

DÖNEN BİR HALKASAL BOŞLUKTA BULUNAN MANYETİK AKIŞKANIN KONUM-ZAMANSAL KAOTİK YAPILARI

Erol Kurt*

Gazi Üniversitesi, Teknik Eğitim Fakültesi Elektrik Eğitimi Bölümü,
06500 Beşevler, Ankara

Özet

Bu nümerik çalışmada, belirli Ω açısal hızında dönen ve halkanın iç ve dış yüzeyleri arasında sıcaklık farkı bulunan bir halkasal boşluktaki elektriksel olarak iletken akışkanın homojen bir \mathbf{B} manyetik alan altındaki karmaşık konveksiyon davranışı ele alınmaktadır. Manyetik alan doğrultusunun halka boyunca kapalı bir ilmek oluşturacak şekilde olduğu kabul edilmektedir. Halkanın iç ve dış yüzeylerinin kapalı sınır şartını sağladığı kabul edilmiş olup manyetik akışkan rulolarının, Chandrasekhar Q ve Coriolis sayılarına τ bağlı olarak farklı desenler oluşturduğu gözlenmektedir. Sonlu genlikli çözümlerde, faz uzayının belirli alanlarında konveksiyon rulolarının kararlılığı konum-zamansal kaybolmakta ve akışkan kaotik durumlar sergilemektedir.

Anahtar Kelimeler: Konveksiyon, manyetik alan, dönen halka, kaos

SPATIO-TEMPORAL CHAOTIC STRUCTURES OF A MAGNETIC FLUID IN A ROTATING CYLINDRICAL ANNULUS

Abstract

In this numerical study complex convection behavior of a electrically conducting fluid in an annular space, which rotates with a certain angular velocity Ω and has a temperature difference between the inner and outer surface of the annulus, is considered under a homogeneous magnetic field \mathbf{B} . The direction of magnetic field is assumed to be at the same direction with the annulus and forms a loop over the entire annulus. Inner and outer surfaces of annulus are considered to satisfy rigid boundary conditions and magnetic fluid rolls are observed to form different patterns depending on the Chandrasekhar number Q and Coriolis number τ . At finite amplitude solutions, the stability of convection rolls are lost in a spatio-temporal manner for certain parts of phase space and the fluid exhibits chaotic states.

Key Words: Convection, magnetic field, rotating annulus, chaos

* E-posta: ekurt52tr@hotmail.com

1. Giriş

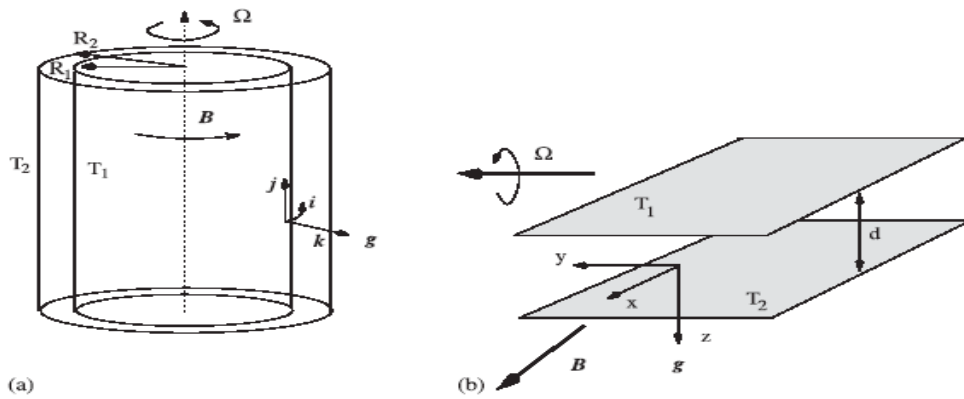
Manyetik alan uygulanan ve altından ısıtılıp üstünden soğutulan dönen akışkan tabakalarda termal etkilerle oluşturulan konveksiyon sistemlerine, yıldızsal ve gezegenel akışkan dinamiği problemlerinde sıklıkla karşılaşılmaktadır. Bu tür problemlerden belki de en fazla rastlanılanı ise dönme ekseninin ve uygulanan manyetik alan doğrultusunun her ikisinin birbirine dik olduğu ve bu ikisinin de yerçekimi vektörüne dik olduğu durumdur [1,2]. Böyle bir düzenlenimde konveksiyonun başlaması için ilk çalışmalar Chandrasekhar tarafından yapılmıştı [3]. Söz konusu çalışmada, manyetik etkinin oluşturduğu Lorentz kuvveti ile açısal dönmenin neden olduğu Coriolis kuvveti, sistemde şaşırtıcı birtakım sonuçlara neden olmuştu. Açıkçası sistemdeki konveksiyon başlangıcının bir göstergesi olan Rayleigh sayısı, manyetik etki ve dönmenin olduğu durumlarda daha düşük değerler almıştı.

