Lakatos'un Matematiksel Bilginin Gelişim Modelinin Okul Matematiğine Uyarlanması

Adnan Baki[1]

Mesut Bütün[2]

Fatih Karakuş[3]

Özet

Matematik eğitiminde önemli sorunlardan biri, başta öğretmenler olmak üzere matematik eğitimi ile ilgilenenlerin matematiksel bilginin doğasına bakışlarındaki çarpıklıktır. Matematiksel bilginin doğası ile ilgili tartışmalar temelde matematik felsefesinin problemlerinden biridir. Bu bağlamda çalışmanın ilk bölümünde matematiksel bilginin doğası ile ilgili "mutlakçılık" ve "yarı-deneyselcilik" olarak adlandırılan matematik felsefesindeki iki farklı bakış açısı özetlenerek tanıtıldı. Daha sonra yarı-deneyselcilik felsefesinin ilham kaynağı olan Lakatos'un (1976) *İspatlar ve Çürütmeler* adlı eseri tanıtılarak matematiksel bilginin gelişimine dair "özgün" modeli ayrıntılı olarak izah edildi. Bir sonraki aşamada, bu model temel alınarak ilköğretim düzeyinde bir senaryo tasarlandı. Çalışmanın son bölümünde Lakatos'un matematiğin doğası ile ilgili yaklaşımının okul matematiğine ne şekilde yansıdığı ve bu yaklaşımın kavramsal bir altyapı olarak öğrenme ortamlarını tasarlarken nasıl rehberlik edeceği tartışıldı.

Anahtar Kelimeler: Matematik felsefesi, yarı deneyselcilik, matematik öğrenme ortamı tasarımı

1. Giriş

"Günümüzdeki matematik ve fen eğitiminin; otoriterliğin kaynağı, eleştirel ve bağımsız düşüncenin en kötü düşmanı olduğu henüz yeterince fark edilmemiştir." (Lakatos, 1976, s.142-143).

Lakatos'un matematik ve fen eğitiminin niteliği hakkında yukarıdaki sert eleştirel tespitinin üzerinden otuz yılı aşkın bir süre geçmesine rağmen, günümüzde de sınıflarda matematiğin ele alınışı ve yaygın öğrenme-öğretme şekli göz önüne alındığında bu söylemin geçerliliğini belli ölçüde hala koruduğu söylenebilir. Matematik öğretmenin üstün nitelikli birileri tarafından keşfedilmiş kural, tanım ve ispatları sergileyici bir tavırla sunmaktan, öğrenmenin de bu öğretimin doğal sonucu olarak, sunulanları sorgulamaksızın

[1] Prof. Dr., Karadeniz Teknik Üniversitesi,Fatih Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, *abaki@ktu.edu.tr*
[2] Arş. Gör., Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, *butunmath@gmail.com*
[3] Arş.Gör., Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, *fkarakus58@gmail.com*

benimsemekten ibaret olduğu fikri sınıflardan yansımaya devam etmektedir. Müfredatlarda ve öğretmen eğitimi yaklaşımlarındaki gelişmeler, matematik eğitiminde reform dokümanlarında vurgulanan söylem ve tavsiyeler — öğretmen ve öğrencilerin matematik sınıflarındaki alışılagelmiş rollerinin değişmesi, öğrencilerin aktif olarak kendi matematiklerini oluşturmalarına zemin hazırlayabilecek; iddia oluşturma ve test etme, soyutlama, karşı örnekler sunma, genellemeler yapma gibi matematiksel düşünme süreçleri içeren, problem çözme merkezli öğretim yaklaşımlarının kullanılması gerektiği (NCTM, 1989; NCTM, 2000) yönündeki — bu anlamda fazlaca işe yaramış görünmemektedir. Bu temel problemin birbiriyle bağlantılı birçok nedeni olabilir. Öğretmenlerin matematik ve matematiği öğretme bilgileri bağlamında niteliklerinin yetersiz olması ve matematiğin doğasına yönelik kökleşmiş inançlarının bulunması başlıca nedenler arasında gösterilebilir (Ma,1999; Thompson, 1992). Battista(1994) öğretmenlerin matematiğe yönelik inançlarının reform dokümanlarıyla uyuşmadığını ve üstelik bu inançların sınıfta neyi nasıl öğrettiklerinde büyük öneme sahip olduğunu belirtmektedir. Reform dokümanlarındaki tavsiyeler, hem öğretmenlerin hem de öğrencilerin matematiksel bilginin doğası ile ilgili farklı düşünmelerini gerektirmektedir (Lampert, 1990). Söz konusu bağlamda, bu çalışmada Hersh'in (1979) tavsiyesine kulak verilerek, matematik eğitimindeki bu temel problem matematik felsefesi üzerindeki tartışmalarla ilişkilendirilerek açımlanmıştır.

Çalışmanın ilk aşamasında, matematik felsefesinin ilgi alanının ne olduğu hakkındaki fikirlerden hareket edilerek, matematiksel bilginin doğası ile ilgili "mutlakçılık (*absolutism*)" ve "yarı deneyselcilik (*quasi-empiricism*)" olarak adlandırılan iki farklı bakış açısı özetle tanıtılmıştır. Daha sonraki aşamada, yarı deneyselcilik felsefesinin ilham kaynağı olan *İspatlar ve Çürütmeler* adlı eseri (Lakatos, 1976) çerçevesinde, Lakatos'un matematiksel bilginin gelişimine dair özgün yaklaşımı ayrıntılı olarak izah edilmiştir. Üçüncü aşamada ise, Lakatos'un yaklaşımının daha iyi anlaşılabilmesine yönelik bir senaryo oluşturulmuştur. Bu senaryoda, matematiksel bilginin nasıl geliştiğinin basit düzeyde örneklenebilmesi için ilköğretim okul matematiği kapsamında değerlendirilebilecek bir içerik ele alınarak, sınıf-içi diyaloglardan oluşan hayali bir ortam tasarlanmıştır. Çalışmanın son bölümünde ise, Lakatos'un matematiğin doğası ile ilgili yaklaşımının okul matematiğine ne şekilde yansıdığı, bu yaklaşımın kavramsal bir altyapı olarak öğrenme ortamlarını tasarlarken nasıl rehberlik edebileceği tartışılmaktadır.

Ülkemizde matematik eğitimi ile ilgili çalışmalarda matematik felsefesi konusunun oldukça ihmal edilen bir alan olduğu göz önünde bulundurulduğunda, gerçekleştirilen bu çalışma bahsedilen boşluğun giderilmesine yönelik bir girişim olarak da değerlendirilebilir. Diğer yandan bu araştırmanın, ülkemizde 2006/2007 öğretim yılında uygulanmaya başlanan öğretmen eğitimi lisans programlarındaki değişiklikler kapsamında, matematik öğretmeni yetiştirme programlarında okutulan matematik felsefesi dersi için temel bir kaynak doküman olarak kullanılabileceği düşünülmektedir.

1.1. Matematik Felsefesi

Matematik felsefesinin ne ile ilgili olduğu konusu, geleneksel olarak iki başlık altında ele alınmaktadır. Bunlardan ilki; matematiksel bilginin doğası hakkındaki epistemolojik sorunları, ikincisi ise matematiksel nesnelerin ve varlıklarının doğası ile ilgili ontolojik sorunları içermektedir (Gür, 2004, s.16). Klasik matematik felsefesi çalışmalarında bu sorunlar genel olarak şu temel sorular çerçevesinde tartışılmıştır; Matematiksel nesneler bizden bağımsız olarak var mıdırlar? Matematiksel nesneler nasıl nitelendirilebilir? Matematiksel bilgi nasıl doğrulanır? Matematiksel bilgi kesin midir? Matematiksel bilgiyi nasıl elde ederiz? Matematiksel bilgi tecrübî midir, "tecrübeden bağımsız (*a priori*)" mıdır? Diğer yandan matematiğin daha çok insani, dolayısıyla sosyo-kültürel boyutlarıyla ele alındığı çalışmalarda ise matematik felsefesinin matematik tarihine dayanması gerektiği ifade edilirken (Lakatos, 1976, s.2; Ernest, 1991, s.26) aynı zamanda matematikçilerin ne yaptıklarının "dışarıdan bir gözle" betimlemlenmesinin — matematiğin terimleri kullanılarak içeriden kural koyucu bir tavırla değil genel insan kültürünün bir bölümü olarak— önemi vurgulanmaktadır (Hersh, 1979). Böylece, matematik felsefesinde ele alınan sorunların bir bakıma ontolojik ve epistemolojik çerçeveden metodolojik çerçeveye doğru evirildiği söylenebilir. Örneğin, kişinin matematik bilgisini yeni matematik bilgisine nasıl dönüştürdüğü, matematiksel bilginin nasıl geliştiği, matematiksel teorilerin nasıl değerlendirildiği, öznel matematiksel bilgi ile kabul edilmiş matematiksel bilgi arasındaki ilişkinin ne olduğu (Ernest, 1998, s.52)gibi konular bu yeni çerçevenin ele aldığı sorunlardan sadece birkaçıdır. Aslında matematik felsefesinin konusunun ne olması gerektiği ile ilgili bu iki yaklaşım matematiğin doğası ile ilgili iki farklı bakış açısını temsil etmektedir; mutlakçılık ve yarı deneyselcilik.

