

BİRLİKTE ÇALIŞAN İKİ DÜZLEMSEL ROBOT KOLUN EYLETİMSEL TEKİL DURUMLARI ETRAFINDA DENETİMİ

Bülent Özkan^{1*}, M. Kemal Özgören²

¹ Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu, Savunma Sanayii Araştırma ve Geliştirme Enstitüsü (TÜBİTAK-SAGE), P.K. 16, 06261, Mamak, Ankara

²Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Makina Mühendisliği Bölümü, 06531, Ankara

Özet

Birlikte çalışan robot kollarından oluşan sistemlerde karşılaşılan en önemli sorunlardan biri de *eyletimsel tekil durumlar* (ETD)'dir. ETDler, seçilen eyletimli eklem grubuna bağlı olarak belli konumlarında sistemin dinamik dengede tutulmadığı durumlardır. Bu tip durumlardan kaçınmak için, kullanılmakta olan eyletimli eklem grubu bir diğeriyle değiştirilmeli veya bu gruba fazladan eklemler dahil edilmeli; eğer bahsedilen yöntemlerden hiçbirini uygulama olanağı yoksa, üçüncü bir yol olarak sistemin hareketi ETD'lerle uyumlu olacak şekilde planlanmalıdır. Bu çalışmada, sistemin hareket planlamasının ETDlerle uyumlu olarak yapılabilmesi için bir yöntem önerilmiştir. Ayrıca, örnek olarak alınan özdeş, düzlemsel ve üçer adet döner eklemleri iki robot koldan oluşan bir sistem üzerinde, seçilen bir eyletimli eklem seti kullanılarak yapılan benzetimlerle önerilen yöntem doğrulanmaya çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Birlikte çalışan robotlar, iki robot kollu sistemler, eyletimsel tekil durumlar, eyletimsel tekil durumlar etrafında hareket planlaması, denetim

CONTROL OF TWO COOPERATED ROBOT MANIPULATORS IN THE VICINITY OF THEIR ACTUATOR RELATED SINGULAR CONFIGURATIONS

Abstract

One of the most significant problems encountered in the systems of two coordinated robot manipulators is *actuator related singular configurations* (ASCs). ASCs correspond to the configurations in which the considered system can not be held in its dynamic equilibrium depending on the selected actuated joint set, or actuation set. In order to avoid these undesired positions, either the active actuation set should be changed with another one, or extra joints should be added to the current actuation set, or, as a third manner, the system trajectory should be planned in a way compatible with the ASCs if there is no opportunity to change the valid actuation set. In this study, a method is proposed for the trajectory planning of the system in a way compatible with the ASCs. Also, this approach is tried to be validated using a selected actuation set upon a sample system consisting of two identical planar robot manipulators each of which has three revolute joints.

Keywords: Cooperative robots, systems with two cooperative manipulators, actuator related singular configurations, motion planning in the vicinity of actuator related singular configurations, control

* E-posta: bozkan@sage.tubitak.gov.tr

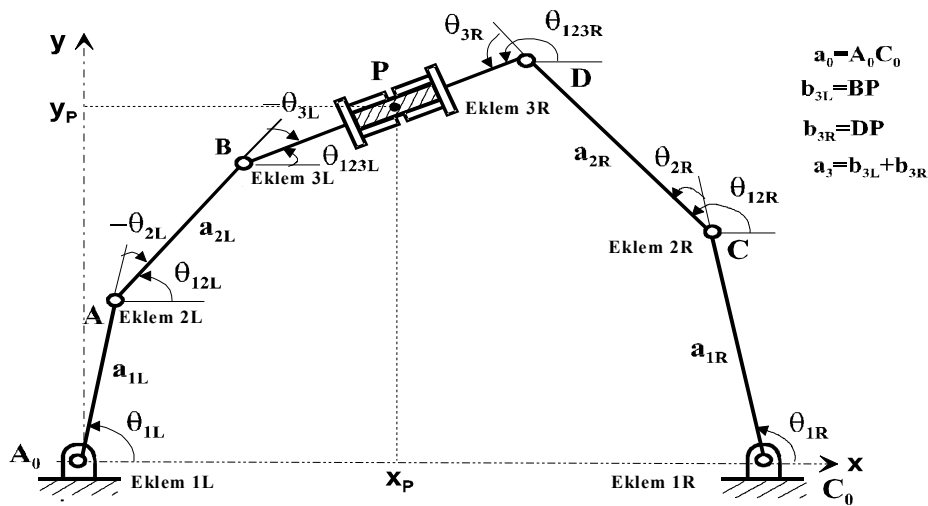
1. Giriş

Birlikte çalışan robot kollarından oluşan sistemler, denetim için gereken en az eklem sayısından daha fazla eklemle sahip olduklarından, taşınan yükün eklemeler arasında daha uygun bir şekilde dağıtılmasına olanak sağlamaktadırlar. Bir başka deyişle, sürücü torkları/kuvvetleri arasında uygun bir yöntem kullanılarak eniyileştirme (optimizasyon) yapıldığında, hareketi önceden planlanan bir işi daha az enerji harcayarak tamamlamaları mümkün olmaktadır [1, 2]. Ayrıca kapalı bir kinematik zincir oluşturdukları için, konumlama hassasiyetleri de oldukça fazladır. Bu nedenle, özellikle ağır yüklerin taşınması ve konumlandırılması işlerinde, paralel manipülatörlere benzemeleri nedeniyle birlikte çalışan robot kollarının kullanımı gündeme gelmektedir [1-6].

Yukarıda da bahsedildiği gibi, birlikte çalışan birden fazla robot koldan oluşan sistemleri denetlemek için mevcut eklemelerin hepsinin eyletilmesi gerekmemektedir. Bu tip konfigürasyonlarda, en az serbestlik derecesine eşit sayıda eklem eyletilmesi yeterlidir. Öte yandan, birden fazla kolun eşzamanlı (senkronize) olarak çalıştırılabilmesi de üzerinde durulması gereken önemli hususlardan birisidir [7]. Özellikle uygun bir denetim yönteminin seçimi büyük önem arz etmektedir [8, 9]. Bunun yanı sıra, en az sayıda (serbestlik derecesi kadar) eklem eyletilmediği bir denetim sürecinde bazı önemli tekil durum sorunlarıyla karşılaşmaktadır [3, 4, 10]. Belirtilen tekil durumlarda sistem üzerindeki denetim kaybolmakta ve önceden planlanan hareket üzerinde değişiklik yapılmadıkça veya o anda kullanılmakta olan eyletimli eklem grubu değiştirilmedikçe ya da eyletimli eklem sayısı artırılmadıkça sistemin dinamik dengesi korunamamaktadır. Bu gibi durumlar *eyletimsel tekil durumlar* (ETD) olarak adlandırılmıştır [4, 5, 6]. ETDler seçilen eyletimli eklem grubuna bağlı olarak ortaya çıktıklarından, kinematik tekil durumlardan (KTD) ayrılmaktadır [5, 11, 12, 13, 14, 15]. Bir başka deyişle; KTDlerde ortaya çıkan eklem hareketi belirsizlikleri belli analitik yöntemlerle giderilebilirken, bu durum ETDler için söz konusu değildir [12, 13].

Bu çalışmada, örnek olarak alınan özdeş, düzlemsel ve üçer adet döner eklem içeren iki robot koldan oluşan bir sistemin planlanan hareketi boyunca ortaya çıkabilecek ETDlerden kaçınmak için uygulanabilecek yöntemlerden kısaca bahsedildikten sonra, kullanılmakta olan eyletimli eklem grubunun değiştirilemediği veya eyletimli eklem sayısının artırılmadığı durumlarda ETDlerden kaçınmak için uygulanabilecek bir yöntem önerilmiştir. Bu yöntemle göre sistemin önceden planlanan hareketi, ETDler etrafında sonsuza giden bilek kuvvet ve momentlerini sonlu sınırlar içinde tutacak şekilde değiştirilmektedir. Böylece, kullanılan eklem grubu değiştirilmeksizin ETDlerden sorunsuzca geçmek mümkün olmaktadır.