Gezegen ve yıldız bilimi uygulamalarında ise yukarıda bahsedilen problem, gök cisimlerinin ekvatorial bölgelerindeki konveksiyon modellemesine karşılık gelmektedir. Çünkü Güneş'in takoklayn tabakasında ve gezegenlerin elektriksel olarak iletken olan korlarındaki toroidal manyetik etkilerin, kutupsal manyetik etkilerden çok daha fazla ölçülmüştür. Diğer yandan bu problem daha genel olarak, birbirine dik bulunan iki fiziksel büyüklüğün etkisinin gözlenmesi için önem taşımaktadır. Zira manyetik kuvvet, akışkan rulolarını manyetik alan doğrultusuna çevirmeye çalışacak, açısal dönme ise bu ruloları dönme eksenine dik olarak çevirmeye eğilimli olacaktır [1,2].

Önceki çalışmalarımızda küçük açısal dönme ve orta dereceli manyetik alan değerlerinde konveksiyon desenlerinin çeşitlilik gösterdiği bulunmuştu [1,2]. Ayrıca deneysel [4,5] bazı çalışmalarda da manyetik alanın olmadığı durumlarda bazı desenlerin bizim teorik yaklaşımımıza uyduğu tespit edilmişti. Bu çalışmada da bu desenlerden kaotik özellik gösterenleri ele almaktayız. Çalışmamızın 2. bölümünde sistemin matematiksel formülasyonu yer alırken doğrusal analiz sonuçları 3. bölümde açıklanmıştır. Diğer bölümde ise zayıf-doğrusal olmayan analiz ve bazı kaotik desenler sunulacaktır. Son bölümde ise potansiyel uygulamalar ve önemli sonuçlara değinilecektir.

2. Matematiksel formalizm ve sayısal metot

Bu çalışmada inceleyeceğimiz sistem Şekil 1'de gösterilmektedir. Bu geometriye göre etkin çekim kuvveti \mathbf{k} birim vektörü yönünde merkezci olup $g = \Omega^2(R_1 + R_2)/2$ ile tanımlanmaktadır. Yukarı ve aşağı sınırlar sırasıyla T_1 ve T_2 sabit sıcaklıklarında tutulmakta olup $T_2 > T_1$ şartı sağlanmaktadır.



Şekil 1) (a) Döner halkasal sistemin şematik gösterimi, (b) Düzlemsel konveksiyona benzetimi.

Akışkan tabakasının kalınlığı olan d uzunluk skalasını, düşey difüzyon zamanı olan $d^2/\kappa = t_\kappa$ zaman skalasını, $(T_2 - T_1)/R$ sıcaklık skalasını ve sisteme uygulanan manyetik alanın oluşturduğu akı yoğunluğu olan B_0 da manyetik alan skalasını vermektedir. Bu durumda hız alanı, ısı iletim ve manyetik indüksiyon denklemleri boyutsuz olarak aşağıdaki şekilde verilmektedir:

$$P^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} + 2\tau \mathbf{j} \times \mathbf{u} = -\nabla \Pi - \mathbf{k} \Theta + \nabla^2 \mathbf{u} + Q \left(\mathbf{i} + \frac{\kappa}{\lambda} \mathbf{b} \right) \cdot \nabla \mathbf{b}, \quad 1(a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad 1(b)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \right) \Theta = -R \mathbf{k} \cdot \mathbf{u} + \nabla^2 \Theta, \quad 1(c)$$

$$\frac{\kappa}{\lambda} \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{b} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{b} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \mathbf{i} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla^2 \mathbf{b}, \quad 1(d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = 0. \quad 1(e)$$

Burada Denklem 1(a)'daki tüm gradiyent terimleri basınç terimi olan $\nabla \Pi$ 'da toplanmıştır. Rayleigh sayısı R , Prandtl sayısı P , Coriolis sayısı τ ve Chandrasekhar sayısı Q sırasıyla,

$$R = \frac{(\alpha(T_2 - T_1)gd^3)}{(\nu\kappa)}, \quad P = \frac{\nu}{\kappa}, \quad \tau = \frac{\Omega d^2}{\nu}, \quad Q = \frac{B_o^2 d^2}{\rho\mu\lambda\nu},$$

ile verilmektedir. Burada sırasıyla α , ν , κ , μ ve λ akışkanın termal genişleme katsayısı, kinematik viskozite, termal difüzyon katsayısı, manyetik alınganlık ve manyetik difüzyon katsayısıdır. En genel formda sistemde bulunan manyetik alan $\mathbf{B} = B_o(\mathbf{i} + \kappa/\lambda \mathbf{b})$ ile verilir. x-y yönündeki birim vektör \mathbf{i} iken κ/λ niceliği sıvı metaller için 10^{-5} mertebesinde. Bu çalışmada, sıvı metal düşünüldüğünden Denklem 1(d)'nin sol tarafındaki terimler kolaylıkla ihmal edilebilir.

Sistemin basitleştirilmesi açısından birim vektörleri \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} olarak alınan Kartezyen koordinat sistemi x , y , z doğrultularında kullanılmaktadır. Sınır şartları,

$$z = \pm \frac{1}{2} \text{ için } u = 0, \quad \Theta = 0, \quad \nabla \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = 0,$$

ile verilmektedir. Önceki çalışmalara [1,2,4,6] benzer şekilde sistem, x - y düzleminde periyodik sınır koşullarını sağlamaktadır. Denklem 1(a)'daki basınç terimi, solenoidal vektör alanlarının, \mathbf{u} ve \mathbf{b} vektörlerine uygulanmasıyla yok edilebilir.