1.2. Mutlakçılık

Mutlakçılık, matematiğin doğası hakkındaki görüşlerin en eskisi ve en baskınıdır. Bu görüşe göre matematiksel bilgi nesnel, tartışılamaz ve hakkında şüphe duyulamaz kesin doğrulardan oluşmaktadır (Ernest, 2004, s.12; Toumasis, 1997). Bu türden bir matematiksel doğruluk ise öncül bir takım önerme, tanım ya da aksiyomlardan tümdengelimli mantığın kuralları kullanılarak elde edilebilir. Böylelikle matematiksel ispat, yeni kesin bilgiler üreten ve matematiksel bilginin gerekçelendirilmesinde başvurulan yegâne kaynak olarak görülmektedir. Matematiğin, esnek olmayan bir yapı özelliği gösteren matematiksel doğruların yığılarak çoğalmasıyla geliştiğine inanan mutlakçılar, aynı zamanda matematiğin tarihi ve kullanışlılığı ile ilgili konuları bu tartışmanın dışında tutarlar ve üstelik bu boyutları konuyla ilgisiz görürler (Baki, 2008, s.30; Ernest, 2004, s.13). Mutlakçı görüş, matematiğe sağlam bir temel bulma arayışında olan geleneksel felsefi okulların neredeyse tümünce paylaşılmaktadır (Ernest, 1991, s. 13).

Matematiğe sağlam bir temel oluşturma çabasında olan üç temel felsefi okul; mantıkçılık, biçimcilik(formalizm) ve sezgiciliktir. Burada ayrıntılara girmeden her bir okulun matematiksel bilginin doğası ile ilgili temel görüşlerini özetlenecek olursa:

Mantıkçılar matematiği temelde mantıkla özdeşleştirmişler (Yıldırım, 2000, s.88), bütün matematiğin aslında mantığa indirgenebileceğini ya da mantığın bir uzantısı olarak değerlendirilebileceğini ifade etmişlerdir. Mantıkçılığın kurucuları olan Frege ve Russell mantığın tam bir kesinlik sunduğuna inandıkları için, aritmetiği ve daha genelde matematiği mantık üzerine inşa etme girişiminde bulunmuşlar, böylelikle matematiği sağlam kılabileceklerini düşünmüşlerdir (Gür, 2004, s.40). Onlara göre, bütün matematiksel doğrular sadece aksiyomlar ve mantıksal çıkarımın kuralları aracılığıyla ispatlanabilir (Ernest, 1998, s.16). Matematiğin nesnelerini insan zihninin ve üretiminin dışında bir soyut gerçeklikler âleminde konumlandıran ve tümdengelimli mantığı da sarsılmaz, kesin bilginin güvencesi olarak ele alan mantıkçılar, kavramsal çerçevelerinde insanın yaratıcılığını ve sezgisini dışlamış oldukları yönünde eleştirilmektedirler (Handal, 2003; Yıldırım, 2000, s.91). Ayrıca mantıkçılığın matematiğe mutlak temel bulmaya yönelik epistemoloji arayışında da başarısız olduğu ifade edilmektedir (Ernest, 1998, s.18).

Diğer yandan biçimciler ise, matematiğin ‘kâğıt üzerinde işaretlerle oynanan bir oyun’ olduğunu iddia etmişlerdir (Gür, 2004, s.43). Kuralları önceden belirlenmiş böyle bir oyunda matematik, soyut nesne ve ilişkileri konu alan ve terimleri anlamsız işaretlerden oluşan “tutarlılık ve tamlık” özelliğine sahip simgesel bir sistem olarak değerlendirilirken, matematiksel ilişkileri dile getiren ifadelerin ise içerikten yoksun önerme kalıpları olduğu ifade edilmektedir (Baki, 2008, s.24). Bu önerme kalıpları yalnızca bir teoremin tanımında, ispatında ya da bir problemin çözümünde kullanıldıklarında anlam ve içerik kazanırlar. Biçimciler aynı zamanda kendisine anlam atfedilecek “matematiksel nesne” diye bir şeyin olmadığını ve matematiğin yalnızca aksiyomlar, tanımlar ve teoremlerden, yani bir başka deyişle formüllerden ibaret olduğunu savunmuşlardır (Davis & Hersh, 1980, s.319). Diğer yandan teoremler herhangi bir hata ya da şüpheden de muaftırlar, çünkü kesin ispat ve çıkarsama süreci hiçbir boşluk noktası bırakmaz (Davis & Hersh, 1980, s.340). Matematiği, mantıkçılar gibi kendi dışındaki bir alana, yani mantığa başvurarak değil de kendi içerisinde temellendirilmeye çalışan bu görüş de nihayetinde Gödel’in eksiklik teoreminin “tutarlılık ve tamlık” söylemine büyük bir darbe indirmesiyle başarısızlığa mahkûm olmuştur. Ayrıca biçimcilik, yaratıcı düşünceye yeterince yer vermediği, matematiksel simgeciliğin anlamlı çıkarım ve sezgiye baskın olduğunu somutlaştırmaya çalışması gibi nedenlerle de eleştirilmektedir (Handal, 2003).

Matematiğin entelektüel bir etkinlikten, matematiksel kavramların da zihinsel yapılardan ibaret olduğuna inanan sezgiciler (Handal, 2003), yalnızca sonlu adımlarla inşa edilen matematiği hakiki matematik olarak görürler (Davis & Hersh, 1980, s.320). Onlarda aynı mantıkçı ve biçimciler gibi matematikte kesinlik ararlar ve bu kesinliği insanın matematiksel tümevarım yeteneğine bağlarlar (Baki, 2008, s.25). Doğruluğunu veya yanlışlığını bilemediğimiz bir şey hakkında bir kabule gidemeyeceğimizi söylerler ve dolayısıyla “olmayana ergi” yönteminin kullanıldığı ispatları da kabul etmezler (Gür, 2004, s.46). Matematiği yalnızca insanın zekâsı ve dolayısıyla sezgisinin bir ürünü olarak ele alan sezgiciler, bilginin aynı zamanda sosyal olarak yapılandırıldığı gerçeğini görmezden geldikleri için eleştirilmektedirler (Handal, 2003). Ayrıca klasik matematikte geçerli sayılan pek çok ispatın sezgicilerin ölçütlerine göre geçersiz sayıldığı ve temel düşüncelerinin matematiğin tümünü kapsayacak biçimde genişlemeye elverişli olmadığı yönleriyle de eleştiri almışlardır (Yıldırım, 2000, s.100).

1.3. Yarı Deneyselcilik

Matematiğin mutlak doğru olduğu hakkındaki görüşler, matematiğin son yüz yıldaki gelişimi ve temelci yaklaşımların bu gelişimi resmetmedeki başarısızlıkları sonucu sekteye uğramıştır. Öklid-dışı geometrilerin keşfedilmesi, kümeler kuramı ve sonsuzluk kavramı ile ilgili gelişmeler ve bilgisayarların matematiksel ispatta kullanılması gibi konular matematiğin doğası ile ilgili yerleşmiş bazı anlayışları kökünden sarsmıştır. Şimdilerde matematiğin insani ve deneyimsel yönünü ön plana çıkaran "sıra dışı" olarak adlandırılabilecek (Kitcher & Aspray, 1988) yeni bir geleneğin tohumları atılmaktadır. Yanılabilirlik (*fallibilism*) ya da yarı deneyselcilik olarak adlandırılan bu akıma göre, matematik sosyal süreçlerin bir ürünüdür (Ernest, 2004, s.14). Yarı deneyselciler, matematiği matematikçilerin yaptıkları şey olarak tanımlayarak, herhangi bir insan etkinliğinde veya ürününde olabileceği gibi matematikte de kusurların görülebileceğini kabul etmektedirler (Baki, 2008, s.26). Matematiksel bilgi; ispat ve kullandığı kavramlar açısından yeniden incelemeye alınabilir, düzeltmeye açık ve yanılabilirdir (Ernest, 2004, s. 14). Bu görüş, matematiği insanoğlunun kültürünün bir parçası olarak kabul ederek, matematikçilerin tarihteki deneyim ve uygulamalarının yakından incelenmesi yoluyla makul bir felsefi söylemin ortaya konulabileceğini iddia etmektedir. Yarı deneyselcilik felsefesinin takipçileri Lakatos'un matematik felsefesi ile ilgili çalışmalarını kendilerine milat olarak almışlardır (Gür, 2004, s.61). Hersh, Lakatos'un matematik felsefesi üzerine yazdığı *İspatlar ve Çürütmeler* adlı eserini matematik felsefesi hakkında son yıllarda yazılmış en ilginç ve özgün katkı olarak değerlendirmektedir (Hersh, 1979).

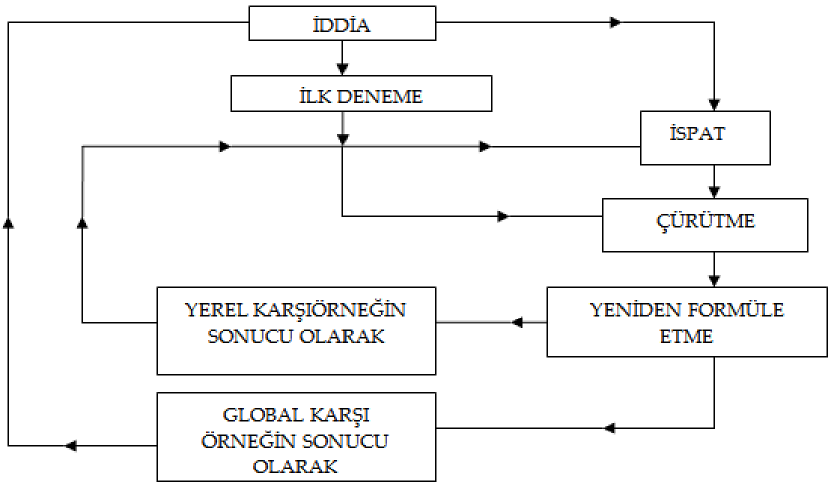
Çalışmanın bu aşamasında, Lakatos'un matematiksel bilgiye ilişkin bakış açısını ve matematiksel bilginin gelişimini nasıl resmettiğini ünlü eseri *İspatlar ve Çürütmeler* çerçevesinde değerlendirilecektir.

