ürünün i. vilayetten talep edilen miktarı (ton). $t_{ij} \geq 0$
olsun. Bu durumda,
$[x_{ij}]_{mxn} = X$: ülkenin üretim matrisi
$[t_{ij}] = T$: ülkenin vilayetlerinin talep (ihtiyaç) matrisi
$[k_{ij}] = K$: ülkenin vilayetlerinin iç tüketiminin katsayılar matrisi olur.
İç tüketimin katsayılar matrisindeki terimleri söyle bulunur.

$$k_{ij} = \frac{j.\ \textit{ürünün i. vilayetteki tüketilen miktarı}}{j.\ \textit{ürünün i. vilayetteki üretilen miktarı}} \quad d\imath r.$$

$k_{ij} = \frac{a}{b}$ ise $\frac{100.b}{a} = c$ den k_{ij} = %c olarak alınıp kullanılır.

Eğer j. ürün i. vilayette; üretilmiyorsa $x_{ij} = 0$ alınır, üretilip tüketilmiyorsa $k_{ij} = 0$ alınır, talep edilmiyorsa $t_{ij} = 0$ alınır.

2. DENGE DENKLEMİ

Talep matrisi T'nin t_{ij} terimleri, j. ürünün i. vilayetten (bölgeden) talebini gösterir. Bunlar, bir önceki yılın verilerinden, kayıtlarından ve talep tahminlerinden belirlenebilir. Talep tahminleri tam olursa çözüm o kadar sağlıklı olur, ancak tam olmazsa, talep analizi yöntemleriyle yaklaşık olarak belirlenip kullanılabilir.
Üretim, tüketim ve talep dengesinin sağlanması için,

$$X = K.X + T \tag{1}$$

matris denklemindeki X matrisi kadar üretimin yapılması gerekir. Bu matrisin x_{ij} terimleri, vilayetlerdeki üretilmesi gereken ürün miktarlarını gösterir. Bu denklem,

$$[x_{ij}]_{mxn} = [k_{ij}]_{mxm}.[x_{ij}]_{mxn} + [t_{ij}]_{mxn} \tag{2}$$

formunda olmalıdır. Çünkü, K.X matris çarpımının yapılabilmesi için K matrisi mxm tipinde oluşturulmalıdır. Bu denklemin çözümü olan X = $[x_{ij}]_{mxn}$ matrisinin hesaplanması gerekir. Bu denklemin çözümünde üç durumla karşılaşılır.

3. DENGE DENKLEMİNİN TAM ÇÖZÜMLERİ

1. DURUM

(2) denkleminde m = n ise iki durum olabilir.
a) detA ≠ 0 ise çözüm matrisi $X = (I - K)^{-1}.T$ dir. Bu tam ve tek çözümdür.
b) detA = 0 ise matris çarpımı ve matris eşitliği kullanılarak (2) denkleminden, mxn bilinmeyenli, mxn adet lineer denklemden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir. Bunun çözümü Gauss-Jordan Eleminasyon yöntemiyle bulunur (Maresh, 1991). Parametrelere bağlı sonsuz sayıda çözümler çıkar. $x_{ij} \geq 0$, $x_{ij} \in N$ gibi kısıtlar kullanılarak bu sonsuz çözümden sonlu sayıda çözümler elde edilir. Bunların içinden de, maliyet, kâr gibi faktörler gözönüne alınarak en uygun çözümler belirlenip seçilir. Bunların içinden $\sum x_{ij} = a$ kapasite kısıtına uyan çözüm alınıp kullanılır.

2. DURUM

(2) denkleminde m ≠ n ise, çözüm yine Gauss-Jordan Eleminasyon yöntemiyle araştırılır. Ya tek çözüm vardır veya parametrelere bağlı sonsuz çözümler vardır. Bunlar tam çözümlerdir (Maresh, 1991).

3. DURUM

(2) denkleminin bazen tam çözümü yoktur. Yani sistem tutarsızdır. Bu durumda yaklaşık çözümler araştırılıp bulunur ve bunlar kullanılarak, dengeli üretim planlaması yapılabilir.

4. DENGE DENKLEMİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜMLERİ

(2) denkleminden mxn bilinmeyenli mxn tane denklem elde edilir. Bunlara, ülkenin toplam üretim kapasitesi, sınırı, kısıtı olan

$$\sum_{i,j=1}^{m,n} x_{ij} = a \tag{3}$$

denklemi de eklenirse, sistem (mxn)+1 denklemli bir sistem haline gelir. Bu sistemin genellikle tam çözümü yoktur, yaklaşık çözümü için aşağıdaki yöntem kullanılır.