2. Birlikte Çalışan İki Düzlemsel Robot Koldan Oluşan Sistem



Şekil 1. Üçer döner eklemli iki düzlemsel robot koldan oluşan sistem

Ele alınan sistem, Şekil 1’de de görüldüğü gibi iki adet üç serbestlik dereceli üç döner eklemlili robot kol ve bu kollar tarafından sıkıca tutulan bir nesnenin oluşmaktadır. Kolların tutucuları ile nesne arasında kayma olmadığı kabul edilirse, sistem; üç serbestlik dereceli bir mekanizma (ya da paralel manipülatör) olarak ele alınabilir. Burada L ve R harfleri, bakış yönüne göre sırasıyla sol ve sağ robot kollarını temsil etmektedir.

3. Problemin Tanıtımı

Buradaki amaç, iki adet özdeş, düzlemsel ve üçer döner eklemlili iki robot koldan oluşan sistemi kullanarak, bir nesneyi önceden belirlenen bir yörünge boyunca bir konumdan başka bir konuma taşımaktır. Belirtilen amacın yol açtığı sorun ise, nesnenin bu hareketi yapabilmesi için robot kolların eklemlerine uygulanması gereken eyletim torklarının bulunmasında ortaya çıkmaktadır. Nesnenin istenen hareketi, nesne üzerindeki bir P noktasının yörüngesi ve nesnenin bu nokta etrafındaki dönüşü ile tanımlanmaktadır. Bir başka deyişle; P noktasının konumu, hızı ve ivmesi ile nesnenin yönelimi, açısal hızı ve açısal ivmesi, zamanın fonksiyonları olarak belirtilmektedir. Bunun üzerine, ters kinematik analiz uygulanarak bu değerlere karşılık gelen eklem konum, hız ve ivmeleri, her bir robot kol için ayrı ayrı bulunmaktadır.

Kinematik analiz tamamlandıktan sonra, sistemin hareket denklemleri uygun bir yöntem kullanılarak türetilmekte ve nihayet eyletim torkları bu hareket denklemlerinden elde edilmektedir.

4. Birlikte Çalışan Düzlemsel ve Üçer Döner Eklemlili İki Robot Koldan Oluşan Sistemin Kinematik Analizi

Yukarıda bahsedildiği gibi eyletim torklarının doğru olarak bulunabilmesi için, nesnenin düzlem içindeki hareketi, yani P noktasının konumu, hızı ve ivmesi ile nesnenin yönelimi, açısal hızı ve açısal ivmesi tam olarak tanımlanmalıdır. Böylece, ters kinematik analiz yoluyla her bir eklem, konumu, hızı ve ivmesi bulunabilir.

Ters kinematik analize ters konum analiziyle başlanır. Robot kolların uç noktalarının P noktasına kadar uzandığı varsayılarak, orijini sol kolun birinci eklemine yerleştirilen sabit eksen takımına göre her bir kolun uç noktasının konum vektörü yazılır. Böylece her bir kolun uç noktasının konumu, o kolun eklem değişkenleri cinsinden ifade edilmiş olur.

P noktasının konum vektörünün yatay ve dikey bileşenleri ile nesnenin yatay düzleme göre yönelimi sırasıyla x_p , y_p ve θ_b ile gösterilirse, j (j = L ve R) kolu için düz kinematik denklemler, Şekil 1’e göre şöyle yazılabilir:

$$a_{1j} \cos \theta_{1j} + a_{2j} \cos \theta_{12j} = x_j \quad (1)$$

$$a_{1j} \sin \theta_{1j} + a_{2j} \sin \theta_{12j} = y_j \quad (2)$$

$$\theta_{123j} = \theta_j \quad (3)$$

Burada şu tanımlar kullanılmıştır: $\theta_{12j} = \theta_{1j} + \theta_{2j}$, $\theta_{123j} = \theta_{12j} + \theta_{3j}$, $x_L = x_p - b_{3L} \cos \theta_b$, $y_L = y_p - b_{3L} \sin \theta_b$, $\theta_L = \theta_b$, $x_R = x_p + b_{3R} \cos \theta_b - a_0$, $y_R = y_p + b_{3R} \sin \theta_b$ ve $\theta_R = \theta_b + \pi$.

(1), (2) ve (3) numaralı denklemler eklem konumları için çözümlerse, aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\theta_{2j} = \sigma_{2j} \operatorname{atan2} \left(\sqrt{1 - c_{2j}^2} \cdot c_{2j} \right) \quad (4)$$

$$\theta_{1j} = \operatorname{atan2}(B_j : A_j) \quad (5)$$

$$\theta_{3j} = \theta_j - (\theta_{1j} + \theta_{2j}) \quad (6)$$

Burada; $\sigma_{2j} = \pm 1$, $c_{2j} = \left[(x_j^2 + y_j^2) - (a_{1j}^2 + a_{2j}^2) \right] / (2a_{1j}a_{2j})$, $A_j = (a_{1j} + a_{2j} \cos \theta_{2j})x_j + (a_{2j} \sin \theta_{2j})y_j$ ve

$B_j = (a_{1j} + a_{2j} \cos \theta_{2j})y_j - (a_{2j} \sin \theta_{2j})x_j$.

(1)’den (3)’e kadar olan denklemlerin zamana göre türevleri alınıp elde edilen ifadeler yeniden düzenlenirse, eklem hızları için aşağıdaki eşitliklere ulaşılır:

$$\dot{\theta}_{1j} = \lambda_{1j} / (a_{1j} \sin \theta_{2j}) \quad (7)$$

$$\dot{\theta}_{2j} = -\lambda_{2j} / (a_{1j} a_{2j} \sin \theta_{2j}) \quad (8)$$

$$\dot{\theta}_{3j} = \lambda_{3j} / (a_{2j} \sin \theta_{2j}) \quad (9)$$

(7)'den (9)'a kadar olan denklemlerde kullanılan tanımlar Ek A'da verilmiş olup, ifadelerin bir kez daha türevleri alınarak eklem ivmeleri de hesaplanır.

5. Sistemin Dinamik Analizi

5.1. Kinematik Kısıtlama Denklemleri

(1), (2) ve (3) numaralı denklemler kullanılarak sistemin konum değişkenleri arasındaki kısıtlama denklemleri aşağıdaki gibi çıkartılabilir:

$$\phi_{1j} = a_{1j} \cos \theta_{1j} + a_{2j} \cos \theta_{12j} - x_j = 0 \quad (10)$$

$$\phi_{2j} = a_{1j} \sin \theta_{1j} + a_{2j} \sin \theta_{12j} - y_j = 0 \quad (11)$$

$$\phi_{3j} = \theta_{123j} - \theta_j = 0 \quad (12)$$

5.2. Enerji Fonksiyonları

Herhangi bir anda sistemin sahip olduğu toplam kinetik ve potansiyel enerji değerleri şunlardır:

$$K = K_{12L} + K_{12R} + K_3 \quad (13)$$

$$U = U_{12L} + U_{12R} + U_3 \quad (14)$$

Burada K ve U harfleri sırasıyla kinetik ve potansiyel enerji değerlerini göstermekte olup, ilgili parametrelerin açık halleri Ek B'de verilmek üzere (13) ve (14) numaralı denklemlerde aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

$$K_{12j} = [I_{1j} (\dot{\theta}_{2j})^2 + I_{2j} \dot{\theta}_{2j}^2] / 2 + I_{12j} (\dot{\theta}_{2j}) \dot{\theta}_{1j} \dot{\theta}_{2j}, \quad K_3 = [m_3 (\dot{x}_p^2 + \dot{y}_p^2) + I_3 \dot{\theta}_b^2] / 2, \quad U_{12j} = G_{1j} \sin \theta_{1j} + G_{12j} \sin \theta_{12j} \quad \text{ve} \\ U_3 = G_3 y_p.$$

Böylece, Lagrange fonksiyonu (L) aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$L = K - U \quad (15)$$

5.3. Sistemin Genelleştirilmiş Kuvvetleri

Sistemin genelleştirilmiş koordinatları, aşağıdaki gibi sütun matrisi biçiminde topluca gösterilebilir:

$$\bar{q} = [q_n]^T = [\theta_{1L} \quad \theta_{2L} \quad \theta_{3L} \quad \theta_{1R} \quad \theta_{2R} \quad \theta_{3R} \quad x_p \quad y_p \quad \theta_b]^T$$

Böylece, sistem üzerine etkiyen dış kuvvet ve momentlerden kaynaklanan genelleştirilmiş kuvvet bileşenleri aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$Q_{ij} = T_{ij} \quad (16)$$

$$Q_x = F_x \quad (17)$$

$$Q_y = F_y \quad (18)$$

$$Q_\theta = M_\theta \quad (19)$$

Burada, i=1, 2 ve 3 değerleri için, T_{ij} ; j kolunun i. eklemine uygulanan sürücü torkunu, F_x , F_y ve M_θ ise, sırasıyla P noktasına etkiyen dış kuvvetler toplamının x ve y bileşenleri ile nesne üzerine etkiyen dış momenti göstermektedir.