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{k}v) + \nabla \times \mathbf{k}\omega \equiv \bar{\mathbf{u}} + \delta v + \varepsilon \omega,$$

$$\mathbf{b} = \bar{\mathbf{b}} + \nabla \times (\nabla \times \mathbf{k}h) + \nabla \times \mathbf{k}g \equiv \bar{\mathbf{b}} + \delta h + \varepsilon g.$$

Burada üstü çizgili olan nicelikler x - y düzlemindeki ortalama değerleri ifade etmektedir. Sırasıyla, v , h ve w , g kutupsal ve toroidal hız ve manyetik alan bileşenlerini göstermektedir. Diferansiyel operatörler olan δ ve ε 'nin Denklem 1(a)'ya uygulanmasıyla,

$$\nabla^4 \Delta_2 v - 2\tau \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 \omega + \Delta_2 \Theta + Q \mathbf{i} \cdot \nabla \nabla^2 \Delta_2 h = P^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Delta_2 v + \delta \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right], \quad 2(a)$$

$$\nabla^2 \Delta_2 \omega + 2\tau \frac{\partial}{\partial y} \Delta_2 v + Q \mathbf{i} \cdot \nabla \Delta_2 g = P^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial t} \Delta_2 \omega + \varepsilon \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right]. \quad 2(b)$$

elde edilir. Ortalama akış denklemi de,

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \bar{\mathbf{u}} = P^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial t} \bar{\mathbf{u}} - \frac{\partial}{\partial z} \Delta_2 v \left(\nabla_2 \frac{\partial}{\partial z} v + \varepsilon \omega \right) \right). \quad 3$$

şeklinde bulunur. Benzer şekilde δ ve ε Denklem 1(d)'ye uygulandığında,

$$\nabla^2 \Delta_2 h = -i \cdot \nabla \Delta_2 v, \quad 4(a)$$

$$\nabla^2 \Delta_2 g = -i \cdot \nabla \Delta_2 \omega, \quad 4(b)$$

elde edilir. Isı denklemi (Denklem 1(c)),

$$\nabla^2 \Theta + R \Delta_2 v = (\delta v + \epsilon \omega + \bar{u}) \cdot \nabla \Theta + \frac{\partial}{\partial t} \Theta, \quad 5$$

şeklinde yazılır. Manyetik alanın ortalama bozulumu, daha önce bahsedilen manyetik limitten dolayı ortadan kalkmaktadır. Denklem (2-5)'i yazarken *yatay gradiyent* ($\nabla_2 \equiv \nabla - \mathbf{k} \mathbf{k} \cdot \nabla$) ve yatay Laplasiyen ($\Delta_2 \equiv \nabla_2 \cdot \nabla_2$) kullanılmıştır. Yukarıdaki denklemler (Denklem (2-5)) sınır şartları olan

$$z = \pm \frac{1}{2} \quad \text{için} \quad v = \frac{\partial}{\partial z} v = \omega = \Theta = g = 0,$$

göz önüne alınarak çözülür. Denklem 4(a)'da bulunan h ve ilgili sınır şartı ihmal edilebilir zira, Denklem 2(a)'daki $\nabla^2 \Delta_2 h$ ifadesi, Denklem 4(a)'da yer alan $i \cdot \nabla \Delta_2 v$ ifadesi cinsinden yazılabilir. Böylece sonsuza genişleyen sıvı tabakası için yatay gösterim, 2D Fourier serileri halinde elde edilebilir.

Denklem (2-5) için sembolik notasyon,

$$C \frac{d}{dt} \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = L \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) + N(\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) | \mathbf{V}(\mathbf{x}, t)), \quad 6$$

şeklinindedir. Buradaki sembolik vektör $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = (v, w, g, \Theta, \mathbf{u})$, Denklem (2-5)'deki alanları temsil etmektedir. $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \equiv 0$ durumu, sistemin temel durumunu tanımlamaktadır. Operatörler C, L, A ve B doğrusal operatörler olup N kuadratik doğrusal-olmayan terimleri içermektedir. Rayleigh sayısı R ise $L = A + RB$ eşitliğinde yer almaktadır. Sistemin çözümünde Galerkin metodu kullanılmakta ve bu amaçla uygun fonksiyon setleri;

$$v(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m, l=-M}^M v_{lmn}(t) \text{Exp}[i(lq_x x + mq_y y)] f_n(z), \quad 7(a)$$

$$\omega(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m, l=-M}^M \omega_{lmn}(t) \text{Exp}[i(lq_x x + mq_y y)] \sin(n\pi(z + \frac{1}{2})), \quad 7(b)$$

$$g(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m, l=-M}^M g_{lmn}(t) \text{Exp}[i(lq_x x + mq_y y)] \sin(n\pi(z + \frac{1}{2})), \quad 7(c)$$

$$\Theta(x, y, z, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m, l=-M}^M \Theta_{lmn}(t) \text{Exp}[i(lq_x x + mq_y y)] \sin(n\pi(z + \frac{1}{2})), \quad 7(d)$$

$$\bar{u}(z, t) = \sum_{n=1}^N u_n(t) \sin(n\pi(z + \frac{1}{2})), \quad 7(e)$$

şeklinde verilmektedir. Yukarıda kullanılan Chandrasekhar fonksiyonu $f_n(z)$ olup $f_n(\pm 1/2) = \partial/\partial z f_n(\pm 1/2) = 0$ sınır şartını sağlamaktadır [3].