ART (ALGEBRAIC RECONSTRUCTION TECHNIQUES) YÖNTEMİ

Ülkenin kapasite kısıtı olan $\sum_{i,j=1}^{m,n} x_{ij} = a$ denklemine karşılık gelen hiperdüzleme H_0 diyelim. (2) denkleminden mxn bilinmeyenli mxn adet lineer denklem elde edilir. Bu denklemlerin belirttiği hiper düzlemleri k = 1,2,3,….,mxn olmak üzere H_k ile gösterelim. Bu denklemler,

$$N_1.x_1 + N_2.x_2 + \ldots\ldots + N_{mxn}.x_{mxn} + d = 0$$
$$(N_1, N_2, \ldots\ldots N_{mxn}).(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{mxn}) + d = 0$$
$$N.X + d = 0 \tag{4}$$

formunda olur. Burada, N hiperdüzlemin normali, X herhangi bir noktası, d ise bir sabit sayıdır. (2) sisteminde bunun gibi mxn tane denklem vardır. Uzayda seçilen bir $A(a_1,a_2,\ldots\ldots,a_{mxn})$ noktasının bu düzlem üzerindeki dik izdüşümü,

$$A^* = A - \left(\frac{N.A + d}{N.N}\right).N \tag{5}$$

dir. Yaklaşık çözümler bu dik izdüşümlerden elde edilir. Bu dik izdüşüm noktalarını bulmak için aşağıdaki algoritma kullanılır.

ALGORİTMA

0. Adım : Uzayda rastgele bir $A_0(a_1,a_2,\ldots\ldots,a_{mxn})$ noktası seç.
1. Adım : A_0'ı birinci H_0 düzlemi üzerine (5) formülü ile dik izdüşür ve onu $A_0^{(1)}$ ile göster.
2. Adım : $A_0^{(1)}$ noktasını (5) formülü ile H_1düzlemi üzerine dik izdüşür ve onu $A_1^{(1)}$ ile göster.
3. $A_1^{(1)}$ noktasını H_2 düzlemi üzerinde dik izdüşür ve onu $A_2^{(1)}$ ile göster.

Böyle devam ederek,
((mxn)+1). Adım : $A_{(mxn)-1}^{(1)}$ noktasını H_{mxn} düzlemi üzerine dik izdüşür ve onu $A_{mxn}^{(1)}$ ile göster.
Böylece 1. devir (iterasyon) tamamlanmış olur. Benzer biçimde 2. devir, 3. devir, ..., p. devir yapıldığında bulunan $A_{mxn}^{(p)}$ dik izdüşüm noktasının, tam çözüme yakın bir yaklaşık çözüm olduğu ispatlanmıştır (Rorres ve Anton, 1994: 685-697).
p. devir sayısı ne kadar yüksek olursa bulunan nokta tam çözüme o kadar yakın bir çözüm noktası olur.
Tam çözümü olmayan (tutarsız) lineer denklem sistemlerinde böyle bulunan yaklaşık çözümlerden yararlanılabilir (Nahapetyan ve Pardalos, 2006).
Bu problemde yaklaşık çözüme algoritmanın iteratif olmasından dolayı el ile hesaplama yaparak ulaşmak zor ve zaman alıcıdır. Bu işlemleri dinamik olarak, kolayca ve hatasız hesaplamak önemlidir. Bu yüzden, yaklaşık çözüme ulaşmada kullanılacak algoritma için, MATLAB (R2007b) kullanılarak, bilgisayar programı yazılmıştır. Program; girdi olarak, algoritmamızda belirtilen; denklem sayısını, her

denklemdeki değişken sayısını ve A_0 (uzayda rastgele bir nokta) noktasını almaktadır. Bu girdiler için, program belirlenen iterasyon sayısı kadar devri tamamladığında yaklaşık çözüm noktasını çıktı olarak verecektir. İterasyon sayısı, verilen örnekler için 45 olarak belirlenmiştir. Bu sayı istenildiğinde değiştirilebilir.

Benzer problemler için çalışmak isteyen kişilerin oeren@baskent.edu.tr e-posta adresimize, e-posta göndererek talepte bulunmaları yeterlidir. Bilgisayar yazılımı ve gerekli bilgiler kendilerine iletilecektir.

Aşağıdaki örneklerin, yazılan bilgisayar programı aracılığı ile yaklaşık çözümleri hesaplanmıştır.