1.4. Lakatos'un Matematiksel Bilginin Gelişimi Modeli

Lakatos, matematik felsefesini matematiğin temelleri çerçevesinde ele alan geleneksel anlayışa radikal bir karşı çıkış olarak nitelendirilebilecek "İspatlar ve Çürütmeler" adlı eserinde, matematik felsefesini matematiğin metodolojisi çerçevesinde ele almaktadır. Popper'in doğa bilimleri için uyguladığı metodolojiyi matematiğe uyarlayan Lakatos (Gür, 2004, s.62), "matematiksel keşfin mantığına ilişkin matematiğin tarihiyle bütünleşmiş ayrıntılı bir resim sunar. Bu resim içerisinde, matematiğin gelişimi konusundaki epistemolojik analizler keşif, açıklama ve soyutlama aşamasındaki matematiksel bilginin açıklanmasında kullanılmaktadır" (Davis & Hersh, 1980, s.347).

Lakatos'un doktora çalışmasını yansıtan "İspat ve Çürütmeler" adlı eseri, içinde Cauchy, Lehuilier, Hessel gibi ünlü matematikçilerin öğrenci olarak konumlandırıldığı hayali bir sınıfta geçen diyaloglardan oluşmaktadır. Bu sınıfta öğretmen ve öğrenciler çokyüzlülerle ilgili meşhur Euler-Descartes iddiasını tartışmaktadırlar. Bu iddia Lakatos'un kitabında; "Bir çokyüzlünün köşe sayısı V, ayrıt sayısı E ve yüzlerinin sayısı F olsun. Buna göre tüm çokyüzlüler için V-E+F=2' dir" şeklinde aktarılmaktadır (Lakatos, 1976, s.6). İddianın ortaya atılmasından sonra öğretmen, çokyüzlünün düzlem üzerine yayılmasıyla yapılan ve "Cauchy ispatı" olarak da bilinen geleneksel ispatı sunarak tartışmayı başlatır. Bu ispat, hemen ardından öğrenciler tarafından öne sürülen karşı-örnekler engeliyle karşılaşır. Karşı-örneklerin sonucu olarak teoremin ifadesi değiştirilir, ispat düzeltilir ve ayrıntılandırılır. Yeni karşı örnekler, yeni düzenlemeleri beraberinde getirir. Başka bir deyişle, bir iddia ya da bir problemle yola çıkıldığında ispat ve karşı-örnek arayışı da eş zamanlı olarak ortaya çıkmaktadır. Yeni ispatlar eski karşı-örnekleri açıklarken, yeni karşı-örnekler eski ispatları yavaş yavaş yıkmaktadır. Lakatos bu süreçte, bizzat sonucun kendisine karşı çıkan, yani ana iddiayı hedef alan karşı örnekleri "evrensel karşı-örnek", ana iddiayı çürütmek zorunda olmayan, argüman içerisindeki adımlardan birini (*lemma*) hedef alan karşı örnekleri ise "yerel karşı-örnek" olarak adlandırmaktadır (Lakatos, 1976, s.10-11). Lakatos, kitabında Euler-Descartes iddiası ile ilgili matematikçilerin yaptıkları çalışmaları dipnot olarak sunmuş ve böylece iddianın gelişiminin tarihsel yönünü detaylandırarak yansıtmıştır.

Lakatos'un matematiksel bilginin gelişimi modeli Davis ve Hersh tarafından aşağıdaki biçimde şemalandırılmıştır (Davis & Hersh, 1980, s.292):



Şekil 1. Lakatos'un matematiksel bilginin gelişim modeli

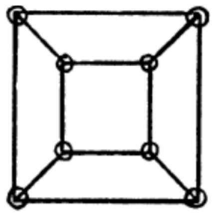
Yukarıdaki şemadaki akışın nasıl işlediğini ayrıntılandırmak için, Lakatos'un "matematiksel keşfin ya da informal matematiksel kuramların gelişiminin aşamaları"

(Lakatos, 1976, s. 127-128) olarak tanımladığı basamakları ve kitapta bu basamakların nasıl gerçekleştiği aşağıda özetlenmiştir;

1. İlkel iddia: İlkel iddia Lakatos'un modelinin başlangıç noktasıdır. Lakatos kitabında Descartes-Euler'in " V, köşelerin sayısı, E, ayrıtların sayısı ve F de yüzlerin sayısı olmak üzere tüm çokyüzlüler için V-E+F=2 şartı sağlanır" iddiasının geçerliliğini hayali olarak tasarladığı bir sınıf ortamında irdelemektedir. Aslında 1700'lü yıllarda çokyüzlülerin sınıflandırılması önemli bir problemdi. Düzlem geometrisinde çokyüzlüler kenarlarına göre sınıflandırılmalarına karşın, cisim geometrisinde bunu yapmak oldukça zordu. Lakatos, bu problemin çözümünü tarihsel süreci içerisindeki değişimi ve gelişimini göz önüne alarak yansıtmaya çalışmaktadır. Bu ilkel iddianın geçerliliği için aşağıdaki ispat sınıfta verilmiştir.

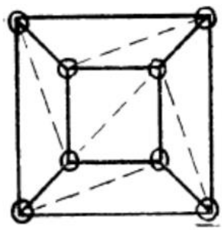
2. İspat: Lakatos ilkel iddianın ispatını 3 adımda vermektedir:

   a) 1. Adım: Çokyüzlünün içini boş ve yüzeyini ince lastik olarak düşünelim. Eğer yüzlerden biri kesip çıkarılırsa, kalan yüzey, yırtılmadan, esnetip gerilip düzleştirilerek gerilebilir. Bu durumda yüzlerin ve kenarların şekli bozulabilir; ancak V ve E değişmez. Orijinal çokyüzlü için V – E + F = 2 ise, düzlemsel ağ yapı için de V – E + F = 1 dir.



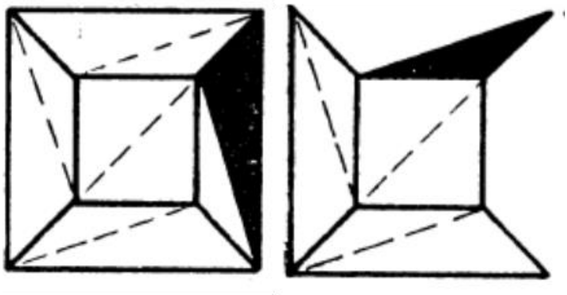
Şekil 2. Düzlemsel ağ yapı

   b) 2. Adım: Oluşan şekil çokgenlerin içine köşegenler çizilerek üçgenselleştirilir. Çizilen her köşegen E ve F yi bir artırır, böylece V – E + F toplamı değişmez.



Şekil 3. Ağ yapıyı üçgenselleştirme

c) 3. Adım: Üçgenselleştirilmiş ağ yapıdan teker teker üçgenler çıkarılır. Bu iki yolla yapılır: ya bir ayrıt çıkarılarak ayrıtın dayandığı yüz ve ayrıtın kendisi kaybolur; ya da iki ayrıt ve bir köşe kaldırılır. Böylece bir yüz, iki ayrıt ve bir köşe kaybolur. Yani, bir üçgen kaldırılmadan önce V – E + F = 1 eşitliği üçgen kaldırıldıktan sonra geçerliğini korur. Bu işlemlerin sonunda, tek bir üçgen elde edilir. Bu tek üçgen için de V – E + F = 1 eşitliği sağlanır.



Şekil 4. Ağ yapıdan üçgenlerin çıkarılması

Aslında Lakatos'un ilkel iddia için verdiği ispat Cauchy'e dayanmaktadır. Böylece 1700'lü yıllar için Cauchy'nin bu ispatı Euler'in ilkel iddiasının her çokyüzlüye uygulanabileceğini göstermekteydi. Cauchy'nin ispatı üstü kapalı olarak 3 Lemma'yı içermektedir. Bunlar aşağıdaki şekilde özetlenir:

Lemma 1: Bir yüzü çıkarılmış bir çokyüzlü düzleme gerilebilir.

Lemma 2: Üçgenselleştirilmiş ağ yapıda, her yeni kenar için yeni bir yüz elde edilir.

Lemma 3: Üçgenselleştirilmiş ağdan bir üçgeni çıkarmanın iki yolu vardır: ya bir kenar ya da iki kenar ve bir köşe çıkarılır. Böylece bu sürecin sonunda bir tek üçgen kalır.

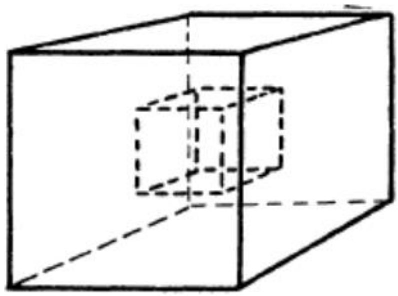
3. Evrensel karşı örneklerin ortaya çıkması: Tarihsel süreç içerisinde Cauchy'nin ispatına uymayan ve ispatın yeniden sorgulanmasını gerektiren karşı-örnekler ortaya çıkmıştır. Lakatos kitabında karşı örnekleri yerel ve evrensel olmak üzere ikiye ayırmaktadır. Yukarıda da açıklandığı gibi yerel karşı örnekler, ana iddiayla çelişmeyen, sadece lemmalara ya da ispatta kullanılan yapılara karşı olan örneklerdir. Buna karşın evrensel karşı-örnekler ise ana iddia ile çelişen karşı örneklerdir. Burada kitapta yer alan ve iddianın gelişmesine yardımcı olacak birkaç yerel ve evrensel karşı-örneğe yer verilecektir.