$$f_n(z) = \left\{ n \text{ teksayı ise} \rightarrow \frac{\cosh[\beta_n z]}{\cosh[\beta_n / 2]} - \frac{\cos[\beta_n z]}{\cos[\beta_n / 2]}; \quad n \text{ çiftsayı ise} \rightarrow \frac{\sinh[\beta_n z]}{\sinh[\beta_n / 2]} - \frac{\sin[\beta_n z]}{\sin[\beta_n / 2]} \right\}.$$

Buradaki β_n katsayıları, denklemin kökleri olarak tanımlanır ve belirli değerleri çeşitli referanslarda bulunabilir.

Denklem 7(e)'deki hız ifadelerinin toplamı tüm pozitif n, l, m tamsayıları üzerindedir. Ancak $l=m=0$ durumu ortalama sıcaklık profilinin bozulmasını tanımladığından toplamda yer almasına gerek görülmemiştir. Tüm alanlar için alanların kompleks konjügelere indiserin negatif işaretleri için kendilerine eşit olması söz konusudur. Denklem 7 ile verilen fonksiyonlar, Denklem 2, 3 ve 5'e yerleştirildiğinde $a_{lmn}(t), b_{lmn}(t), c_{lmn}(t)$ ve $u_n(t)$ katsayıları için doğrusal-olmayan diferansiyel denklemler elde edilir. Katsayılar $g_{lmn}(t)$, Denklem 7(b)'ye göre $w_{lmn}(t)$ katsayısı cinsinden ifade edildiğinden,

$$g_{lmn} = \frac{ilq_x \omega_{lmn}(t)}{l^2 q_x^2 + m^2 q_y^2 + n^2 \pi^2},$$

şeklinde baştan yok edilebilir. Denklem 7'deki toplam fonksiyonları, N ve M 'in sonsuza gitmesiyle doğru olarak çözülebilir. Ancak N ve M 'in belirli sayılarından sonra çözümün fazla değişmediği görülür ve problemin daha kısa çözümü için o değer, limit olarak tanımlanabilir. İncelememizde tipik parametreler, $M=N=4$ olarak bulunmuş, bazı hassas veri gerektiren durumlarda $M=N=6$ hali kullanılmıştır. Doğrusal ve doğrusal olmayan kararsızlıklar yukarıdaki kodla bulunurken, herhangi bir parametre seti için sistemin 2D simülasyonunda, Pesch [7] tarafından Rayleigh–Benard (RB) konveksiyonu için kullanılmış olan koddan yola çıkılarak yeni bir kod yazılmıştır. Kod, prensipte Galerkin gösteriminden yola çıkarak yatay çözümleri spektral metotla elde etmektedir. Bu simülasyon kodunda ise kesme parametreleri $M=128$ ve $N=4$ olarak yeterli görülmüştür. Bunu yaparken zaman artırımı, doğrusal terimlere kesin bağlı olarak ve doğrusal-olmayan terimlere de kısmi bağlı olarak gerçekleştirilmiştir.

3. Konveksiyonun başlangıcı

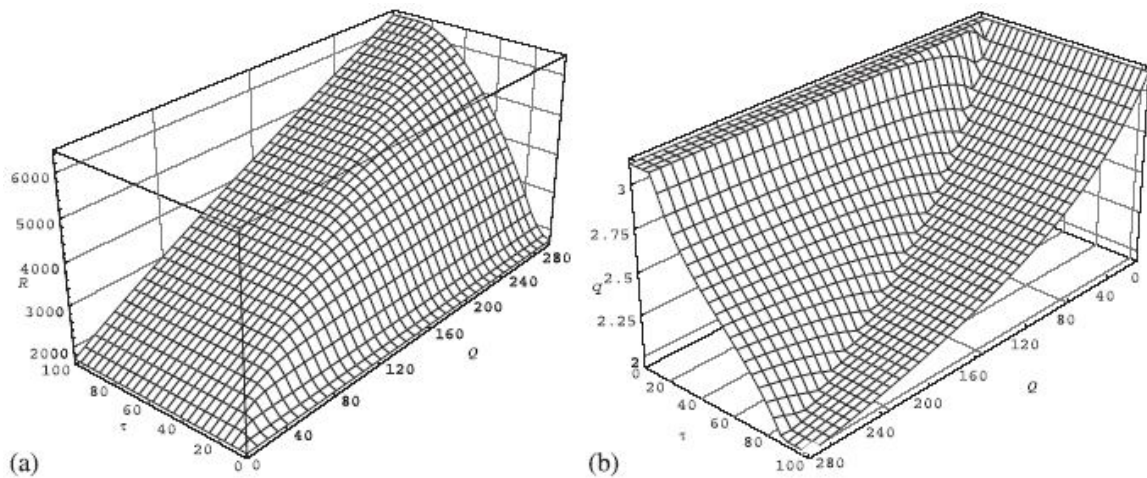
Konveksiyonun başlangıcı için yeter-şart *nötral eğri* olarak da adlandırılan doğrusal kararsızlık çözümleriyle verilmektedir. Temelde, nötral eğrinin tanımlanmasında $V(x,t) \equiv 0$ temel durumu kullanılmaktadır. Bunun için,

$$V(\mathbf{x}, t) = \exp[\sigma t + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}] V_{lin}(\mathbf{q}, z), \quad (8)$$