1. ÖRNEK

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 2 \\ x - 2y = -2 \end{array}\right\} \text{ sisteminin tam çözümü } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \text{ noktasıdır, ancak,}$$

$$\left.\begin{array}{l} H_1 \ \ldots\ x + y = 2 \\ H_2 \ \ldots\ x - 2y = -2 \\ H_3 \ \ldots\ 3x - y = 3 \end{array}\right\} \text{ sisteminin tam çözümü yoktur.}$$

Şimdi bu sistemin yaklaşık çözümünü ART Yöntemi ile bulalım. Burada,
1. denklemde N=(1,1), d = -2
2. denklemde N=(1,-2), d = 2
3.denklemde N=(3,-1), d = -3 tür. ART yöntemine göre 45. devirde 3. hiperdüzlem üzerindeki yaklaşık çözüm (1,41 ; 1,23) olarak bulunur.

2. ÖRNEK

Bir X = K.X+T matris denkleminden

$x_7+x_8+x_9=13{,}00$	$x_3+x_6+x_9=18{,}00$
$x_4+x_5+x_6=15{,}00$	$x_2+x_5+x_8=12{,}00$
$x_1+x_2+x_3=8{,}00$	$x_1+x_4+x_7=6{,}00$
$x_6+x_8+x_9=14{,}79$	$x_2+x_3+x_6=10{,}51$
$x_3+x_5+x_7=14{,}31$	$x_1+x_5+x_9=16{,}13$
$x_1+x_2+x_4=3{,}81$	$x_4+x_7+x_8=7{,}04$

9 bilinmeyenli ve 12 denklemli bir lineer sistem elde edilsin.
1. denklemde N=(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), d = -13 tür,
2. denklemde N=(0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0), d = -15
3. denklemde N=(1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0), d = -8

4. denklemde N=(0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 1), d = -14,79
5. denklemde N=(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0), d = -14,31
6. denklemde N=(1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0), d = -3,81
7. denklemde N=(0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1), d = -18
8. denklemde N=(0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0), d = -12
9. denklemde N=(1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), d = -6
10. denklemde N=(0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0), d = -10,51
11. denklemde N=(1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1), d = -16,13
12. denklemde N=(0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 1, 0), d = -7,04 olur.

Bu sisteme ART yöntemi uygulanırsa bilgisayarla yapılan 45. devir sonunda, A.=(0, 0, ... , 0) ın H_{12} hiperdüzlemi üzerindeki dik izdüşümünün $A_{12}^{(45)}$=(1,38 ; 0,60 ; 5,33 ; 2,15 ; 7,55 ; 4,59 ; 1,75 ; 3,14 ; 7,38) noktası olduğu görülür. Bu nokta, olmayan tam çözüme en yakın yaklaşık bir çözüm noktasıdır.

3. ÖRNEK

A, B, C ürünleri, D, E, F, G vilayetlerinde üretilsin. Bunların bir kısımları kendi bölgelerinde tüketilsin, bir kısımları da dışarıdan gelen taleplere arzedilsin. Toplam üretim kapasitesi 10000 ve

iç tüketimin katsayılar matrisi : $K=\begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}40 & 0{,}20 & 0{,}10 \\ 0{,}20 & 0{,}30 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}30 & 0{,}80 \\ 0{,}40 & 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}70 \end{bmatrix}$

dış taleplerin matrisi : $T=\begin{bmatrix} 50 & 20 & 60 \\ 30 & 35 & 80 \\ 20 & 40 & 100 \\ 40 & 50 & 90 \end{bmatrix}$

olsun. İç ve dış talebin karşılanabilmesi için bu vilayetlerde bu ürünlerden ne kadar üretilmesi gerektiğini hesaplayalım.

ÇÖZÜM

Üretim matrisi: $X=[x_{ij}]$; iç tüketimin katsayılar matrisi: $K=[k_{ij}]$; dış talebin katsayılar matrisi: $T=[t_{ij}]$ ise denge denklemi

$$X = K \cdot X + T \Rightarrow (I - K)X = T$$

$[x_{ij}]_{4x3} = [k_{ij}]_{4x4} \cdot [x_{ij}]_{4x3} + [t_{ij}]_{4x3} \Rightarrow [\delta_{ij} - k_{ij}]_{4x4} \,.\, [x_{ij}]_{4x3} = [t_{ij}]_{4x3}$

dir. Burada $\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 1, & i = j \text{ ise} \\ 0, & i \neq j \text{ ise} \end{Bmatrix}$ dır.