Ayrıca, kısıtlama kuvvetlerinden kaynaklanan genelleştirilmiş kuvvet bileşenleri de aşağıdaki denklemden elde edilebilir:

$$Q_n^c = \sum_j \sum_i \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial q_n} \lambda_{ij} \quad (20)$$

Burada λ_{1j} , λ_{2j} ve λ_{3j} , sırasıyla j kolunun bileğindeki etki-tepki kuvvetinin x ve y bileşenleri ile bilekteki etki-tepki momentini göstermektedir. Şekil 1’de sol ve sağ kolun bilek noktaları, sırasıyla B ve D harfleri ile belirtilmiştir.

(20) numaralı denklem, $\Phi_{inj} = \partial \Phi_{ij} / \partial q_n$ tanımı yapılarak genelleştirilmiş koordinatların her biri için aşağıdaki gibi ayrı ayrı yazılabilir:

$$Q_{1j}^c = \Phi_{11j} \lambda_{1j} + \Phi_{21j} \lambda_{2j} + \lambda_{3j} \quad (21)$$

$$Q_{2j}^c = \Phi_{12j} \lambda_{1j} + \Phi_{22j} \lambda_{2j} + \lambda_{3j} \quad (22)$$

$$Q_{3j}^c = \lambda_{3j} \quad (23)$$

$$Q_x^c = -(\lambda_{1L} + \lambda_{1R}) \quad (24)$$

$$Q_y^c = -(\lambda_{2L} + \lambda_{2R}) \quad (25)$$

$$Q_\theta^c = \Phi_{10L} \lambda_{1L} + \Phi_{20L} \lambda_{2L} + \Phi_{10R} \lambda_{1R} + \Phi_{20R} \lambda_{2R} - (\lambda_{3L} + \lambda_{3R}) \quad (26)$$

Yukarıdaki denklemlerde yer alan tanımlar Ek C’de verilmiştir.

5.4. Sistemin Lagrange Denklemleri

Sistemin Lagrange denklemleri, aşağıdaki ifadeden elde edilir:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_n} = Q_n + Q_n^c \quad (27)$$

Yukarıdaki denklemde yer alan terimler açık halde yazılıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra, sistemin Lagrange denklemleri aşağıdaki gibi yeniden düzenlenebilir:

$$M_{1j} = T_{1j} + \Phi_{11j} \lambda_{1j} + \Phi_{21j} \lambda_{2j} + \lambda_{3j} \quad (28)$$

$$M_{2j} = T_{2j} + \Phi_{12j} \lambda_{1j} + \Phi_{22j} \lambda_{2j} + \lambda_{3j} \quad (29)$$

$$0 = T_{3j} + \lambda_{3j} \quad (30)$$

$$F_k = -(\lambda_{kL} + \lambda_{kR}) \quad (31)$$

$$M_3 = \Phi_{10L} \lambda_{1L} + \Phi_{20L} \lambda_{2L} + \Phi_{10R} \lambda_{1R} + \Phi_{20R} \lambda_{2R} - (\lambda_{3L} + \lambda_{3R}) \quad (32)$$

Yukarıda yapılan tanımlar, k=1 ve 2 değerleri için Ek D’de verilmiştir.

(28)’den (32)’ye kadar olan eşitlikler λ_{1j} , λ_{2j} ve λ_{3j} (j=L ve R) terimleri yok edilerek yeniden yazılırsa, sistemin hareket denklemlerini aşağıdaki gibi matris formunda ifade etmek mümkün olur:

$$\bar{R}(\bar{q}, \dot{\bar{q}}, \ddot{\bar{q}}_L) = \hat{E}(\bar{q}) \bar{T}^d \quad (33)$$

Burada \bar{R} sütun matrisi, sistem üzerindeki yerçekimi ve eylemsizlik etkilerini göstermektedir. \bar{T}^d sütun matrisi de , aşağıda belirtildiği gibi eklem torklarından oluşmaktadır.

$$\bar{T}^d = [T_{1L} \quad T_{2L} \quad T_{3L} \quad T_{1R} \quad T_{2R} \quad T_{3R}]^T .$$

Sistemin tork katsayı matrisi ise, A_{ij} ($i=1, 2$ ve 3 ve $j=1$ ve 2) elemanları Ek E'de verilmek üzere aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$\hat{E}(\bar{q}) = \begin{bmatrix} \sin \theta_{2R} & -\sin \theta_{2R} & 0 & A_{11} & -(A_{11} + A_{12}) & A_{12} \\ 0 & \sin \theta_{2R} & -\sin \theta_{2R} & A_{21} & -(A_{21} + A_{22}) & A_{22} \\ 0 & 0 & \sin \theta_{2R} & A_{31} & -(A_{31} + A_{32}) & \sin \theta_{2R} + A_{32} \end{bmatrix}$$

(33) numaralı denklem kullanılarak, seçilen eyletimli eklem grubunu oluşturan eklemlere sistemin planlanan hareketi boyunca uygulanması gereken tork değerleri bulunabilir.

6. Artıksıl Olmayan Eklem Grupları için Sistemin Eyletimsel Tekil Durumları

Burada ele alınan sistemin serbestlik derecesi üç olduğundan, sistemi denetleyebilmek için gerekli en az sayıda eklemden (üç eklemden) oluşan eklem grupları *artıksıl olmayan eklem grupları* olarak adlandırılmaktadır. Sistemin planlanan bir hareketini gerçekleştirebilmek için eyletilen üç ekleme uygulanması gereken eyletim torkları, (33) numaralı denklemden şöyle bulunur: $\hat{E}(\bar{q})$ matrisinin eyletilmeyen üç ekleme karşılık gelen üç kolonu silinerek *indirgenmiş* $\hat{E}'(\bar{q})$ matrisi oluşturulur ve bu matrisin tersi alınarak istenen torklar elde edilir. Ancak, bazı durumlarda $\hat{E}'(\bar{q})$ matrisinin determinanı sıfır olur ve tersi alınamaz. Böyle durumlarda sistemin eklemlerindeki tork ihtiyacı sınırsızca büyür ve fiziksel olarak sistemin dinamik denge halinde tutulması olanaksızlaşır. Bu gibi durumlar, *eyletimsel tekil durumlar (ETDler)* olarak adlandırılır.

Sistemin seçilen bir eyletimli eklem grubu için ETD koşullarını bulabilmek için, öncelikle seçilen eyletimli eklem grubuna karşılık gelen *indirgenmiş tork katsayı matrisi* yukarıda bahsedilen biçimde oluşturulmalıdır. Sistemin toplam serbestlik derecesi 3 olduğundan, seçilen artıksıl olmayan herhangi bir eklem grubuna karşılık gelen indirgenmiş tork katsayı matrisi 3×3 'lük bir kare matris olacaktır. Bu matrisin determinantının sıfıra eşitlenmesi ile de, seçilen eyletimli eklem grubunun ETD koşulları bulunmaktadır. ETD koşulları geometrik olarak yorumlandığında; bu koşulların aslında oldukça basit bazı geometrik ilişkilere karşılık geldiği görülmektedir. Şöyle ki, bir ETD ortaya çıktığında, eyletimsiz eklemler tek bir *ortak normal* üzerinde sıralanmaktadır. Bir başka deyişle; eyletimsiz eklemler hareketin herhangi bir anında tek bir ortak normal üzerinde sıralanırsa, bu durum, kullanılmakta olan eyletimli eklem setinin bir ETD'sidir. Böylece, ortaya çok pratik bir ETD belirleme yöntemi çıkmaktadır. Bu yöntem göre, eyletimsiz eklemlerin bir ortak normal üzerinde olup olmadıklarına bakılarak, tork/kuvvet katsayı matrisine hiç gerek kalmadan, seçilen eyletimli eklem grubunun ETDleri tamamen geometrik olarak belirlenebilir. Bu yöntemin gerektirdiği ortak normal ise şöyle tanımlanır: Eğer eyletimsiz eklemlerin hepsi döner eklemler, bu eklemlerin hepsinin üzerinde sıralandığı doğru ortak normaldir. Eğer eyletimsiz eklemlerden birisi kayar eklem ise, diğer iki eyletimsiz döner eklemin üzerinde sıralandığı ve aynı zamanda kayar eklemin eksenine dik olan doğru ortak normaldir. Eğer eyletimsiz eklemlerden ikisi kayar eklemler, bunların paralel hale gelmiş eksenlerine dik olan ve aynı zamanda diğer eyletimsiz döner eklemi içeren doğru ortak normaldir.