   - Yerel karşı örnek: İspatın ilk iki adımında oluşan üçgensel ağ yapısını düşünelim. Eğer bu ağ yapı içerisinden sanki yapbozdan bir parça çıkarılır gibi bir üçgen çıkarılırsa, bu üçgeni tek bir ayrıtı ya da köşeyi çıkarmadan kaldırmış olurum. O halde ispatın 3. adımı yanlıştır.

Bu karşı-örnek yerel bir karşı örnektir. Çünkü Cauchy'nin ispatının üçüncü adımıyla çelişmektedir. Bunun yanında verilen karşı örnekteki küpün sadece ispatın üçüncü adımıyla çeliştiği ve ana iddiaya karşı olmadığı açıktır. Bu tür karşı-örnekler ispatta kullanılan tanımlarda ya da lemmalar'da değişikliklerin ya da açıklamaların yapılmasına neden olmaktadır.

Verilen bu karşı örnekten sonra Lakatos kitabında öğretmenin ispatının 3. Adımına yöneldiğini ve yeni tanımlamalar yaparak ispatını geliştirmeye çalıştığını belirtmektedir. Bu amaçla ispatın üçüncü adımına "üçgenselleştirilmiş ağ yapıdan sınırdaki üçgenleri birer birer çıkarıyoruz" şeklinde bir cümle ekleyerek ispatını yeniden düzenlemektedir.

- Evrensel karşı-örnek: Oyuk küp, biri diğerine dokunmayan iki küp tarafından sınırlandırılmış bir cisim olarak tanımlanır. Oyuk küpte içteki küpten bir yüz çıkarıldığında, çokyüzlü bir düzleme gerilememektedir. Ayrıca her küp için V – E + F = 2 olduğundan oyuk küp için V – E + F = 4'tür.



Şekil 5. Oyuk küp

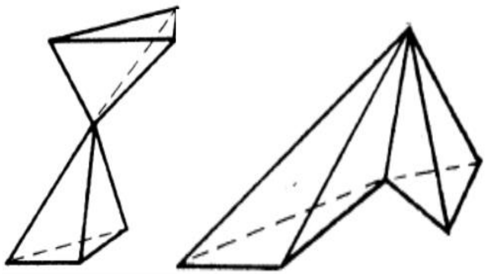
Bu karşı-örnek yerel olmasının yanında evrensel bir karşı örnektir. Çünkü hem ispatın ilk adımıyla çelişmekte hem de iddiaya karşı olmaktadır.

Bu aşamadan sonra sınıf ortamında öğrenciler ortaya çıkan ve iddia ile çelişen karşı örnekleri defetmeye çalışmaktadırlar. Amaçları yara almış iddiayı kurtarmaktır. Bu nedenle yeni çokyüzlüler için yeni tanımlar ortaya çıkmaya başlar.

Tanım 1: Çokyüzlü, yüzeyi çokgen yüzlerden oluşan bir cisimdir.

Tanım 2: Çokyüzlü, çokgenler sisteminden oluşan bir yüzeydir.

Oluşturulan bu yeni tanımlara göre yeniden düzenlenen iddiaya karşı yeni karşı-örnekler belirmektedir. Örneğin, ortak bir ayrıtı olan iki çokyüzlü ya da ortak bir köşesi olan iki çok yüzlü alındığında bu iki ikiz çokyüzlüde bağlantılı ve ikisi de tek bir yüzey oluşturur. Her ikisi için de V – E + F = 3 tür.



Şekil 6. İkiz çokyüzlüler

Lakatos kitabında modelini tanıtırken “canavar-defetme (*monster-barring*)” ve “istisna-defetme (*exception-barring*)” aşamalarından bahseder. Canavar-defetme, ispat ve iddiayla çelişen karşı-örnekleri reddetmek ya da onları görmezden gelmek olarak ifade edilmektedir. Bu aşamada karşı-örneklerden kurtulmak için yeni tanımlar yapılmaya çalışılır. Ancak bu tanımlar her zaman ad-hoc (geçici bir çözüm) niteliğindedir. Bu aşama tüm karşı-örnekleri dışarıda bıraktığı için sadece sınırlı bir alan için iddianın ve ispatın geçerli olmasını sağlamaktadır. İstisna-defetme aşamasında ise iddiayı olduğu gibi almak ya da terk etmek yerine onu geliştirme düşüncesi vardır. Örneğin bu aşamada ilkel iddia kitapta *“Tüm dışbükey çokyüzlüler Eulerci’dir”* şekline dönüşerek değişmektedir. Ancak bu aşama ilkel iddianın mükemmelleştiğini göstermemektedir. İstisna-defetme aşamasında özgün iddia değiştirilip geliştirilmekte ancak yeni iddiayı ispatta tam bir mükemmelliğe ulaşılmamaktadır.

4. İspatın yeniden çalışılması: Bu aşamada evrensel karşı örneklerin yerel karşı örnekler olduğu karşı-örnekler ortaya çıkmaktadır. Bu süreç sonunda yeni bir ispata eşlik eden bir geliştirilmiş iddia oluşur. Başlangıçtaki ilkel iddia bu süreç sonunda *“Tüm basit bağlantılı yüzlere sahip basit bağlantılı çok yüzlüler Euler’cidir ve V-E+F=2 şartını sağlarlar.”* şeklini almıştır.

Lakatos, kitabında yukarıdakilere ilaveten üç aşamadan daha bahsetmekle birlikte burada ele alınan ilk dört aşamanın ispat analizinin esas çekirdeğini oluşturduğunu ifade etmiştir (Lakatos, 1976, s.128). Böylece yukarıda açımlanan dört aşamanın yarı deneyselci felsefenin matematiğin doğasını ve matematiksel bilginin gelişimini nasıl ele aldığını resmetmede yeterli olabileceği düşünülmektedir.

Kısaca; Lakatos, yukarıda özetlenen matematiksel bilginin gelişimine yönelik çalışmasının amacını şöyle ifade etmiştir: “Bu çalışmanın mütevazi amacı, yarı-deneysel, informal matematiğin, şüphe duyulamaz teoremlerin sayısındaki monoton artışla değil, spekülasyon ve eleştirel tahminlerin sürekli ilerlemesiyle geliştiğini, ispatlar ve çürütmeler mantığıyla açımlamaktır.”(Lakatos, 1976, s.5). Lakatos’un matematik felsefesindeki geleneksel mutlakçı yaklaşımların temel argümanlarına bir başkaldırı niteliğindeki bu genel amacını burada ele alınan çalışmasıyla belli ölçüde gerçekleştirebildiği söylenebilir, fakat matematik felsefesinin ilgi alanında olabilecek bazı konuları dışladığı ya da yeterince aydınlatamadığı yönünde de eleştirilmektedir (Yuxin, 1990; Ernest, 1991, s.39). Bu eleştirilerden bazıları şu şekilde sıralanabilir: Lakatos'un matematiksel kesinlik ve matematiğin nesneleri hakkında yorumunun bulunmaması, matematiğin diğer alanlardaki uygulamalarındaki başarısını açıklayamaması, matematik bilginin oluşturulma süreci ile matematiğin ontolojisi arasında bir ayrım yapmaması ve oluşturduğu modelde tarihsel yaklaşımı neden yeğlediğini felsefi olarak temellendirmemesidir (Ernest, 1991, s.39; Pálsdóttir & Sriraman, 2010, s.471). Bu çalışmada Lakatos'un matematiğin doğasına ilişkin özgün olarak nitelendirilen yaklaşımına odaklanıldığı için, eleştiriler ayrıntılı olarak ele alınmamıştır.

Çalışmanın bundan sonraki bölümünde Lakatos'un kitabındaki yaklaşımına benzer biçimde hayali bir sınıf ortamı oluşturulmuştur. 4 öğrenci ve 1 öğretmenin diyaloglarına odaklanılan bu sınıfta, ilköğretim okul matematiği kapsamında değerlendirilebilecek "alan ve çevre ölçümü" konusu ele alınarak geliştirilen bir iddianın öğretmen ve öğrencilerin tarafından nasıl çalışıldığı örneklenmiştir. Yani bir bakıma ilköğretim düzeyinde basitleştirilmiş bir içeriğin ele alındığı bu hayali sınıfta "ispat analizinin" nasıl gerçekleştirildiği betimlenmiştir. Bu şekilde bir yol izlenerek Lakatos'un modelinin biraz daha somutlaştırabileceği düşünülmüştür. Senaryoda ele alınan iddia, öğrencilerin ispatlama girişimleri ve tartışmalarda kullandıkları argümanlar oluşturulurken Ma (1999) ve Bütün (2005)'ün bir kapalı şeklin alanı ve çevresi arasındaki ilişkiyi belirlemeye yönelik öğretmenlerle yapmış oldukları mülakatlardan elde edilen bulgulardan faydalanılmıştır. Senaryo tasarlanırken söz konusu çalışmalardaki öğretmenlerin ifadeleri, ispatlama girişimleri, çürütme örnekleri ve bazı yeni oluşturdukları iddialar kullanılmıştır. Yani, aşağıdaki senaryoda yer verilen öğretmen ve öğrenci tartışmalarındaki ifadeler, Ma (1999) ve Bütün (2005)'ün çalışmalarındaki bazı öğretmenlerin ifadelerinin yorumlanması sonucu oluşturulmuştur.

2. Senaryo

2.1. İlkel iddia

Öğretmen "*bir dikdörtgenin çevresini artırdığımızda alanı da her zaman artmaktadır"* şeklindeki bir iddiayı sınıf ortamına getirerek tartışmayı başlatır. Bu iddianın doğruluğunu göstermek amacıyla hemen öğrencilerden Osman bir ispatı sınıf ortamında öne sürer.