Bu denge denklemindeki işlemler yapılırsa

$$\begin{bmatrix} 0,5 & -0,4 & -0,2 & -0,1 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 & -0,4 \\ -0,1 & -0,1 & 0,7 & -0,8 \\ -0,4 & -0,5 & -0,6 & 0,3 \end{bmatrix}_{4x4} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{bmatrix}_{4x3} = \begin{bmatrix} 50 & 20 & 60 \\ 30 & 35 & 80 \\ 36 & 40 & 100 \\ 40 & 50 & 90 \end{bmatrix}_{4x3} \Rightarrow$$

$$0,5x_{11} - 0,4x_{21} - 0,2x_{31} - 0,1x_{41} = 50$$
$$0,5x_{12} - 0,4x_{22} - 0,2x_{32} - 0,1x_{42} = 20$$
$$0,5x_{13} - 0,4x_{23} - 0,2x_{33} - 0,1x_{43} = 60$$
$$-0,2x_{11} + 0,7x_{21} - 0,1x_{31} - 0,4x_{41} = 30$$
$$-0,2x_{12} + 0,7x_{22} - 0,1x_{32} - 0,4x_{42} = 35$$
$$-0,2x_{13} + 0,7x_{23} - 0,1x_{33} - 0,4x_{43} = 80$$
$$-0,1x_{11} - 0,1x_{21} + 0,7x_{31} - 0,8x_{41} = 36$$
$$-0,1x_{12} - 0,1x_{22} + 0,7x_{32} - 0,8x_{42} = 40$$
$$-0,1x_{13} - 0,1x_{23} + 0,7x_{33} - 0,8x_{43} = 100$$
$$-0,4x_{11} - 0,5x_{21} - 0,6x_{31} + 0,3x_{41} = 40$$
$$-0,4x_{12} - 0,5x_{22} - 0,6x_{32} + 0,3x_{42} = 50$$
$$-0,4x_{13} - 0,5x_{23} - 0,6x_{33} + 0,3x_{43} = 90$$

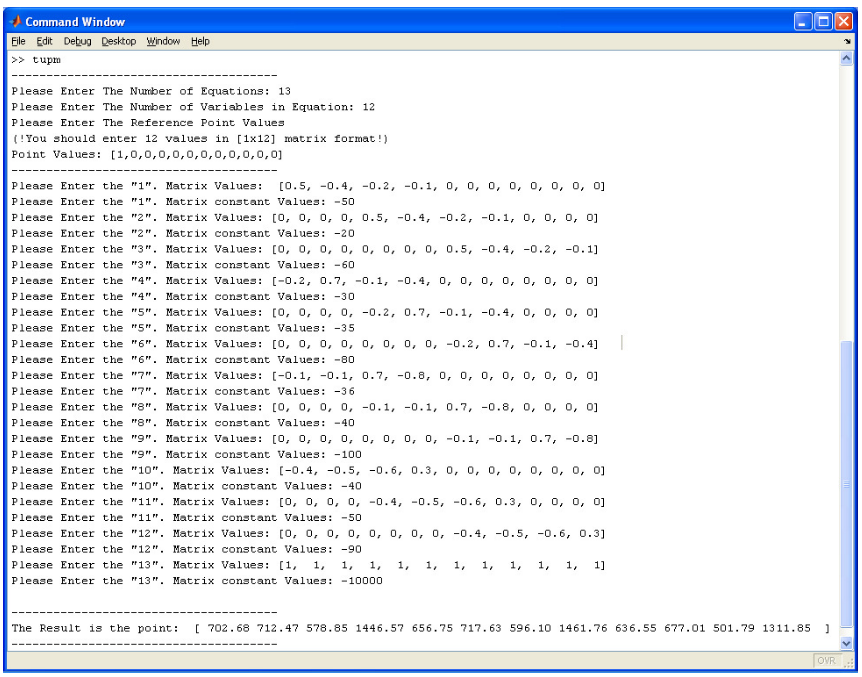
biçiminde 12 denklemli bir sistem elde edilir.
Kapasite kısıtı: $x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 10000$ dir. Böylece sistem, 12 bilinmeyenli, 13 denklemden, yani 13 hiperdüzlemden oluşur. Ya tam çözüm vardır, ya parametrelere bağlı sonsuz çözüm vardır. Bunlar yoksa, yaklaşık çözümler hesaplanabilir.

Bu sistemin yaklaşık bir çözümünü ART yöntemiyle bulalım.
Bu denklemler 13 tane hiperdüzlem belirtir. Bunlara sırayla H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7, H_8, H_9, H_{10}, H_{11}, H_{12}, H_{13} diyelim.