7. Sistemin Eyletimsel Tekil Durumlar Etrafında Denetimi

Sistemin hareketi sırasında ortaya çıkan ETDlerden kaçınmak için aşağıdaki yöntemlerden biri uygulanabilir:

- i. Sistemin denetimi için serbestlik derecesinden fazla sayıda eklem kullanmak.
- ii. Kullanılmakta olan eyletimli eklem grubunu, ETD etrafında aynı ETD'ye neden olmayacak bir başka eyletimli eklem grubuyla değiştirmek.
- iii. Sistemin hareketini ETDlerle uyumlu olacak şekilde yeniden planlamak.

Yukarıda bahsedilen yöntemlerin uygun bir eniyileştirme yöntemiyle birlikte uygulanması tercih edilebilir. İlk iki yöntem planlanan hareket üzerinde herhangi bir değişiklik yapmadan uygulanabilir. Eniyileştirme, birinci yöntemde fazladan eklenecek eyletimli eklemi; ikinci yöntemde ise kullanılacak yeni eyletimli eklem grubunu belirlemek amacıyla yapılabilir.

Öte yandan, eğer fazladan eklem kullanma veya karşılaşılan ETD etrafında başka bir eklem grubuna geçiş yapma olanağı yoksa, söz konusu ETD'den kaçınmanın tek yolu planlanan hareketin o ETD'ye uygun bir biçimde yerel olarak değiştirilmesidir. Bu değişikliğin ne şekilde yapılabileceğini anlamak için, sistemin L12-R1 eklem grubuyla denetlendiği durumu göz önüne alalım. Ayrıca, sistem üzerine herhangi bir dış kuvvet ve/veya momentin

etkimeğini kabul edelim. Böylece, $T_{3L}=T_{2R}=T_{3R}=0$ yazarak, (28)'den (32)'ye kadar olan Lagrange denklemleri L12-R1 eklem grubu için aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$M_{1L} = T_{1L} + \Phi_{11L} \lambda_{1L} + \Phi_{21L} \lambda_{2L} \quad (34)$$

$$M_{2L} = T_{2L} + \Phi_{12L} \lambda_{1L} + \Phi_{22L} \lambda_{2L} \quad (35)$$

$$M_{1R} = T_{1R} + \Phi_{11R} \lambda_{1R} + \Phi_{21R} \lambda_{2R} \quad (36)$$

$$M_{2R} = \Phi_{12R} \lambda_{1R} + \Phi_{22R} \lambda_{2R} \quad (37)$$

$$F_1 = -(\lambda_{1L} + \lambda_{1R}) \quad (38)$$

$$F_2 = -(\lambda_{2L} + \lambda_{2R}) \quad (39)$$

$$M_3 = \Phi_{10L} \lambda_{1L} + \Phi_{20L} \lambda_{2L} + \Phi_{10R} \lambda_{1R} + \Phi_{20R} \lambda_{2R} \quad (40)$$

(38) ve (39) numaralı denklemler kullanılarak, sol kolun bilek kuvvetleri λ_{1L} ve λ_{2L} , sağ kolun bilek kuvvetleri λ_{1R} ve λ_{2R} cinsinden aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$\lambda_{1L} = -(\lambda_{1R} + F_1) \quad (41)$$

$$\lambda_{2L} = -(\lambda_{2R} + F_2) \quad (42)$$

(41) ve (42) numaralı denklemler (40) numaralı denklemde yerine yazılıp ortaya çıkan denklem (37) numaralı denklemle beraber λ_{1R} ve λ_{2R} için çözümlerse, $\sin\theta_{3R} \neq 0$ olması koşuluyla aşağıdaki denklemler elde edilir:

$$\lambda_{1R} = -F_{2R} \sin \theta_{12R} + \frac{(F_{2R} \cos \theta_{3R} - F_3) \cos \theta_{12R}}{\sin \theta_{3R}} \quad (43)$$

$$\lambda_{2R} = F_{2R} \cos \theta_{12R} + \frac{(F_{2R} \cos \theta_{3R} - F_3) \sin \theta_{12R}}{\sin \theta_{3R}} \quad (44)$$

Burada şu tanımlar yapılmıştır: $F_{2R} = M_{2R} / a_{2R}$ ve $F_3 = [I_3 \ddot{\theta}_b + m_3 \ddot{x}_p a_3 \sin \theta_b + (m_3 \ddot{y}_p + G_3) a_3 \cos \theta_b] / a_3$.

Sistemin L12-R1 eklem grubu kullanılarak denetlenmesi sırasında ortaya çıkan eyletimsel tekil durumlarda $\sin\theta_{3R}=0$ koşulu sağlanır ve (43) ve (44) numaralı denklemlerden de görüleceği gibi bilek kuvveti bileşenleri λ_{1R} ve λ_{2R} 'nin değerleri sonsuza gider. Bu yüzden sistemin ETDler etrafındaki hareketi, λ_{1R} ve λ_{2R} değerleri sonlu sınırlar içinde kalacak şekilde planlanmalıdır. Burada, $\sin\theta_{3R}$ 'nin λ_{1R} ve λ_{2R} üzerindeki etkisini ortadan kaldıracak şekilde aşağıdaki gibi bir F_0 fonksiyonunun tanımlanması oldukça uygun olur:

$$F_0 = (F_{2R} \cos \theta_{3R} - F_3) / \sin \theta_{3R} \quad (45)$$

(45) numaralı denklem, müteakip şekilde de ifade edilebilir:

$$F_{2R} \cos \theta_{3R} - F_3 = F_0 \sin \theta_{3R} \quad (46)$$

(46) numaralı denklem (43) ve (44) numaralı denklemlerde yerine yazılırsa, λ_{1R} ve λ_{2R} için aşağıdaki eşitlikler bulunur:

$$\lambda_{1R} = -F_{2R} \sin \theta_{12R} + F_0 \cos \theta_{12R} \quad (47)$$

$$\lambda_{2R} = F_{2R} \cos \theta_{12R} + F_0 \sin \theta_{12R} \quad (48)$$

(47) ve (48) numaralı denklemlerden görüldüğü gibi, uygun bir F_0 fonksiyonu seçerek $\sin\theta_{3R}=0$ olması durumunda bile λ_{1R} ve λ_{2R} için sonlu değerler bulmak mümkündür. Bir başka deyişle λ_{1R} ve λ_{2R} , $\sin\theta_{3R}$ değerinden bağımsız olarak elde edilebilir. Böylelikle problem, F_0 fonksiyonunun uygun bir şekilde seçilmesine indirgenmiş olur.

F_{2R} ve F_3 fonksiyonlarının (44) numaralı denklemde verilen tanımları kullanılarak, (46) numaralı denklem, sağ kolun eklem ivmeleri cinsinden aşağıdaki şekilde yeniden yazılabilir:

$$K_{1R} \ddot{\theta}_{1R} + K_{2R} \ddot{\theta}_{2R} + K_{3R} \ddot{\theta}_{3R} + K_0 = a_{2R} a_3 F_0 \sin \theta_{3R} \quad (49)$$

Burada yapılan tanımlar Ek F'de verilmiştir.

Tanımlanmış bir F_0 fonksiyonu için (49) numaralı denklem, ETDler civarında geçerli olmak üzere eklem ivmeleri $\ddot{\theta}_{iR}$ 'ler arasında bir kısıtlama denklemi ortaya koyar. Bu nedenle ETDler etrafında, eklem ivmelerinin önceden belirlenen değerlerinden sapmalar ortaya çıkar. Bu sapmalar da, nesnenin önceden planlanan yörüngesinin ETDler etrafında değişikliğe uğramasına neden olur. İfade edilen değişikliğin belirlenen bir sınır içinde tutulabilmesi için, F_0 fonksiyonu uygun bir şekilde seçilmelidir.

Önceden belirlenen değerlerinden olan sapmaları da göz önüne alarak, eklem ivmelerinin ETDler etrafındaki değerleri için aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$\ddot{\theta}_{iR} = \alpha_{iR} + \hat{\alpha}_{iR} \quad (50)$$

Burada, $i=1, 2$ ve 3 değerleri için α_{iR} uygun bir denetim kuralına göre elde edilen komut ivmesini, $\hat{\alpha}_{iR}$ ise ETD etrafında α_{iR} değerinden olan sapmayı göstermektedir.