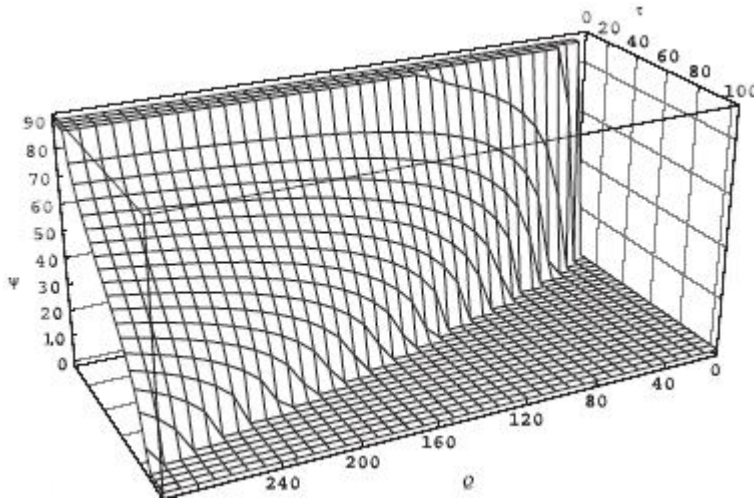
fonksiyonundan hareketle doğrusal özdeğer problemi aşağıdaki gibi belirlenir:

$$\sigma(\mathbf{q}, R) C V_{lin}(\mathbf{q}, z) = (A + RB) V_{lin}(\mathbf{q}, z). \quad (9)$$

Burada dalga vektörü $\mathbf{q}=(q_x, q_y, 0)$ şeklinde tanımlanır. Özdeğerlerin maksimumuna ait olan reel kısmın sıfır olduğu noktalarda her farklı dalga vektörü için nötral eğri tanımlanır. Reel kısmı sıfıra götüren dalga vektörü ise kritik dalga vektörü \mathbf{q}_c olarak adlandırılır. Bu durumda sistemin \mathbf{q}_c için sağladığı Rayleigh sayısı da kritik Rayleigh sayısı olarak kabul edilir ($R_c=R(\mathbf{q}_c)$). Nümerik çalışmalar göstermiştir ki; konveksiyon başlangıcı daima durağan olup maksimum özdeğerin imajiner kısmı sıfırdır. Bu durum Eltayeb'in [8,9] benzer çalışmalarında da bulunmuştu. Bu durumda durağan sınır, Prandtl sayısına P bağlı olmamaktadır. Özdeğer probleminin, matrisler şeklinde gömüldüğü bilgisayar kodunda tüm özdeğerler belirli sıra ile zayıf-doğrusal-olmayan analize aktarılmaktadır. Bu çalışma boyunca dalga vektörü $\mathbf{q}=(q_x, q_y)$ ve ruloların dönme eksenine göre eğim açısı $\psi=\arctan(q_y/q_x)$ ile temsil edilmektedir. Bu noktada ele alınan problem, belirli şartlar altında (yani $\tau = Q = 0$ için) iyi bilinen RB konveksiyonu sınır değeri olan $R^{RB}=1707.76$ değerini vermektedir.



Şekil 2. Coriolis ve Chandrasekhar sayılarının fonksiyonu olarak (a) Kritik Rayleigh sayıları ve (b) Kritik dalga sayıları. $P=10$ alınmıştır.



Şekil 3. Coriolis ve Chandrasekhar sayılarının fonksiyonu olarak kritik dalga vektörü q_c 'nin eğim açıları.

Problemin geometrisi gereği limit durumları ele alırsak, $\tau \gg Q$ durumunda kritik Rayleigh sayısı $R_c(q_c)$, $\psi=0^\circ$ eğim açısında elde edilmektedir. Zira rulolar dönme etkisiyle dik durumda oluşacaktır. Aksi durum olarak $Q \gg \tau$ düşünüldüğünde ise manyetik alan çizgileri doğrultusunda yatay rulolar elde edilecektir. Bu iki limit durum arasındaki parametrelerde ise ruloların simetrisi bozulacak ve eğik desenler oluşturacaklardır.

R_c ve q_c için doğrusal analizden bulunan sonuçlar Şekil 2'de gösterilmiştir. İlk olarak göze çarpan şey, standard RB sisteminden daha yukarı sıcaklıklarda konveksiyonun oluştuğunun saptanmasıdır. Çünkü, Rayleigh sayısı, küçük Q değerleri için doğrusal olarak, küçük τ değerleri için de kuadratik olarak artmaktadır. Kritik dalga vektörü q_c 'nin büyüklüğü ise monotonik olarak RB değeri olan $q_c=3.116$ değerinden azalmaktadır. Dalga vektörünün yönelimine Şekil 3'den bakıldığında ise, her açıda yönelime sahip ruloların sistem tarafından şekillendirildiği görülmektedir.