1. denklemde N=(0,5; -0,4; -0,2; -0,1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0), d = -50 dir,
2. denklemde N=(0; 0; 0; 0; 0,5; -0,4; -0,2; -0,1; 0; 0; 0; 0), d = -20
3. denklemde N=(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0,5; -0,4; -0,2; -0,1), d = -60
4. denklemde N=(-0,2; 0,7; -0,1; -0,4; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0), d = -30

5. denklemde N=(0; 0; 0; 0; -0,2; 0,7; -0,1; -0,4; 0; 0; 0; 0), d = -35
6. denklemde N=(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -0,2; 0,7; -0,1; -0,4), d = -80
7. denklemde N=(-0,1; -0,1; 0,7; -0,8; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0), d = -36
8. denklemde N=(0; 0; 0; 0; -0,1; -0,1; 0,7; -0,8; 0; 0; 0; 0), d = -40
9. denklemde N=(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -0,1; -0,1; 0,7; -0,8), d = -100
10. denklemde N=(-0,4; -0,5; -0,6; 0,3; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0), d = -40
11. denklemde N=(0; 0; 0; 0; -0,4; -0,5; -0,6; 0,3; 0; 0; 0; 0), d = -50
12. denklemde N=(0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; -0,4; -0,5; -0,6; 0,3), d = -90
13. denklemde N=(1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1; 1), d = -10000 dir.

Yapılan bilgisayar programı yardımı ile (5) den 45. devirde 13. hiperdüzlem üzerinde dik izdüşüm, yani yaklaşık çözüm hesaplanmıştır. Şekil 1'de program çıktısı gösterilmiştir.


Command Window
File Edit Debug Desktop Window Help

```
>> tupm
--------------------------------------
Please Enter The Number of Equations: 13
Please Enter The Number of Variables in Equation: 12
Please Enter The Reference Point Values
(!You should enter 12 values in [1x12] matrix format!)
Point Values: [1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]
--------------------------------------
Please Enter the "1". Matrix Values:  [0.5, -0.4, -0.2, -0.1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Please Enter the "1". Matrix constant Values: -50
Please Enter the "2". Matrix Values: [0, 0, 0, 0, 0.5, -0.4, -0.2, -0.1, 0, 0, 0, 0]
Please Enter the "2". Matrix constant Values: -20
Please Enter the "3". Matrix Values: [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5, -0.4, -0.2, -0.1]
Please Enter the "3". Matrix constant Values: -60
Please Enter the "4". Matrix Values: [-0.2, 0.7, -0.1, -0.4, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Please Enter the "4". Matrix constant Values: -30
Please Enter the "5". Matrix Values: [0, 0, 0, 0, -0.2, 0.7, -0.1, -0.4, 0, 0, 0, 0]
Please Enter the "5". Matrix constant Values: -35
Please Enter the "6". Matrix Values: [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.2, 0.7, -0.1, -0.4]
Please Enter the "6". Matrix constant Values: -80
Please Enter the "7". Matrix Values: [-0.1, -0.1, 0.7, -0.8, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Please Enter the "7". Matrix constant Values: -36
Please Enter the "8". Matrix Values: [0, 0, 0, 0, -0.1, -0.1, 0.7, -0.8, 0, 0, 0, 0]
Please Enter the "8". Matrix constant Values: -40
Please Enter the "9". Matrix Values: [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.1, -0.1, 0.7, -0.8]
Please Enter the "9". Matrix constant Values: -100
Please Enter the "10". Matrix Values: [-0.4, -0.5, -0.6, 0.3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
Please Enter the "10". Matrix constant Values: -40
Please Enter the "11". Matrix Values: [0, 0, 0, 0, -0.4, -0.5, -0.6, 0.3, 0, 0, 0, 0]
Please Enter the "11". Matrix constant Values: -50
Please Enter the "12". Matrix Values: [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -0.4, -0.5, -0.6, 0.3]
Please Enter the "12". Matrix constant Values: -90
Please Enter the "13". Matrix Values: [1,  1,  1,  1,  1,  1,  1,  1,  1,  1,  1,  1]
Please Enter the "13". Matrix constant Values: -10000

--------------------------------------
The Result is the point:  [ 702.68 712.47 578.85 1446.57 656.75 717.63 596.10 1461.76 636.55 677.01 501.79 1311.85  ]
--------------------------------------
```