(50) numaralı denklem (49) numaralı denklemde yerine yazılırsa, eklem ivmelerinin belirlenen değerlerinden olan sapmaları arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı ortaya çıkar:

$$K_{1R} \hat{\alpha}_{1R} + K_{2R} \hat{\alpha}_{2R} + K_{3R} \hat{\alpha}_{3R} = E_0 \quad (51)$$

Yukarıdaki denklemde E_0 ; $E_0 = a_{2R} a_3 F_0 \sin \theta_{3R} - (K_{1R} \alpha_{1R} + K_{2R} \alpha_{2R} + K_{3R} \alpha_{3R} + K_0)$ şeklinde tanımlanmıştır. Sistemin planlanan hareketinden olan sapmanın olabildiğince az olması için, $\hat{\alpha}_{iR}$ sapma değerleri mümkün olduğunca enküçükleştirilmelidir (minimize edilmelidir). Bu da, aşağıdaki gibi bir performans indeksini enküçükleştirerek yapılabilir:

$$J_d = (\bar{\alpha}_R^T \hat{W}_R \bar{\alpha}_R) / 2 \quad (52)$$

Burada, \hat{W}_R pozitif tanımlı bir ağırlık matrisi olmak üzere, aşağıdaki tanımlar yapılmıştır:

$$\bar{\alpha}_R = [\hat{\alpha}_{1R} \quad \hat{\alpha}_{2R} \quad \hat{\alpha}_{3R}]^T \text{ ve } \hat{W}_R = \begin{bmatrix} w_{1R} & 0 & 0 \\ 0 & w_{2R} & 0 \\ 0 & 0 & w_{3R} \end{bmatrix}.$$

(51) numaralı denklem yeniden düzenlenerek, $\hat{\alpha}_{iR}$ 'ler arasındaki kısıtlama denklemleri aşağıdaki gibi yeniden yazılabilir:

$$G = K_{1R} \hat{\alpha}_{1R} + K_{2R} \hat{\alpha}_{2R} + K_{3R} \hat{\alpha}_{3R} - E_0 = 0 \quad (53)$$

(52) ve (53) numaralı denklemler Lagrange çarpanı λ kullanılarak birleştirilirse, genişletilmiş performans indeksi J'_d aşağıdaki şekilde oluşturulabilir:

$$J'_d = (\bar{\alpha}_R^T \hat{W}_R \bar{\alpha}_R) / 2 - \lambda G \quad (54)$$

(54) numaralı denklem daha açık bir şekilde şöyle de yazılabilir:

$$J'_d = (w_{1R} \hat{\alpha}_{1R}^2 + w_{2R} \hat{\alpha}_{2R}^2 + w_{3R} \hat{\alpha}_{3R}^2) / 2 - \lambda (K_{1R} \hat{\alpha}_{1R} + K_{2R} \hat{\alpha}_{2R} + K_{3R} \hat{\alpha}_{3R} - E_0) \quad (55)$$

(55) numaralı denklemden, J_d 'nin $\hat{\alpha}_{iR}$ 'ler ve λ parametresine göre kısmi türevleri ayrı ayrı alınarak sıfıra eşitlenir ve ortaya çıkan denklemler $\hat{\alpha}_{iR}$ 'ler ve λ için çözülürse, $\hat{\alpha}_{iR}$ 'ler için eniyileştirilmiş bir çözüm seti elde edilir. Ara işlemler yapıldığında, sonuç olarak $\hat{\alpha}_{iR}$ değerleri için eniyi çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\hat{\alpha}_{iR} = \frac{v_{iR} K_{iR} E_0}{v_{iR} K_{iR}^2 + v_{2R} K_{2R}^2 + v_{3R} K_{3R}^2} \quad (56)$$

Burada, $i=1, 2$ ve 3 değerleri için $v_{1R} = w_{2R} w_{3R}$, $v_{2R} = w_{1R} w_{3R}$ ve $v_{3R} = w_{1R} w_{2R}$ tanımları yapılmıştır.

Uygulamada belirlenen ivme değerlerinden sapma görülmemesi için, E_0 fonksiyonunun değeri sıfıra eşit olmalıdır. Bu da, F_0 fonksiyonunun aşağıdaki gibi seçilmesiyle sağlanabilir:

$$F_0 = H_0 / (a_{2R} a_3 \sin \theta_{3R}) \quad (57)$$

Burada; $H_0 = K_{1R} \alpha_{1R} + K_{2R} \alpha_{2R} + K_{3R} \alpha_{3R} + K_0$.

(57) numaralı denklemden $\sin \theta_{3R}$ sıfıra yaklaşırken, F_0 değeri hızla büyür. Bu nedenle, $\sin \theta_{3R}=0$ olması durumunda bile F_0 fonksiyonunun sonlu bir değer alabilmesi için, F_0 fonksiyonu yeniden tanımlanmalıdır. Böylelikle, $|\sin \theta_{3R}| < \varepsilon$ koşulunu sağlayacak şekilde F_0 aşağıdaki gibi seçilebilir:

$$F_0 = \frac{H_0 z}{a_{2R} a_3 (z^2 + z_0^2)} \quad (58)$$

Burada ε ; ETD etrafında ETD uyumlu denetimin uygulanacağı bölgenin büyüklüğünü belirleyen ve sıfıra yakın bir parametredir. Diğer değişkenler z ve z_0 ise şöyle tanımlanmıştır: $z = \sin \theta_{3R}$ ve $z_0 = H_0 / (2a_{2R} a_3 F_0^*)$.

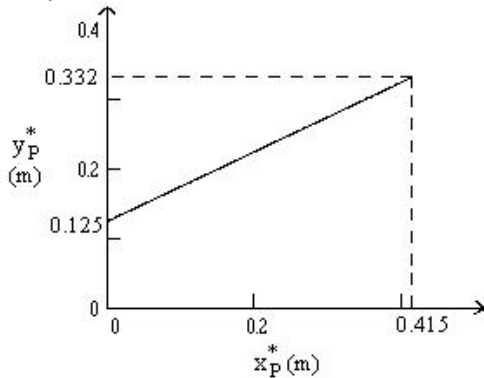
Yukarıdaki ifadede F_0^* , $|F_0|$ 'in doygunluk değeridir. Bir başka deyişle F_0^* ; $|F_0|$ 'in alabileceği sonlu değerler içinde en büyük olanıdır. F_0^* 'in seçimi, eyletici kısıtlamalarının izin verdiği ölçüde tasarım kısıtlarına bağlı olarak belirlenir.

8. Örnek Sistem Üzerinde Yapılan Benzetimler

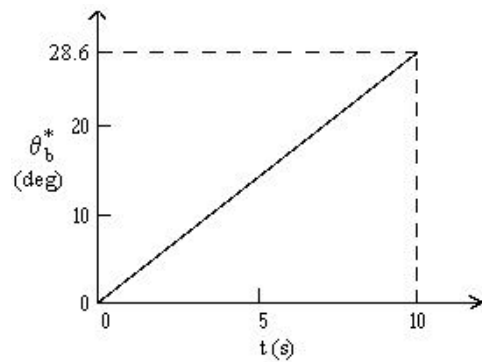
Örnek benzetimlerde kullanılan birlikte çalışan düzlemsel iki 3D robot kolundan oluşan sistemin uzuvları için boyut ve kütlelerinin sayısal değerleri aşağıdaki gibi seçilmiştir:

$a_0=0.5$ m, $a_{1L}=a_{1R}=0.25$ m, $a_{2L}=a_{2R}=b_{3L}=b_{3R}=0.2$ m, $a_3=b_{3L}+b_{3R}$, $m_{1L}=m_{1R}=0.5$ kg, $m_{2L}=m_{2R}=0.4$ kg ve $m_3=0.6$ kg.

Nesne üzerindeki P noktasının hareket boyunca x-y düzleminde izleyeceği yol Şekil 2'de gösterildiği gibi belirlenmiştir. Ayrıca, hareket boyunca nesnenin P noktası etrafındaki yöneliminin değişimi de Şekil 3'teki gibi planlanmıştır.