2.2. İspat

Osman: Çevre ve alanı hesaplamak şeklin eni ve boyuyla ilgili. O halde bunlarda oluşan bir değişim çevre ve alanı etkileyecektir. İddiada çevre her zaman artacağı için dikdörtgenin kenar uzunluklarını artırmak bu şartı sağlar. Örneğin 4x5'lük bir dikdörtgenimiz olsun. Bunun çevresi Ç=18 ve alanı A=20' dir. Bu durumda eni ve boyu artırırsak mesela 5x8'lık bir dikdörtgen oluşturursak bu durumda çevre Ç=26 ve alan A=40 olur ki bu çevre arttığında alanında artığını gösterir. Ya da dikdörtgenin eni ve boyunu aynı oranda da artırabiliriz ki bu durumda da çevre arttığında alan artacaktır. Mesela başlangıçtaki dikdörtgeni 8x10 yaparsak çevre Ç=36 olurken alan A=80 olur.

Osman'ın ispatı bize iki boyutlu bir şeklin çevresi ve alanının eni ve boyundan etkilendiğini ve aralarında bir ilişki olduğunu göstermektedir. Bunun yanında ispat 2 durum için iddianın doğruluğunu ifade etmektedir. Bu durumlar;

1. Durum: En ya da boyun her ikisini de farklı oranlarda artırdığımızda çevre artarken alan da artmaktadır.
2. Durum: En ya da boyun her ikisini de aynı oranlarda artırdığımızda çevre artarken alan da artmaktadır.

şeklindedir.

2.3. Evrensel Karşı-Örneklerin Ortaya Çıkması

Ayşe: Tamam yapılan işlemler doğru ancak ben çevrenin arttığında alanın azaldığı bir örnek buldum. Örneğin 4x5'lik dikdörtgeni ele alalım. Şimdi bu dikdörtgenin boyunu 4 artırıp enini 3 azaltıyorum. Bu durumda yeni dikdörtgenimin 1x9'luk olur. Bu dikdörtgenin çevresi Ç=20 olurken alanı A=9 olmaktadır.

Fatma: Hatta bu dikdörtgenin enini 2 azaltıp boyunu 5 artırırsam çevresi Ç= 24 olurken alanı A= 20 kalmaktadır. Yani çevre artmasına karşın alan sabit kalmaktadır.

Ayşe ve Fatma iki farklı karşı örnek öne sürmektedirler. Onların bu karşı-örnekleri doğrudan iddiaya yönelik olduğundan ve ispatı irdelemediğinden evrensel karşı-örneklerdir. Her iki durumda da dikdörtgenin bir kenarında azalma olurken diğerinde bir artma olmakta ve bu durum şeklin çevresinin artmasına ancak alanının azalmasına ya da değişmemesine neden olmaktadır.

Öğrenciler ortaya çıkan bu karşı-örneği hemen reddetme eğilimi içerisine girmişlerdir.

2.4. Canavar-Defetme

Osman: Bir şeklin kenar uzunluklarını azaltmak şeklin çevresini küçültmez mi?

Fatma: Biz sadece çevrenin arttığı durumları göz önüne almalıyız. Karşı örneğe bak. Toplam çevre arttı. En ya da boydan biri azaltılıyor ancak diğeri artırılıyor. Yani toplam çevre artıyor.

Osman: Tüm dikdörtgenler için bunu garanti edebilir misin?

Ali: Peki diyelim ki 4x5'lik dikdörtgenin üst kenarını 2 azaltalım, alt kenarını ise 1 azaltalım. Diğer kenarlarını ise 1 artıralım. Başlangıçtaki dikdörtgenin çevresi 18 iken son dikdörtgenin çevresi 17 olur. O zaman bak çevre azaldı.

Fatma: Senin son şeklinin dikdörtgen olacağından emin misin?

Öğretmen: Ali söylediğin dikdörtgenin şeklini çizebilir misin? Sence oluşturduğu şekil bir dikdörtgene benzedi mi?

Ayşe: Böylece bir dikdörtgenin çevresi arttığında alanının da her zaman arttığını söyleyemeyiz.

Osman: Ancak arttığı durumlar vardı. Mesela dikdörtgenin tüm kenarlarının eşit uzunluklu olduğunu varsayalım.

Ayşe: Yani bir kareden bahsediyorsun.

Osman: Evet, bir kare. Bu durumda kenarların uzunluklarını artırdığımızda çevre artarken alan da artmaktadır.

Ayşe: Yani?

Osman: Yani, eğer şeklin çevresi şeklin kare olma özelliği bozulmadan artıyorsa bu durumda çevre artarken alanda her zaman artar.

Bu aşamada Osman ve Ali, Ayşe ve Fatma’nın söyledikleri karşı-örnekleri çürütmeye yönelik girişimde bulunmuşlardır. Ancak Fatma tüm bu çürütmeleri başarılı şekilde geri püskürtmüştür. Bunun yanında Osman ispatını yeniden gözden geçirerek iddianın ve ispatın geçerliliğini sağlayacak yeni bir durumu öne sürmüştür. Osman “bir şeklin çevresi şeklin kare olma özelliği bozulmadan artırılıyorsa alanı da her zaman artar” şeklinde iddiayı tüm karşı-örnekleri dışarıda bırakarak ve ispatıyla uyumlu bir şekilde sınırlandırmıştır. Bu durum Osman ve Ali’nin ilkel iddianın ve ispatın doğruluğunu kabul ettiklerini ve ortaya çıkan bu sıra dışı durumları reddederek iddialarını sınırlandırmaya çalıştıklarını göstermektedir. İlkel iddiada bir değişikliğin yapılmaması ve karşı-örnekler dışında iddianın doğruluğunun kabul edilmesi bu aşamanın canavar-defetme aşaması olduğunu gösterir.

2.5. İstisna-Defetme

Osman: Bu iddiamı herhangi bir dikdörtgen içinde genelleyebilirim.

Ayşe: Nasıl?

Osman: Peki, dikdörtgende çevrenin artmasında kenar uzunluklarının her zaman artması şartını iddiamıza eklersek, yani bir dikdörtgenin çevresi arttığında alanının da her zaman artması için en ya da boyunun her ikisinin de artması gerekir.

Ali: Biri sabitken diğerinin artması da şartı sağlıyor.

Osman: Ben eni artırıp boyu azalttığımda çevre artarken alanın artacağına da bir örnek buldum.

Öğretmen: Evet Osman’ın örneğini dinleyelim.

Osman: Diyelim ki 4x8 lik bir dikdörtgende uzun kenarı bir azaltıp, kısa kenarı iki artıralım. Bu durumda çevre 24 olurken alan 32 olmaktadır.

Ali: O zaman başlangıçtaki Osman'nın ispatına bir durum daha eklememiz gerekiyor.

Fatma: Osman son örneğinin her zaman doğru olduğuna emin misin?

Ayşe: Bizim örneklerimizde de çevre artarken alan azalmaktadır.

Osman: Tamam örneğimin şartını şöyle değiştirirsem sanırım örneğim iddia için doğru olacaktır: Eni artırıyorum ve boyu azaltıyorum fakat artış miktarı her zaman azalış miktarından fazla olmalıdır.

Ayşe: Bizim örneklerimizde de artış miktarı her zaman azalış miktarından fazla olmasına rağmen alan azalmakta. Bu durumda son söylediğin ifade yeterince açık değil.

Osman: Benim ifademde sadece artış miktarının azalış miktarından fazla olması tek koşul değil. Bu sadece çevrenin her zaman artmasını garanti eder. Ayrıca alanın artması için kısa kenarın artırılıp uzun kenarın da azaltılması gerekir. İfademdeki ikinci şart buydu.

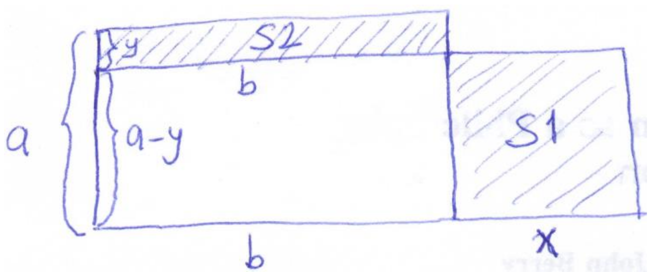
Ayşe: Tamam senin örneğini ele alalım. Ben uzun kenardan 5 çıkarıp kısa kenara 6 ekliyorum. Bu durumda çevre Ç=26 olurken alan A=30 olmaktadır. Bu durum senin son söylediğin ifadeyi çürütmektedir.

Ali: Ayşe haklı sanırım.

Osman: İfademi yeniden göz önüne almalıyım. Bir şekil üzerinde bunu göstermek daha mantıklı geliyor.

Ayşe: Şekil seni kurtaracak son çare gibi.

Osman: (Bu aşamada Osman'ın çizdiği şekile yer verilecektir.)



Şekil 7. Osman'ın çizimi

Kenar uzunlukları a ve b olan bir dikdörtgen alalım. Şekildeki gibi kenarlardan birini azaltıp diğerini artırırsam yeni oluşan dikdörtgenin alanı A=(a-y)(b+x) olur. Yeni oluşan dikdörtgenin alanının çevre arttığında her zaman başlangıçtaki alandan daha büyük olması için (ab-yb+ax-yx)-ab>0 olmalıdır. Şekli dikkatlice incelersek çıkardığım alan olan "yb" eklediğim alan olan "x(a-y)" den her zaman küçük olmalıdır ki alan her zaman büyük olsun. Yani, ax-yx > yb ve buradan (a-y).x>yb olur.