OVR

Şekil 1. Programın Ekran Çıktısı

Buna göre yaklaşık çözüm,
(x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{41}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{42}, x_{13}, x_{23}, x_{33}, x_{43}) = (702,68; 712,47; 578,85; 1446,57; 656,75; 717,63; 596,10; 1461,76; 636,55; 677,01; 501,79; 1311,85) olarak bulunur. Yani dengenin sağlanması için üretim matrisi:

$$X=\left[x_{ij}\right]_{4x3}=\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 702,68 & 656,75 & 636,55 \\ 712,47 & 717,63 & 677,01 \\ 578,85 & 596,10 & 501,79 \\ 1446,57 & 1461,76 & 1311,85 \end{bmatrix}$$

olmalıdır. Örneğin x_{43} = 1311,85 ise 4. vilayette, 3. üründen 1311,85 ton üretilmesi gerekir. Yani, C ürününden G vilayetinde 1311,85 ton üretilecek demektir. Daha azı yetmez, fazlası problem çıkarır.
Bu örnekteki ürün sayısı ve vilayet sayısı ne kadar büyük olursa olsun, bu modelleme ve bilgisayar programı ile X denge matrisi kolayca bulunur. 81 vilayetli Türkiye'nin dengeli tarımsal üretim planlaması da bu modellemeye göre kolayca yapılabilir. Yeter ki K ve T matrisindeki istenen veriler belirli olsun.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Burada verilen çözüm modeli, herhangi bir ülke için veya herhangi bir bölge için ya da herhangi bir vilayet için de kullanılabilir. Yani, bir vilayetin kazalarının kendi aralarındaki üretim ve tüketim dengesini sağlamak için hesaplanması gereken X = $[x_{ij}]$ üretim matrisinin bulunmasında da kullanılabilir. Ayrıca, bu yöntem bir ülkede üretilen endüstriyel ürünlerin arz-talep-stok dengesi probleminin çözümünde veya ihtiyaç duyulan hizmet-yetişmiş eleman arz ve taleplerinin dengelenmesi problemlerinin çözümüne de adapte edilebilir. Örneğin, bir ülkede kaç farklı dallardaki mühendise, hangi bölgelerde ne kadar sayıda ihtiyaç var, kaç farklı üniversiteden bu mühendisler ne kadar sayıda yetiştirilmelidir? Ya da, ülkenin farklı vilayetlerinde hangi tip otomobillere ne kadar ihtiyaç var ve bu tip otomobiller, farklı fabrikalarda ne kadar üretilmelidir? Yani, bu çalışmada verilen yöntemler; ülkenin diğer ekonomik ve sosyal alanlardaki dengesizlik problemlerinin çözümlerinde ve dengesizliklerin ortadan kaldırılmasında kullanılabilir. Sadece gerekli ekonomik kayıtların tutulmuş olması ve bu verilere ulaşılabilmesi sağlanmalıdır. Tabii ki hesaplamalardan çıkan sonuçlara göre üretimlerin yapılması için, siyasi iradenin ağırlığını koyması gereklidir.

6. KAYNAKLAR

Anton H., Rorres C., (1994), Elementary Linear Algebra with Applications Version, New York, John Wiley &Sonds, Inc, pp:685-697.

Buffa E. S., Sarin R. K. (1987), Modern Production/Operations Management, New York, John Wiley & Sons, pp:142-150.

Campbell H. G. (1980), Linear Algebra with Applications, , New Jersey, Prentice-Hall Inc., pp: 157, 305.

Dinler Z. (2000), İktisada Giriş, Bursa , Ekin Kitabevi Yayınları, sh:30,134.

Kolman B., Hill D. R. (2001), Introductory Linear Algebra with Applications., New Jersey , Prentice-Hall Inc.Lipsey R. G., Steiner P. O., Purvis D. D., Courant P. N. (1990). Economics, Ninth Edition, pp:189-200, New York, Harper & Row Publishers, pp:118-124.

Maresh S. K. (1991), Linear Systems, New York, John Wiley & Sons Inc.

Nahapetyan A. G., Pardalos P. M. (2006) "A bilinear Reduction Based Algorithm for Solving Capacitated Multi-item Dynamic Pricing Problems" *Computers & Operations Research*.

Neill J. R. (2002) "Production and Productions Functions: Some Implications of a refinement to Process Analysis" *Journal of Economic Behaviour & Organization*, 1492.

Parasız İ. (1994), Mikro Ekonomi Bursa, Ezgi Kitabevi Yayınları, sh: 79, 129, 316.