Şekil 2. Robot kolların taşıdığı nesne üzerindeki P noktasının yapması istenen ötelenme hareketi



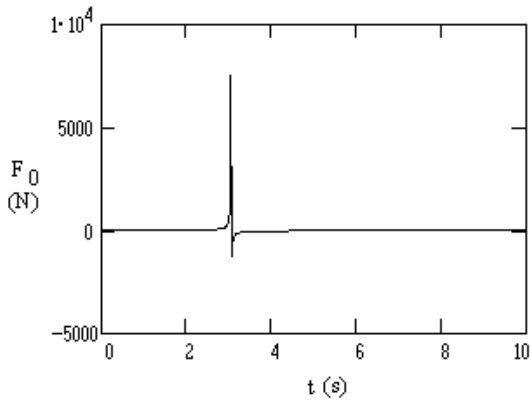
Şekil 3. Robot kolların taşıdığı nesnenin yapması istenen dönme hareketi

Hareket boyunca P noktasının hızının x ve y bileşenleri ile nesnenin açısal hızı sabit olarak alınmış ve şu sayısal değerler kullanılmıştır: $\dot{x}_p^* = 0.0416 \text{ m/s}$, $\dot{y}_p^* = 0.0208 \text{ m/s}$ ve $\dot{\theta}_b^* = 0.05 \text{ rad/s}$.

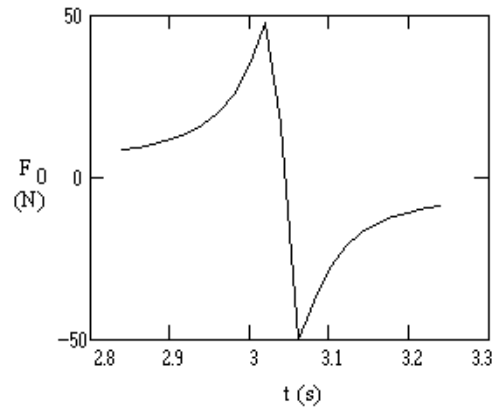
Yukarıda belirtilen değerler kullanılarak, ters konum, hız ve ivme analizleri ile sistemdeki eklemlerin istenen konum, hız ve ivme değerleri bulunur. Ayrıca sistemin başlangıç konumu da gözönüne alınarak, sistemin yukarıda belirlenen konum, hız ve ivme değerlerine ulaşabilmesi için uygulanması gereken komut ivmeleri de uygun bir denetim kuralı uygulanarak elde edilebilir. Buradaki benzetimlerde, komut ivmeleri; PD (oransal+türevsel) denetim kuralına göre oluşturulmuştur. Ayrıca benzetimlerde, sistemin yukarıda planlanan hareketini tamamlaması için gereken süre 10 s olarak alınmıştır.

Şekil 2 ve 3'teki x_p^* , y_p^* ve θ_b^* sembolleri, sırasıyla x_p , y_p ve θ_b 'nin nominal veya istenen değerlerini göstermektedir.

Yukarıda planlanan hareket boyunca, sistem L12-R1 eklem grubu kullanılarak denetlenmiştir. Hareketin 3.04'üncü saniyesinde, sistemin bir ETD'si ortaya çıkmaktadır. Bu durumda, kullanılmakta olan eklem grubu veya sistemin önceden planlanan hareketi değiştirilmedikçe eyletimli eklemlere uygulanması gereken tork değerleri sonsuza gitmekte ve sistemin dinamik dengede tutulması olanaksızlaşmaktadır. Aynı zamanda bu ETD etrafında, karşılık gelen F_0 fonksiyonunun değeri de Şekil 4'ten de görüleceği gibi sınırsızca büyümektedir. Bu nedenle, eklemlere uygulanacak torkların sonlu sınırlar içinde tutulabilmesi için, ETD civarında, (58) numaralı denkleme göre Şekil 5'teki gibi yeni bir F_0 fonksiyonu tanımlanabilir.

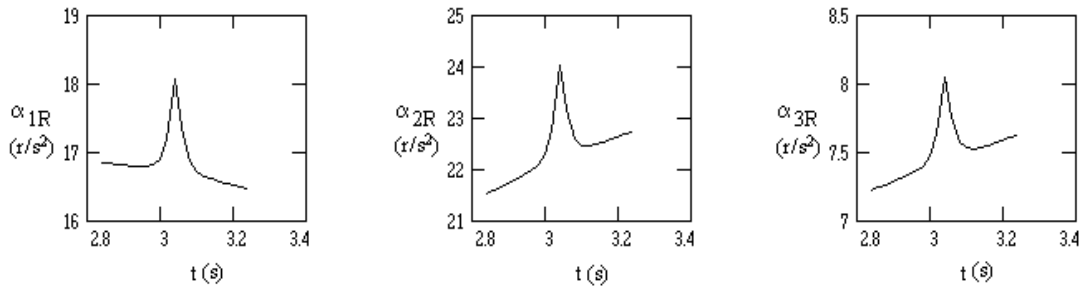


Şekil 4. L12-R1 eklem grubuna ait F_0 fonksiyonu



Şekil 5. L12-R1 eklem grubuna ait ETD etrafında tanımlanan yeni F_0 fonksiyonu

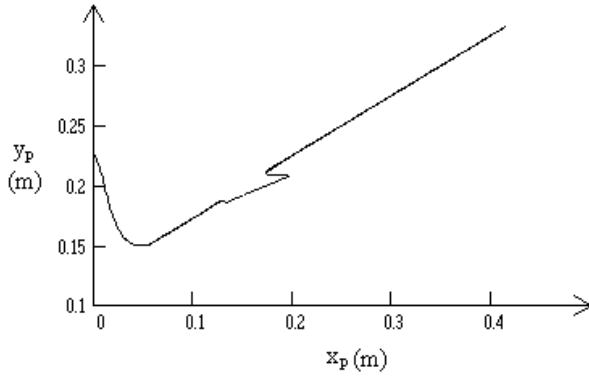
Burada F_0^* ; bir başka deyişle F_0 fonksiyonunun doygunluk değeri 50 N olarak alınmıştır. Böylece, (58) numaralı denklemden bu seçilen F_0 değerine karşılık gelen ETD komşuluğu $2.84 \leq t \leq 3.24 \text{ s}$ olarak belirlenir. \hat{W}_R ağırlık matrisi de birim matris olarak alınır, sapmalar da gözönüne alınarak, ele alınan ETD komşuluğunda eklemlere uygulanması gereken ivme değerleri Şekil 6'da görüldüğü gibi bulunur.



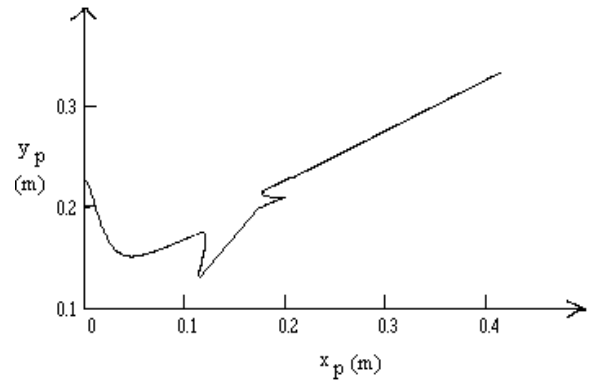
Şekil 6. L12-R1 eklem grubunun eklemlerine $2.84 \leq t \leq 3.24 \text{ s}$ ETD komşuluğu boyunca uygulanması gereken ivme değerleri

Ayrıca bulunan eklem ivmelerinin sıralı integralleri alınarak, ETD etrafındaki eklem hızları ve konumları da bulunabilir. Böylece, robot kollar tarafından sıkıca tutulan nesne üzerindeki P noktasının değiştirilmiş yörüngesi Şekil 7'deki gibi ortaya çıkar. Sistemin yukarıdaki değiştirilmiş yörünge boyunca hareketi gözönüne alındığında, hareket boyunca toplam enerji tüketimi 15.579 J olarak gerçekleşir.

Diğer taraftan, ETD komşuluğu büyütüldüğünde, sürücü torkların değerlerinin ve dolayısıyla sistemin toplam enerji tüketiminin düştüğü, buna karşılık sistemin istenen hareket yörüngesinden olan sapmaların arttığı görülür. Bu durumu daha iyi anlatmak için, yeni ETD komşuluğu $2.64 \leq t \leq 3.44$ s olarak tanımlanmış olsun. Bu durumda P noktasının değiştirilmiş yörüngesi Şekil 8'deki gibi ortaya çıkmaktadır. Ele alınan bu ikinci durum için de sistemin toplam enerji tüketimi 13.296 J olarak hesaplanmıştır.