4. Doğrusal-olmayan analiz

Rulolara dönüşümü sağlayan temel dallanmaların tespiti için standard zayıf doğrusal-olmayan analiz $R=R_c$ komşuluğunda sisteme uygulanmıştır. Denklem 6'da $V=A(\exp[i q_c x] V_{lin}(q_c, z) + k.k) + V_i$ başlangıç fonksiyonunun yerine konulmasıyla zayıf doğrusal-olmayan analize geçiş yapılabilir. Burada, $k.k$ kompleks konjügeyi göstermek üzere, V_i genliğin karesi derecesinde ve ilk terime *ortogonal* olan vektörü tanımlamaktadır.

Denklem 6'nın A 'nın katları şeklinde genişletilip doğrusal vektör V_{lin} üzerine iz düşümünün alınmasıyla standard genlik denklemi elde edilmektedir:

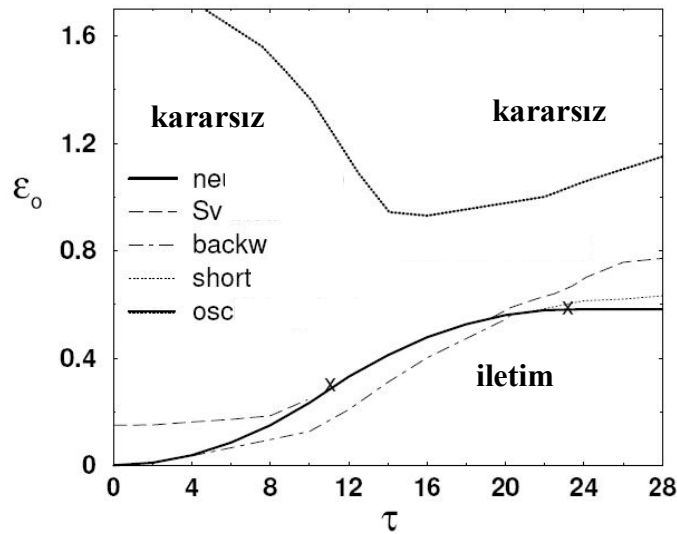
$$\frac{d}{dt} A = (\varepsilon - \varepsilon_c) A - c A^3. \quad (10)$$

Burada $\varepsilon = (R-R_c^{RB}) / R_c^{RB}$ ve $\varepsilon_c = (R_c-R_c^{RB}) / R_c^{RB}$ olarak tanımlanmaktadır. Prandtl sayısının birden büyük değeri için süperkritik ($c > 0$) dallanma tespit edilmiştir. Daha sonra gösterileceği üzere düşük Prandtl sayılarında ($P < 1$) kritik altı dallanmalar gözlenmiştir. Durağan doğrusal-olmayan rulo çözümlerini temsil eden $V_{rulo}(x)$ vektörü belirli bir dalga vektörü q için Denklem 6 kullanılarak Newton-Raphson metoduyla çeşitli genişletme katsayılarının bulunması yoluyla elde edilir. Bu amaçla; Denklem 7'deki genel gösterim m ve l üzerinden olan toplamların yatay rulolar için yok sayılmasıyla basitleştirilebilir. Ancak eğimli rulo çözümleri için $m=l$ durumu düşünülmektedir. Galerkin metoduyla olan hesaplamalara ise bu zayıf doğrusal-olmayan çözümlerin olası ilk değerleri sağlanarak başlanabilir. Ruloların kararlılığının tespitinde ise yine Denklem 6'nın doğrusallaştırılmış formu kullanılarak Galerkin metoduyla rulo başlangıç vektörü $V_{rulo}(x)$ için,

$$V(\mathbf{x}, t) = V_{\text{rulo}}(\mathbf{x}) + \exp[\sigma_n t + i\mathbf{s} \cdot \mathbf{x}] \delta V(\mathbf{x}),$$

kullanılır. Burada, Floquet dalga vektörü $\mathbf{s}=(s_x, s_y, 0)$ şeklinde gösterilir ve pertürbasyon vektörü $\delta V(\mathbf{x})$ rulo ile aynı konumsal periyoda sahip olan ve \mathbf{x} 'e göre periyodiklik gösteren bir fonksiyonu tanımlar. Böylece, nümerik çözümlerden elde edilen veriler aslında R , \mathbf{q} ve \mathbf{s} 'e bağlı olarak bir özdeğer probleminin sonucudur. Dolayısıyla özdeğerin reel kısmının sıfır olması ruloların *ikincil dallanmalarını* tanımlar.

Konveksiyon ruloları için tipik bir kararlılık diyagramı açılal dönme parametresi ve sıcaklık cinsinden Şekil 4'te gösterilmiştir. Temelde sürekli çizgi, sistemde konveksiyonun oluşması için gereken şartı tanımlamaktadır. Küçük dönme τ etkilerinde ruloların ekseninin, manyetik alan çizgileri boyunca yatay sıralandıkları, ancak dönme etkisinin artmasıyla sürekli olarak açılarının artarak en sonunda dikey konuma geldiği tespit edilmiştir.