Bu aşamada Ali Osman'ın ispatına "dikdörtgenin eni ya da boyundan biri sabitken diğerinin artırılması alanın artmasına neden olmaktadır" şeklinde bir durum daha ekleyerek ispatı genelleştirmiştir. Ayrıca Osman'ın ispatı dikdörtgenin kenar uzunluklarının her ikisini de artırdığımız da işe yaramaktaydı. Bunun yanında Osman' Ayşe ve Fatma'nın karşı-örneğini dışlamak yerine onu göz-önüne alarak ispatını geliştirmektedir. Yani, ispatına kenar uzunluklarından biri azaltıldığında da alanın her zaman artacağı bir durumu eklemiştir. Böylece Osman hem ilkel iddiayı hem de ispatı geliştirmektedir. Bu aşama istisna-defetme aşamasıdır. Çünkü Osman, Fatma ve Ayşe'nin karşı örneğini canavar-defetme aşamasından farklı olarak reddetmemekte; onu kabul edip, ispatını ve iddiasını bu doğrultuda geliştirmektedir. Bu aşamaya bir ispat-analizi diyemeyiz. Çünkü iddia geliştirilmesine karşı hala mükemmelleştirilmemiştir.

2.6. Geliştirilmiş İddianın Oluşturulması

Osman: Şimdi alanlar için yaptığım bu genellemeyi kullanarak kenar uzunluklarında değişiklik yapıldığında alanın her zaman artacağı bir kural bulmaya çalışacağım.

Ali: Son yazdığın eşitsizliği göz önüne alalım. Eşitsizliğin her iki yanını da çıkarılan miktara bölelim.

Osman: Yani $\frac{(a-y)x}{y} > b$ dir. Bu ifadeyi düzenlersek $\frac{ax}{y} - x > b$ dir. Bu ise x artış y azalış miktarı olmak üzere azaltılan kenar uzunluğu ile x/y'nin çarpımı yeni dikdörtgenin artmış kenarından daha uzun olursa çevre artarken alan da artar diyebiliriz.

O halde bir dikdörtgenin çevresi arttığında alanının da her zaman artması için 3 durumdan söz edebiliriz.

1. Durum: dikdörtgenin eni ve boyunun her ikisinin de artması
2. Durum: dikdörtgenin eni ya da boyundan biri sabitken diğerinin de artması
3. Durum: artış miktarının azalış miktarından fazla olması şartıyla x artış y azalış miktarı olmak üzere azaltılan kenar uzunluğu ile x/y'nin çarpımı yeni dikdörtgenin artmış kenarından daha uzun olmalı.

Böylece iddiamızı "bir dikdörtgenin, eni ya da boyunun her ikisi de artarsa veya biri sabitken diğeri artarsa ya da artış miktarının azalış miktarından fazla olması şartıyla x artış y azalış miktarı olmak üzere azaltılan kenar uzunluğu ile x/y'nin çarpımı yeni dikdörtgenin artmış kenarından daha uzun alıyorsa bu durumunda çevre artarken alan da her zaman artar" şeklinde yeniden düzenleyebiliriz.

Bu son iddianın doğruluğu Osman'ın başta verdiği ispat ve Ayşe ve Fatma'nın karşı-örneği doğrultusunda geliştirilmiş ispat ile sağlanmaktadır. Bu aşamaya istisna-defetme aşamasından farklı olarak ispat-analizinin bir sonucudur diyebiliriz. Çünkü ilkel iddiamız istisna-defetme aşamasındaki gibi değişmektedir. Ancak bu aşamada Osman başlangıçta yaptığı ispatın adımlarını ve Fatma ve Ayşe'nin karşı-örnekleri doğrultusunda geliştirdiği ispatını göz önüne alarak iddiayı yeniden değiştirmekte ve bu yeni iddia için ispatının çalıştığını göstermektedir.

Bu çalışmada temel hatlarıyla özetlenen ve yukarıda da basitleştirilmiş bir senaryo ile somutlaştırılmaya çalışılan Lakatos'un matematiğe bakışının matematik eğitiminde "yenilikçi" olarak nitelendirilebilecek birçok çalışmayı etkilediği bilinmektedir (Atkins, 1997; Balacheff, 1991; Larsen & Zandieh, 2008; Sriraman, 2006). Bu çalışmalarda Lakatos'un yaklaşımı ya bir felsefi temel olarak ele alınmış ya da matematik öğrenme ortamlarını tasarlamada doğrudan bir rehber olarak değerlendirilmiştir. Çalışmanın bundan sonraki aşamasında, Lakatos'un matematiğin doğası ile ilgili yaklaşımının okul matematiğine ne şekilde yansıdığı, bu yaklaşımın kavramsal bir altyapı olarak öğrenme ortamlarını tasarlarken nasıl rehberlik edebileceği bağlamında tartışılmıştır.

3. Niçin Lakatos'un Modeli?

Matematiğin felsefi konumu ve epistemolojisi matematiğin öğretiminde her zaman büyük bir etkiye sahiptir (Steiner, 1987). Matematik felsefesi ve okul matematiği arasında doğrudan bir ilişki olmamasına karşın, farklı matematik felsefeleri eğitim uygulamalarında oldukça farklı sonuçlara sahiptirler (Ernest, 1991, s.111). Bu bağlamda okul matematiğini felsefesinden ayrı düşünmek oldukça güçtür. Bu konuda Thom (1973, s.204) *"aslında, biri istesin ya da istemesin, nadiren tutarlı olsa bile, tüm matematik pedagojisi bir matematik felsefesine dayanır"* sözü ile matematik felsefesi ve eğitimi arasındaki ilişkiyi vurgulamaktadır. Toumasis (1997) NCTM standartları ile matematik felsefesini karşılaştırdığı çalışmasında standartların daha çok yarı deneyselci felsefeyi benimsediğini ifade etmektedir. Bu nedenle NCTM standartları temelinde hazırlanan öğretim programları da haliyle yarı deneyselci matematik felsefesini benimsemiş olmaktadırlar. Ülkemizde 2004 yılında matematik öğretim programlarında yapılan reformlarda açıkça belirtilmese de NCTM'in standartlarının temel alındığı görülmektedir. Programda üzerinde durulan konulardan biri de öğrencilerin problem çözme, iletişim kurma, akıl yürütme ve ilişkilendirme gibi bazı önemli becerilerinin geliştirilmesidir. Öğrencilerin bu becerilerini geliştirmek için uygun öğretim ortamlarının tasarlanması ve uygulanması gereklidir (MEB, 2008). Atkins (1997) Lakatos'un modelinin matematik öğrenme ve öğretmede kullanılmasının NCTM'in (1989) de vurguladığı öğrencilerin matematiksel problemler çözdükleri, matematiksel düşündükleri, matematiksel iletişimler kurdukları ve matematiksel ilişkiler oluşturdukları ortamlar oluşturmaya yardımcı olacağını ifade etmektedir. Bu bağlamda matematik öğretim programının geliştirmeyi önerdiği her bir beceri ile Lakatos'un modeline göre hazırlanan bir ortam arasında ne tür bir ilişkinin olabileceği aşağıdaki şekilde tartışılabilir:

1. Lakatos'un modeline göre hazırlanan bir öğretim ortamı öğrencilerin problem çözme becerilerini geliştirmelerine yardımcı olabilir. Matematik öğretim programında problem çözme etkinliklerinde öğrencilerin düşüncelerini akranlarıyla ve öğretmenleriyle rahatlıkla değişik şekillerde ifade edebileceği ve problemleri farklı yollardan çözebileceği ortamların oluşturulması önerilmektedir (MEB, 2008). Bu bağlamda bu modele göre hazırlanmış bir

ortamda öğrenciler matematiksel bilgilerini oluştururken iddialarda bulunmakta, iddialarına yönelik ispatlar yapmakta, bu ispatlarını test etmekte, tanımlar önermekte, tahminlerde bulunmakta, karşı-örnekler öne sürmekte, hatalar yapmakta, iddialarını genelleştirmekte, kısacası bir matematiksel bilginin oluşması aşamalarını geçirmektedirler. Toumasis (1997) de "ispatlar ve çürütmeler" modeline göre hazırlanan ortamlarda matematik öğretiminde öğrencilerin güçlüklerle karşılaşarak, hatalar yaparak, tahminlerde bulunarak, iddialar geliştirerek matematik öğrendiklerini ifade etmektedir. Bu nedenle Lakatos'un "ispatlar ve çürütmeler" modeli göz önüne alındığında öğrencilerin problem çözme becerileri geliştirmelerine olanak sağlayan bir ortamın hazırlanmasını sağladığı söylenebilir.

2. Yeni öğretim programında geliştirilmesi önerilen diğer bir beceri ise iletişim becerisidir (MEB, 2008). Öğrencilerin matematiğe dayalı iletişim becerilerini geliştirmesi için, sınıf ortamında düşüncelerini akranlarıyla rahatça paylaşabilmeleri gerekir. Bu nedenle programda öğretmenin sınıfta öğrencilerin düşüncelerini açıklayabileceği ve tartışabileceği ortamları tasarlamasını önemi vurgulanmaktadır. Lakatos'un modeli göz önüne alındığında bu modele göre hazırlanmış bir öğrenme ortamında öğrenciler fikirlerini özgürce söyleyebilmekte, öğretmen ve akranlarıyla bu düşünceleri ve elde edilen sonuçları tartışabilmektedirler (Atkins, 1997).