Şekil 7. $2.84 \leq t \leq 3.24$ s komşuluğu için P noktasının değiştirilmiş yörüngesi



Şekil 8. $2.64 \leq t \leq 3.44$ s komşuluğu için P noktasının değiştirilmiş yörüngesi

9. Sonuçlar

Birlikte çalışan robot kollarından oluşan sistemlerde karşılaşılan en önemli sorunlardan biri de, denetimin yapıldığı eyletimli eklem grubuna bağlı olarak ortaya çıkan eyletimsel tekil durumlar (ETD)'dir. Bu tip durumlardan kurtulabilmek için, kullanılmakta olan eyletimli eklem seti ETD civarında bir diğeriyle değiştirilebilir veya eklem setine fazladan eklemler dahil edilebilir. Eğer kullanılmakta olan eklem setini değiştirme veya fazladan eklem kullanma olanağı yoksa, bu durumda yapılacak şey; sistemin hareketinin ETDlerle uyumlu olacak şekilde planlanmasıdır. Bu çalışmada, ETD etrafında sonsuz büyük değerler alan bilek kuvvet ve momentlerinin sonlu sınırlar içinde tutulması esasına dayanan ve bu sayede hareket yörüngesi üzerinde yapılan planlı bir değişiklikte sistemin ETDlerden sorunsuzca geçmesini sağlayan bir yöntem önerilmiş ve sonuçlar, örnek olarak alınan özdeş, düzlemsel ve üçer döner eklemlili iki robot koldan oluşan bir sistem üzerinde yapılan benzetimlerle doğrulanmaya çalışılmıştır. Bu yöntemde en önemli nokta ele alınan ETD komşuluğunun genişliğidir. Yapılan örnek benzetim sonuçları göstermiştir ki, ETD komşuluğunun genişliği arttıkça sistemin toplam enerji tüketimi düşmekte, buna karşılık sistemin istenen hareket yörüngesinden olan sapmalar artmaktadır. Bu nedenle, belirlenen bir iş için, sistemin enerji tüketimi ile planlanan hareket yörüngesinden olacak sapmalar arasında bir uzlaşma yapılması zorunluluğu ortaya çıkar. Bunun nasıl olacağı ise, planlanan işin niteliğine bağlı olarak değişir.

10. Ekler

Ek A – Eklem Hızlarının Elde Edildiği Denklemlerde Yeralan Tanımlar

$$\begin{aligned} \lambda_{1j} &= \dot{x}_p \cos \theta_{12j} + \dot{y}_p \sin \theta_{12j} + b_{3j} \dot{\theta}_b \sin \theta_{3j} \\ \lambda_{2j} &= \dot{x}_p (a_{1j} \cos \theta_{1j} + a_{2j} \cos \theta_{12j}) + \dot{y}_p (a_{1j} \sin \theta_{1j} + a_{2j} \sin \theta_{12j}) + b_{3j} \dot{\theta}_b (a_{1j} \sin \theta_{23j} + a_{2j} \sin \theta_{3j}) \\ \lambda_{3j} &= \dot{x}_p \cos \theta_{1j} + \dot{y}_p \sin \theta_{1j} + \dot{\theta}_b (a_{2j} \sin \theta_{2j} + b_{3j} \sin \theta_{23j}) \quad \text{ve} \quad \theta_{23j} = \theta_{2j} + \theta_{3j} \end{aligned}$$

Ek B – Kinetik ve Potansiyel Enerji İfadelerinde Yeralan Tanımlar

$$\begin{aligned} I_{1j}(\theta_{2j}) &= m_{1j} b_{1j}^2 + m_{2j} (a_{1j}^2 + 2a_{1j} b_{2j} \cos \theta_{2j} + b_{2j}^2), \quad I_{2j} = m_{2j} b_{2j}^2, \quad I_{12j}(\theta_{2j}) = m_{2j} b_{2j} (a_{1j} \cos \theta_{2j} + b_{2j}), \\ I_3 &= m_3 a_3^2 / 12, \quad G_{1j} = g(m_{1j} b_{1j} + m_{2j} a_{1j}), \quad G_{12j} = m_{2j} g b_{2j} \quad \text{ve} \quad G_3 = m_3 g \end{aligned}$$

Ek C – Genelleştirilmiş Kuvvet Bileşenlerini Gösteren İfadelerde Yeralan Tanımlar

$$\Phi_{11j} = -(a_{1j} \sin \theta_{1j} + a_{2j} \sin \theta_{12j}), \Phi_{21j} = a_{1j} \cos \theta_{1j} + a_{2j} \cos \theta_{12j}, \Phi_{12j} = -a_{2j} \sin \theta_{12j}, \Phi_{22j} = a_{2j} \cos \theta_{12j},$$

$$\Phi_{10j} = \sigma_{Rj} b_{3j} \sin \theta_b \text{ ve } \Phi_{20j} = -\sigma_{Rj} b_{3j} \cos \theta_b; \sigma_{Rj} = \begin{cases} +1 & \text{for } j = R \\ -1 & \text{for } j = L \end{cases}$$

Ek D – Sistemin Lagrange Denklemleri Yazılırken Yapılan Tanımlar

$$k = 1 \text{ ve } 2 \text{ için; } M_{1j} = I_{1j} (\theta_{2j}) \ddot{\theta}_{1j} + I_{12j} (\theta_{2j}) \ddot{\theta}_{2j} + B_{1j}, M_{2j} = I_{12j} (\theta_{2j}) \ddot{\theta}_{1j} + I_{2j} \ddot{\theta}_{2j} + B_{2j}, F_1 = m_3 \ddot{x}_P - F_x,$$

$$F_2 = m_3 \ddot{y}_P + G_3 - F_y \text{ ve } M_3 = I_3 \ddot{\theta}_b - M_\theta.$$

Yukarıdaki ifadelerde, B_{1j} ve B_{2j} aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$B_{1j} = -m_{2j} a_{1j} b_{2j} \dot{\theta}_{2j} (2\dot{\theta}_{1j} + \dot{\theta}_{2j}) \sin \theta_{2j} + G_{1j} \cos \theta_{1j} + G_{12j} \cos \theta_{12j} \text{ ve } B_{2j} = 2m_{2j} a_{1j} b_{2j} \dot{\theta}_{2j}^2 \sin \theta_{2j} + G_{12j} \cos \theta_{12j}.$$

Ayrıca, P noktasının ivme bileşenleri \ddot{x}_P ve \ddot{y}_P de, (1) ve (2) numaralı denklemlerin ikinci türevleri alınarak, aşağıdaki gibi bulunur:

$$\ddot{x}_P = -h_{x1R} \ddot{\theta}_{1R} - h_{x2R} \ddot{\theta}_{2R} + h_{x3R} \ddot{\theta}_{3R} - h_x \text{ ve } \ddot{y}_P = h_{y1R} \ddot{\theta}_{1R} + h_{y2R} \ddot{\theta}_{2R} - h_{y3R} \ddot{\theta}_{3R} - h_y.$$

Burada;

$$h_{x1R} = a_{1R} \sin \theta_{1R} + a_{2R} \sin \theta_{12R} - b_{3R} \sin \theta_b, h_{x2R} = a_{2R} \sin \theta_{12R} - b_{3R} \sin \theta_b, h_{x3R} = b_{3R} \sin \theta_b,$$

$$h_x = a_{1R} \dot{\theta}_{1R}^2 \cos \theta_{1R} + a_{2R} \dot{\theta}_{12R}^2 \cos \theta_{12R} - b_{3R} \dot{\theta}_b^2 \cos \theta_b, h_{y1R} = a_{1R} \cos \theta_{1R} + a_{2R} \cos \theta_{12R} - b_{3R} \cos \theta_b,$$

$$h_{y2R} = a_{2R} \cos \theta_{12R} - b_{3R} \cos \theta_b, h_{y3R} = b_{3R} \cos \theta_b \text{ ve } h_y = a_{1R} \dot{\theta}_{1R}^2 \sin \theta_{1R} + a_{2R} \dot{\theta}_{12R}^2 \sin \theta_{12R} - b_{3R} \dot{\theta}_b^2 \sin \theta_b.$$