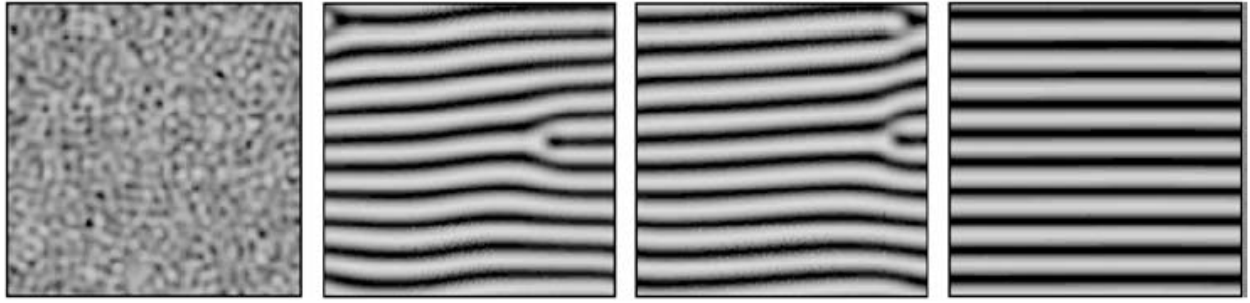


Şekil 4. q_c kritik dalga vektörlü konveksiyon ruloları için kararlılık diyagramı ($Q=54$, $P=0.1$). Uzun dalgaboyu kararsızlığı 'Sv' (bükmümlü-varis), kısa dalgaboylu salınımsız kararsızlıklar 'short', salınımlı kısa dalgaboyu kararsızlıkları ise 'osc' ile gösterilmektedir. Kritik-altı dallanmalar 'backw' kısaltmasıyla, doğrusal analizden elde edilen konveksiyon nötral sınırı ise 'nei' ile gösterilmektedir.

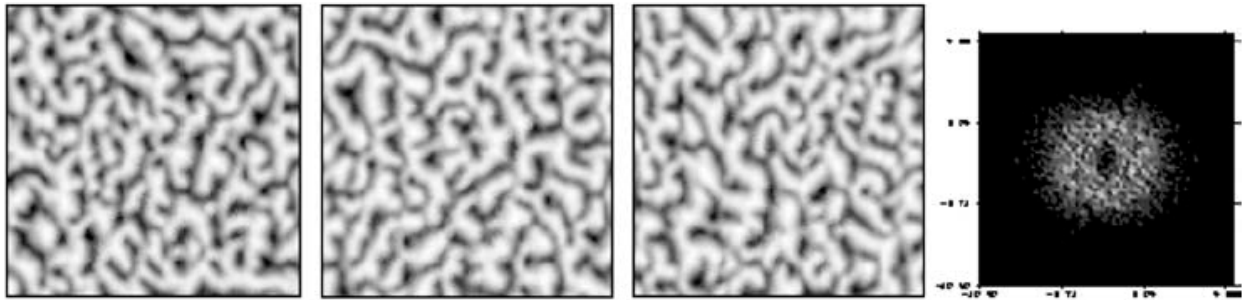
Farklı manyetik alan büyüklükleri için yapılan simülasyonlar göstermiştir ki küçük dönme etkilerinde sistemdeki ikincil kararsızlıklar *uzun dalga* pertürbasyonlarında oluşmaktadır ($|s| \ll |q|$). Ancak yeterli derecede orta ve yüksek dönme parametresinde ise *kısa dalga kararsızlıkları* ($|s| \cong |q|$) gözlenmiş ve bunların sıcaklık gradiyentine bağlı çeşitli versiyonları önceki çalışmamızda vurgulanmıştır [2].

5. Ruloların zaman-bağımlı simülasyonu

Şekil 4'teki gibi dönme parametresine göre yapılan bir kararlılık analizi, yalnızca q_c kritik vektörü için tarama yapıldığından sistemin tüm bilgisini içermez. Ancak temel durumda, sistemin öncelikle kritik dalga vektörüne sahip olan ruloları şekillendirmesi ise fiziksel bir gerçekliktir. Dolayısıyla sistemin genel gösterimi açısından bu türden yapılan kararlılık yaklaşımları sistem hakkında yine de yararlı bilgiler verir. Galerkin metodu yoluyla yapılan kararlılık simülasyonlarında, hem ideal ve rastgele bir rulo deseninden hem de az yoğunluklu gürültü içeren rulolardan başlanabilmektedir. İkinci simülasyon yolunu, genellikle kararlılık analizi yapılan Galerkin kodunun doğrulanması nedeniyle tercih etmekteyiz. Dolayısıyla, bu türden gürültü içeren simülasyonlarda, ruloların gürültü verildiğinde zamana göre hala bozunup bozunmadıkları araştırılmıştır. Eğer sisteme uygulanan gürültü zamana göre üstel olarak azalıyorsa, sistemin o parametrelerde kararlı rulo rejiminde yer aldığı anlaşılır. Şekil 5, bu türden simülasyon sonuçlarını içermektedir. Gürültülü desen, çok geçmeden manyetik alan çizgileri yönünde eksenele sahip olan kararlı rulolar oluşturmakta, rulolar bir kere oluşuktan sonra da onların yönlerinin ve dalga vektörünün değişimi sözkonusu olmamaktadır. Desenlerde beyaz görünümlü kısımlar, ruloların yukarıya çıkan konveksiyon branşını, siyah görünümlü kısımlar ise aşağıya inen konveksiyon branşını göstermektedir.