3. Programın diğer bir amacı da öğrencilere kendilerinin de matematiksel düşünce üretebileceklerine, kendi başarı ve başarısızlıkları üzerinde kontrol sahibi olduklarına inanmalarını sağlamaktır. Bu inançla, öğrenciler akıl yürütmede ve düşüncelerini savunmada öz güvenlerini geliştirebilirler. Matematik derslerinde, öğrenci ve öğretmenin ifadeleri, sınıftaki öğrencilerin eleştirisine, sorgulamasına ve değerlendirmesine açık olmalıdır. Bunun sağlanabilmesi için karşılıklı saygının hâkim olduğu sınıf ortamlarının oluşturulması şarttır. Lakatos'un modeline göre hazırlanmış bir ortamda kazanan yoktur, her öğrenci fikrini özgürce ifade etmekte ve birbirlerini saygı içerisinde dinlemektedirler (Atkins, 1997). Bu ortamda öğrenciler hata yapsalar bile eleştirilmemekte ve birbirlerine bir üstünlük sağlamamaktadırlar.

4. Programda geliştirilmesi önerilen bir diğer beceri ise öğrencilerin matematiğin yararlarını anlayabilmelerine yardımcı olacak matematiksel kavram ve becerilerin hem birbirleriyle hem de okul işi ve dışı yaşantılarıyla bağ kurmalarını sağlayacak ilişkilendirme becerisidir. Sriraman (2006) matematik öğretmenlerinin evrensel amaçlarından birini öğrencilerine matematikte birbirinden ayrık olarak görünen konular arasında bir birlik olduğunu göstermek olarak ifade etmektedir. Bu bağlamda sınıf ortamının zengin matematiksel deneyimleri içeren Lakatos'un düşünce deneyimi olarak ifade ettiği iddia-ispat-çürütme temelinde hazırlanmasının öğretmenlerin bu evrensel amacı gerçekleştirmelerine yardımcı olabileceğini belirtmektedir. Bu nedenle Lakatos'un modeline göre hazırlanan bir öğrenme ortamı öğrencilerin matematiğin konularını hem kendi içinde hem de diğer disiplinlerle ilişkilendirmesine yardımcı olabilir.

Böylece matematik öğretim programının önerdiği öğrenme ortamları ile Lakatos'un "ispatlar ve çürütmeler" modeli temelinde hazırlanan öğrenme ortamlarının birçok örtüşen yönünün olduğu görülmektedir. Bu modele göre hazırlanmış bir öğrenme ortamı müfredatın öğrenciler tarafından geliştirmelerini bekledikleri birçok beceriyi geliştirmelerine yardımcı olacağı söylenebilir.

Lakatos'un modelinin matematik öğretiminde kullanılmasının bir diğer nedeni ise bu modele göre hazırlanan öğretim ortamlarının öğrencilere tümdengelim yerine tümevarım metodunu kullanarak bilgilerini yapılandırmalarına fırsat vermesidir (Sriraman, 2003). Özellikle geometri dersinde öğrenciler matematiksel keşif sürecinin yoksun bırakıldığı tümdengelim yöntemini kullanmaktadırlar. Oysa tümevarım gerçek dünyada önemli bir yere sahiptir. Fawcett (1938) Lakatos'un düşünce deneyimi modelinden çok önce bu modelin temeli olan iddia-ispat-çürütmeler sürecinde öğretim deneyimi yapısına sahip bir tartışma ortamında öğrencilerin uygun tanımlar oluşturarak, gerektiğinde geçerli aksiyomları seçerek ve matematik bilgilerini kullanarak kendi Euclid geometrilerini oluşturduklarını göstermiştir. Fawcett'in bu çalışması Lakatos'un modelinin sınıf ortamında uygulanabilirliğinin de bir göstergesidir (Sriraman, 2006). Lakatos'un modeline göre hazırlanan ortamlarda matematik öğrenen öğrenciler matematiğin iddia-ispat ve çürütmelerle geliştiğinin farkına varamayabilirler, ancak bu tür ortamlar öğretmenlere bir matematiksel bilginin oluşum aşamaları olarak iddia-ispat ve çürütmeler sürecinde matematik konularının öğretimini nasıl yapabileceklerine yönelik bir yol haritası sunmaktadır (Sriraman, 2003).

4. Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada, okullardaki yaygın matematik öğrenme-öğretme uygulamalarının reform dokümanlarındaki söylem ve tavsiyelerle hala çelişir görünmesindeki temel problemin matematiğin doğasına bakıştaki çarpıklıktan kaynaklanabileceği yönündeki görüşlerden hareket ederek, "doğru" görmenin sağlanması yönündeki çabalara bir katkı sağlamak amacıyla, matematiğin doğası ile ilgili "özgün" bir yaklaşım olarak değerlendirilen Lakatos'un modeli tanıtılmış, bu modelin okul matematiğine nasıl yansıdığı ve matematik öğretiminde nasıl kullanılabileceği tartışılmıştır.

Matematik felsefesi ve okul matematiği arasında doğrudan bir ilişki olmamasına karşın müfredatların hazırlanmasında dikkate alınan standartlar büyük ölçüde matematik felsefesine bağlıdır (Lerman, 1983). Müfredatlarda yapılan reform hareketlerinden önce matematik öğretimi ve öğreniminin daha çok mutlakçı matematik felsefesini temel aldığı ifade edilmektedir (Toumasis, 1997). Reform hareketleriyle birlikte hazırlanan matematik müfredatlarının ise NCTM'in belirlediği standartları göz önüne aldığı görülmektedir. NCTM'in belirlediği standartlar ile yarı deneyselci felsefe arasında yakın bir ilişkinin olduğu yapılan çalışmalarda ifade edilmektedir (Toumasis, 1997). Bu bağlamda bu çalışma hem yenilenen matematik müfredatlarının dayandığı temel felsefiyi tanıtmakta hem de bu felsefenin sınıflardaki öğrenme ortamlarını tasarlamada nasıl rehberlik edebileceğini göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin verilen bir iddia karşısında geçirdikleri matematiksel süreçleri belirlemek ve açıklamak, onların matematik bilgilerini nasıl şekillendirdikleri konusunda bizlere önemli ipuçları verebilir. Lakatos, modelinde matematiksel bilginin iddia-ispat-çürütmeler süreci sonucunda gelişip değiştiğini ifade etmektedir. Öğrenciler canavar-defetme, istisna-defetme ve ispat analizi aşamalarında zengin matematiksel deneyimler yaşamakta ve farklı fikirler oluşturmaktadır. Bu nedenle Lakatos'un modeli bize öğrencilerin sınıf ortamında gerçekleştirdikleri matematiksel etkinlikleri tanımlamaya ve açıklamaya yardımcı bir yol haritası sunmaktadır (Larsen &Zandieh, 2008).

Matematik öğretimindeki reform hareketleri sonucu üzerinde durulan konulardan biri de öğrenme ve öğretme ortamlarının tasarlanmasıdır. Yapılandırmacılık yaklaşımını temel alan (yani temelleri yarı deneyselcilik felsefesine dayanan) öğretim programlarında, öğrenme ortamlarının öğrencilerin kendi bireysel anlamalarını sağlayacak şekilde hazırlanmasının önemi vurgulanmaktadır (MEB, 2008). Bu tür ortamlar problem-keşfetme-hipotez kurma-doğrulama-genelleme-ilişkilendirme süreçlerini içermelidir. Literatürde yapılan çalışmalar incelendiğinde matematik öğretim programlarının önerdiği öğrenme ortamları ile Lakatos'un "ispatlar ve çürütmeler" modeli temelinde hazırlanan öğrenme ortamlarının örtüşen birçok yönünün olduğu ifade edilmektedir (Toumasis, 1997; Sriraman, 2003; Sriraman, 2006; Larsen & Zandieh, 2008; Komatsu, 2010).

Bu çalışmada Lakatos'un kitabında olduğu gibi hayali bir sınıf tasarlanmıştır. Senaryoda ele alınan iddianın gerçek sınıf ortamında kullanılmaması çalışmanın bir eksikliği değil, aksine sınıf ortamında ortaya çıkabilecek birçok farklı durumu yansıtmasından ve modelin tanıtılmasını sağlamasından dolayı bir zenginlik olarak düşünülebilir. Bunun yanında senaryodaki argümanlar oluşturulurken Ma (1999) ve Bütün (2005)'ün çalışmalarındaki bulgulardan faydalanılması, senaryonun bütünüyle hayal ürünü olmadığının da bir göstergesidir. Farklı bir araştırma konusu olarak, bu senaryo gerçek sınıf ortamında uygulandığında Lakatos'un modelinin hangi aşamalarının ne kadar çalıştığı ya da senaryodan farklı olarak ne tür durumların ortaya çıkabileceği ileride yapılacak çalışmalarda belirlenebilir.

Özetin özeti, bu çalışmada çerçevesi çizilen matematik felsefesi yaklaşımının ve onun öğretime ne şekilde yansıtılabileceğine ilişkin tartışmaların özellikle ülkemiz bağlamında matematiğin eğitimiyle ilgilenenlerin matematiğin doğasıyla ilgili süregelen bakışlarını bir çırpıda etkileyeceğini düşünmek oldukça iyimser bir beklenti olacaktır. Matematik felsefesi ile okul matematiğinin ilişkisi üzerine benzeri araştırmaların yaygınlaşması ve bu çalışmaların hedeflenen kitleye ulaşılabilirliğinin artırılmasıyla bu güçlüğün aşılabileceği düşünülmektedir.

An Adaptation of the Lakatosian Knowledge Development Model to School Mathematics

Extended Abstract

The first part of this study introduces the opinions about what mathematics philosophy is and summarized two different points of views on the nature of mathematical knowledge; these are known as "absolutism" and "quasi-empricism" (or "fallibilism"). In the next section, within the framework of *Proofs and Refutations*, which is source of inspiration of the fallibilist philosophy, the original approach of Lakatos to the development of mathematical knowledge was explained in detail. In the third part, a scenario was established in order to better understand Lakatos' approach. In this scenario, in order to demonstrate how mathematical knowledge was developed, a context which could be evaluated within the scope of elementary school mathematics was examined and an imaginary classroom environment composed of dialogues was established. In the last part of the study, the researchers examined how Lakatos' approach to the nature of mathematics is reflected in school mathematics, as well as how this approach will act as a guide while designing learning environments as a conceptual framework.