Ek E – Sistemin Tork Katsayı Matrisinde Yeralan Tanımlar

$$A_{11} = (a_{1L} / a_{1R}) \sin(\theta_{12R} - \theta_{1L}), A_{21} = (a_{2L} / a_{1R}) \sin(\theta_{12R} - \theta_{12L}), A_{31} = (a_3 / a_{1R}) \sin(\theta_{12R} - \theta_{123L}),$$

$$A_{12} = (a_{1L} / a_{2R}) \sin(\theta_{1R} - \theta_{1L}), A_{22} = (a_{2L} / a_{2R}) \sin(\theta_{1R} - \theta_{12L}) \text{ ve } A_{32} = (a_3 / a_{2R}) \sin(\theta_{1R} - \theta_{123L}).$$

Ek F – Sağ Robot Kolumun Eklem İvmeleri Arasındaki İlişkiyi Gösteren Denklemlerde Yeralan Tanımlar

$$K_{1R} = a_{2R} [m_3 a_3 (a_{1R} \cos \theta_{12R} + b_{3R}) - I_3] + a_3 [I_{12R} (\theta_{2R}) + m_3 a_{2R}^2], K_{2R} = a_{2R} (m_3 a_3 b_{3R} - I_3) + a_3 (I_{2R} + m_3 a_{2R}^2),$$

$$K_{3R} = a_{2R} (m_3 a_3 b_{3R} - I_3) \text{ ve } K_0 = a_3 [B_{2R} \cos \theta_{3R} + m_3 a_{2R} (a_{1R} \dot{\theta}_{1R}^2 \sin \theta_{23R} + a_{2R} \dot{\theta}_{12R}^2 \sin \theta_{3R} - g \cos \theta_b)].$$

Semboller

- a_{ij} : j kolunun i. uzvunun boyu (i=1, 2 ve 3 ve j=L ve R)
- b_{3j} : j kolunun 3. eklemi ile P noktası arasındaki uzaklık
- $\hat{E}(\bar{q})$: Sistemin tork katsayı matrisi
- $\hat{E}'(\bar{q})$: Sistemin indirgenmiş tork katsayı matrisi
- F_x : P noktasına etkiyen dış kuvvetler toplamının x bileşeni
- F_y : P noktasına etkiyen dış kuvvetler toplamının y bileşeni
- J_d : Performans indeksi
- J'_d : Genişletilmiş performans indeksi
- K : Sistemin toplam kinetik enerjisi
- L : I. Sol robot kolu
II. Lagrange fonksiyonu
- M_θ : Taşınan nesne üzerine etkiyen dış moment

m_3	: Nesne ile sol ve sağ kolun üçüncü uzuvlarının toplam kütlesi
m_{kj}	: j kolunun k. uzvunun kütlesi (j=L ve R ve k=1 ve 2)
P	: Taşınan nesne üzerinde göz önüne alınan nokta
q_n	: Sistemin n. genelleştirilmiş koordinatı
\bar{R}	: Sağ robot kolu
\bar{R}	: Sistem üzerindeki yerçekimi ve eylemsizlik etkileri sütun matrisi
t	: Zaman
\bar{T}^d	: Eklem torkları sütun matrisi
T_{ij}	: j kolunun i. eklemine uygulanan sürücü torku (i=1, 2 ve 3 ve j= L ve R)
U	: Sistemin toplam potansiyel enerjisi
\hat{W}_R	: Pozitif tanımlı ağırlık matrisi
x_p	: Taşınan nesne üzerinde alınan P noktası konum vektörünün yatay bileşeni
x_p^*	: Taşınan nesne üzerinde alınan P noktası konum vektörünün yatay bileşeninin istenen değeri
y_p	: Taşınan nesne üzerinde alınan P noktası konum vektörünün düşey bileşeni
y_p^*	: Taşınan nesne üzerinde alınan P noktası konum vektörünün düşey bileşeninin istenen değeri
α_{iR}	: Sağ kolun i. eklemi için uygun bir denetim kuralına göre elde edilen komut ivmesi (i=1, 2 ve 3)
$\hat{\alpha}_{iR}$: Sağ kolun i. eklemi için komut ivmesinden sapma değeri (i=1, 2 ve 3)
ϕ_{ij}	: j kolunun i. kısıt denklemi (i=1, 2 ve 3 ve j= L ve R)
λ	: Lagrange çarpanı
λ_{ij}	: j kolunun bileğindeki etki-tepki kuvveti bileşenleri ve etki-tepki momenti (j=L ve R)
θ_b	: Taşınan nesnenin yatay düzleme göre yönelimi
θ_b^*	: Taşınan nesnenin yatay düzleme göre yöneliminin istenen değeri
θ_{ij}	: j kolunun i. ekleminin açılmal konum değişkeni (i=1, 2 ve 3 ve j= L ve R)

Kısaltmalar

ASC	: Actuator related singular configuration
ETD	: Eyletimsel tekil durum
İng	: İngilizce
KTD	: Kinematik tekil durum
PD	: Oransal ve türevsel kontrolcü

Kaynaklar

- [1] Y.D.Shin, M. J.Chung, “An Optimal Force Distribution Scheme for Cooperating Multiple Robot Manipulators”, *Robotica*, Cilt: 11, Sayfa: 49-59 (1993).
- [2] B.Dasgupta, T.S. Mruthyunjaya, “Force Redundancy in Parallel Manipulators: Theoretical and Practical Issues”, *Mechanism and Machine Theory*, Cilt: 33, Sayı: 6 , Sayfa: 727-742 (1998).
- [3] Y.H. Liu, Y. Xu, M.Bergerman, “Cooperation Control of Multiple Manipulators with Passive Joints”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Cilt: 15, Sayı: 2, Sayfa: 258-267 (1999).
- [4] B. Özkan, *Dynamic Modeling and Control of Two Coordinated Robot Manipulators*, Yüksek Lisans Tezi, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü (1999).
- [5] M. K. Özgören, “Birlikte Çalışan İki Robot Kolun Konumsal, Hızsal ve Eyletimsel Tekil Durumları Dolayında Denetimi”, *TOK'98 Ulusal Otomatik Kontrol Toplantısı Bildirileri*, İstanbul, Türkiye (1998).
- [6] B.Özkan, M. K.Özgören, “Actuator Related Singular Configurations of a System of Two Cooperating SCARA Manipulators”, *Sixth International Conference on Mechatronics and Machine Vision in Practice*, Ankara, Türkiye (1999).
- [7] S. J. Chung, ve J. J., Slotine, “Cooperative Robot Control and Concurrent Synchronization of Lagrangian Systems”, *IEEE Transactions on Robotics*, Cilt: 25, Sayı: 3, Sayfa: 1-19 (2009).
- [8] P.Chiacchio, S. Chiaverini, ve B. Sciliano, “Cooperative Control Schemes for Multiple Robot Manipulator Systems”, *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sayfa: 2218-2223, Nice, Fransa (1992).
- [9] K. Y. Lian, ve C. S., Chiu, “Adaptive Tracking Control for Cooperative Multiple Robot Systems”, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, Cilt: 25, Sayı: 1, Sayfa: 43-55 (2002).

- [10] G. Yang, I. M. Chen, W. Lin, ve J. Angeles, “Singularity Analysis of Three-Legged Parallel Robots Based on Passive-Joint Velocities”, *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Cilt: 17, Sayı: 4, Sayfa: 413-422 (2001).
- [11] M. K. Özgören, “Position and Velocity Related Singularity Analysis of Manipulators”, *Proceedings of the Ninth World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*, Milano, İtalya (1995).
- [12] M. K. Özgören, “Manipulatörlerin Tekil Durumları ve Bu Durumlarda Eklem Hareketlerinin Belirleniş”, *Sekizinci Ulusal Makina Teorisi Sempozyumu*, Elazığ, Türkiye (1997).
- [13] M. K. Özgören, “Kinematic Analysis of a Manipulator with its Position and Velocity Related Singular Configurations”, *Mechanism and Machine Theory*, Cilt: 34, Sayı: 7, Sayfa: 1075-1101 (1999).
- [14] J. H. Shin, Y. Nakamura, ve J. J., Lee, “Design of a Robust Adaptive Control System for an Underactuated Robot Manipulator with Uncertainties”, *Nippon Robotto Gakkai Gakujutsu Koenkai Yokoshu*, Cilt: 18, Sayfa: 499-500 (2000).
- [15] A. Degani, ve A., Wolf, “Graphical Singularity Analysis of Planar Parallel Manipulators”, *Proceedings of the 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Sayfa: 751-756, Orlando, Florida, ABD (2006).