Şekil 5. Manyetik alanın yüksek değerlerinde gözlenen yatay ruloların sıcaklık alanı. Parametreler, $\varepsilon = 0.81$, $\tau = 3.5$ ve $Q = 14$. Sağdan sola simülasyon zamanları, 0, 14.1, 28.4 ve 110.1'dir.



Şekil 6. Yüksek sıcaklıklarda elde edilen karmaşık hareketli akışkan hücreleri. Parametreler, $\varepsilon = 1$, $\tau = 18$ ve $Q = 14$. Sağdan sola simülasyon zamanları, 8.1, 16.5 ve 24. En sağdaki resim, solundaki desenin güç spektrumunu vermektedir.

Sistemin konum-zamansal kaotik yapısını içeren bir görünüm ise Şekil 6'da verilmiştir. Dikkat edilirse Şekil 5'teki gibi düşük ε değerindeki yapı, sıcaklık gradiyentinin artmasıyla değişmekte ve kararsız, kaotik bir hal almaktadır. Soldan sağa doğru üçüncü resmin dalga sayısı uzayındaki güç spektrumu en sağdaki resimde verilmektedir. Görüldüğü gibi Fourier uzayındaki beyaz dairesel bölge, o anda desende bulunan ruloların dalga sayısı çeşitliliğini vurgulamaktadır. Yani şeklin pek çok dalga vektörü içerdiğini ve konumsal olarak kaotik bir yapı sergilediğini ispatlamaktadır.

İncelediğimiz sistem yukarıdaki desenler yanında daha farklı hareket tiplerini de içermektedir [1,2]. referanslarında çok farklı rulo düzenlenimleri görülebilir. Detaylı incelemeler göstermiştir ki, ruloları kararsızlığa götüren başlıca etmenler, bükümlü-varis, harmonik-altı, zik-zak ve hekza-rulo gibi uzun ve kısa dalgaboyu kararsızlıklarıdır. Dalga vektörüne q , Coriolis sayısına τ ve Chandrasekhar sayısına Q bağlı olarak yukarıda bahsedilen kararsızlardan en az biri sistemdeki ruloları etkileyerek kararlı desenleri konum-zamansal olarak değişime zorlamaktadır.

6. Sonuç

Parametre uzayındaki küçük bir bölümün incelenmesine rağmen, bu manyetohidrodinamik sistemin çok farklı konum-zamansal desenleri içerdiği tespit edilmiştir. Bunda da temel nedenin, birbirine dik bulunan iki fiziksel büyüklüğün yani manyetik alan ve dönmenin ruloların şekillenimi üzerine doğurduğu etkilerdir. Modelimiz, Güneş'in ve diğer büyük gök cisimlerinin ekvatorial bölgelerindeki karmaşık konveksiyon oluşumlarını basitçe açıklayabilmektedir. Ancak modelimizin doğruluğunun en önemli tasdiki, elbetteki iyi düzenlenmiş deneysel konveksiyon sistemleri olacaktır. Geniş bir parametre uzayında yürütülen simülasyonlarda yeterince yüksek sıcaklıklarda ruloların kararlı yapıları kaybolmuş ve kısa ile uzun dalgaboyu kararsızlıkları sonucunda konum-zamansal kaotik sıvı yapıları gözlenmiştir.

Kaynaklar

- [1] E. Kurt, F.H. Busse, W. Pesch, "Hydromagnetic convection in a rotating annulus with an azimuthal magnetic field", *Theo. Comp. Fluid Dynamics*, 18, 251-263, 2004.

- [2] E. Kurt, F.H. Busse, W. Pesch, "Pattern Formation in the Rotating Cylindrical Annulus with an Azimuthal Magnetic Field at low Prandtl Numbers", *J. Vib. Control*, 13, 1321-1330, 2007.
- [3] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*, Oxford Uni. Press, London, 1961.
- [4] M. Auer, F.H. Busse, R.M. Clever, "Three-dimensional convection driven by centrifugal buoyancy", *J. Fluid Mech.*, 301, 371-382, 1995.
- [5] M. Jaletzky, F.H. Busse, "New patterns in centrifugally driven thermal convection", *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 97, 5060-5064, 2000.
- [6] F.H. Busse, M.A. Zaks, O. Brausch, "Centrifugally driven thermal convection at high Prandtl numbers", *Physica D*, 184, 3-20, 2003.
- [7] W. Pesch, "Complex spatiotemporal convection patterns", *Chaos*, 6(3), 348-357, 1996.
- [8] I.A. Eltayeb, "Hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer", *Proc. R. Soc. Lond.*, A326, 229-254, 1972.
- [9] I.A. Eltayeb, "Overstable hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer", *J. Fluid Mech.*, 71(1), 161-179, 1975.