When it is considered that the subject of mathematics philosophy is a neglected area in the studies conducted about mathematics education in our country, this study may be regarded as an attempt to remove the mentioned deficiency. On the other hand, we also think that this research may be used as a basic resource for the mathematics philosophy courses given in the programs of mathematics teacher training, within the scope of the changes in license programs for teacher training which were implemented during the 2006/2007 education year in our country.

Lakatos's Model on the Development of Mathematical Knowledge

In his book, *Proofs and Refutations*, Lakatos presents an imaginary discourse between the students and teacher in an ideal classroom. This discourse occurs in the historical context of the problem of classifying a regular polyhedral and constructs a proof for the relationship between the vertices, faces and edges of a regular polyhedral given by Euler as V+F-E=2. The process of discovery begins with an initial conjecture, referred to by Lakatos as the *primitive conjecture*. This conjecture is often called the Descartes-Euler conjecture. After the primitive conjecture the teacher presents a proof attributed to Cauchy. Immediately upon hearing this proof, the students offer counterexamples. Lakatos classifies counterexamples as local and global in his book. Local counterexamples contradict the specific lemmas or constructions which were used in the proof without being relevant to the main conjecture, but global counterexamples contradict the main conjecture. Moreover, Lakatos mentioned two methods in his book. One method of dealing with the counterexamples, defined as *monster-barring* by Lakatos, was to reject them. By this method, one can eliminate any counterexample to the original conjecture by a sometimes deft but always ad hoc rejection and redefine the original conjecture. For that reason, as Lakatos indicates in his book, the method of monster-barring is always ad hoc. The other method is *exception-barring,* which consists of using the exceptions to the theorem in order to find a safe domain of validity for the theorem. In the exception, barring method counterexamples are examined and then excluded, supporting examples are examined, and the domain of the conjecture is then limited to these.

In the following part of this study, we established an imaginary class similar to the approach in Lakatos' writing. In this class, dialogues between 4 students and 1 teacher were focused on the subject of "measurement of area and circumference," which can be evaluated within the scope of elementary school mathematics, and the researchers tested how a conjecture is formulated by the teacher and students. We think that by following such a technique, we can closely replicate Lakatos' method.

Scenario

An imaginary teacher starts the classroom discussion conjecturing that: "*if the perimeter of a rectangle increases, the rectangle's area always increases"*. After hearing this conjecture, one of the students starts to validate the conjecture and suggests a proof. Throughout the discussion of the conjectures, counter-examples are put forth by other students.

Why Lakatos's Model?

In the mathematics curriculum, the skills to be improved are problem solving, communication, reasoning and connections. Atkins (1997) claims that an environment prepared according to Lakatos's method can help the development of these skills. In this respect, the relation between the environment prepared according to Lakatos's method and each of these skills is discussed.

1. Students suggest a conjecture, prove their conjecture, test their proofs, suggest definitions, create counterexamples, make mistakes and generalize conjectures; soon, they have completed the steps of forming mathematical knowledge as suggested by Lakatos's assertions concerning the formalization of mathematics knowledge. Toumasis's (1997) study has parallel results. For that reason, it is argued that such an environment can improve students' problem solving skills.
2. In the environment of Lakatos's method, students can express their feelings, discuss their opinions and argue with the teacher and peers about their views (Atkins, 1997). For that reason this environment can improve students' communication skills.
3. In mathematics lessons, both the students' and teachers' statements must be open to the criticism, questioning, and evaluation of peers. In order to prove a conjecture, a respectful learning environment must be designed. In the environment of Lakatos's method, there is no winner; each student can express himself clearly, and the class listens to each other respectfully (Atkins, 1997). Even if they make mistakes, students are not criticized or humiliated.

4. Sriraman (2006) claims that one of the global aims of mathematics teachers is showing students the connections between mathematics subjects. In this respect, preparing the environment based on conjecture-proof-refutation, which Lakatos called “thought experiment,” can help the teacher to implement this global aim.

Therefore, it is observed that there are many similarities between the environment mathematics curriculum proposed and the environment prepared according to Lakatos’s model. The other reason for using Lakatos’s model in mathematics teaching is that this kind of environment gives the students the opportunity to improve their knowledge by using inductive method instead of the deductive method (Sriraman, 2003). Moreover, in his study, Fawcett (1938) showed that during the process of conjecture-proof-refutation, students make their own Euclidean geometry. Fawcett’s study is an indicator of the suitability of Lakatos’s model in a real classroom environment. In addition, in the environment of Lakatos’s model, students may not be aware of the fact that their mathematics knowledge improves during the process of conjecture-proof-refutation, yet this kind of environments serves as a guide for teachers to understand how mathematical knowledge occurs.

Results and Implications

In this study, an imaginary class is designed according to Lakatos’ (1976) model. Not using the conjecture in the scenario in environment of a real class can be considered as not a deficiency of the study, but as richness in terms of reflecting many different situations that may appear in class environments. Moreover, because the findings of the studies conducted by Ma (1999) and Bütün (2005) are utilized while establishing the arguments in the scenario, the scenario is not a complete imaginary. As a different subject of research, it can be determined in the future studies which and how the stages of Lakatos model work when this scenario is applied in a real classroom, as well as what kind of situations may occur differently from the scenario.

Finally, it is hoped that the approach toward mathematics philosophy defined in this study and the discussions how this approach can be reflected in teaching will have an immediate effect on the views of individuals interested in mathematics education concerning the nature of mathematics, especially in the context of our country. We think that this difficulty will be overcome by generalizing similar research on the association of mathematics philosophy with mathematics education and increasing the access of targeted populations to these studies.

Key Word: Philosophy of mathematics, quasi-empiricism, designing environments for learning mathematics

Kaynaklar/References

Atkins, S. L. (1997). Lakatos' Proofs and Refutations comes alive in an elementary classroom. *School Science and Mathematics*, 97 (3), 150-154.

Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi.* Ankara: Harf Yayınları.

Balacheff, N. (1991). Treatment of refutations: Aspects of the complexity of a constructivist approach to mathematics learning. In E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 89-110). The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Battista, M. (1994). Teacher beliefs and the reform movement in mathematics education. *Phi Delta Kappan*, 75, 462-470.

Bütün, M. (2005). *İlköğretim Matematik Öğretmenlerinin Alan Eğitimi Bilgilerinin Nitelikleri Üzerine Bir Çalışma*. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, KTÜ, Fen Bilimleri Enstitüsü, Trabzon.

Davis, P.J. & Hersh, R. (1980). *The Mathematical Experience*. Harmondsworth: Penguin.

Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education*. London: The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. Albany, New York: State University of New York Press.

Ernest, P. (2004). Images of mathematics, values and gender: A philosophical perspective. In B. Allen & S. Johnston-Wilder (Eds.), *Mathematics education: Exploring the culture of learning* (pp. 11-25). London: Routledge Falmer.

Fawcett, H. (1938). *The nature of proof. Thirteenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics.* New York: Bureau of Publications.

Gür, B. (2004). Matematik Felsefesine Giriş. In B. Gür (Eds.), *Matematik Felsefesi* (pp. 13-71). Ankara: Orient Yayınları.

Handal, B. (2003). Philosophies and Pedagogies of Mathematics. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 17.

Hersh, R. (1979). Some Proposals for Reviving the Philosophy of Mathematics. *Advances in Mathematics* , 31, 31-50.

Kitcher, P. & Aspray, W. (2004). An Opinionated Introduction. In W. Aspray & P. Kitcher (Eds.), *History and Philosophy of Modern Mathematics* (pp. 3-57). Minneapolis: University of Minnesota Press.

Komatsu, K. (2010). Counter-examples for Refinement of Conjectures and Proofs in Primary School Mathematics. *The Journal of Mathematical Behavior*. doi:10.1016/j.jmathb.2010.01.003

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: The logic of Mathematics discovery.* Cambridge:Cambridge University Press.

Lampert, M. (1990). When the problem is not the question and the solution is not the answer: Mathematical knowing and teaching. *American Educational Research Journal*, 27, 29-63.

Larsen, S. & Zandieh, M. (2008). Proofs and refutations in the undergraduate mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 205-216.

Lerman, B. (1983). Problem-solving or knowledge-centered: the influence of philosophy on mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 14(1), 59-66.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Press.

MEB (2008). *İlköğretim Matematik Dersi 6-8. Sınıflar Öğretim Programı ve Kılavuzu.* Ankara: Talim Terbiye Kurulu Yayınları.

NCTM (1989). Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Reston, Virginia: NCTM.

NCTM (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Pálsdóttir, G. & Sriraman, B. (2010). Commentary 3 on Feminist Pedagogy and Mathematics. *In Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers*. Berlin/Heidelberg: Springer Science. pp.467-476

Sriraman, B. (2003). Can Mathematical Discovery Fill The Existential Void? The Use of Conjecture, Proof and Refutation in a High School Classroom. *Mathematics in School, 32*(2), 2-6.

Sriraman, B. (2006). An Ode to Imre Lakatos: Quasi-thought experiments to bridge the Ideal and actual mathematics classrooms. *Interchange*, 37(1-2), 151-178.

Steiner, H. G. (1987). Philosophical and Epistemological Aspects of Mathematics and their Interaction with Theory and Practice in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 7(1), 7-13.

Thom, R. (1973). Modern Mathematics: Does it Exist?. In A.G. Howson (Ed.), *Developments in Mathematics Education (pp. 194-209).* Cambridge: Cambridge University Press.

Thompson, A. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In D. A. Grouws (Editör), Handbook of Researeh on Mathematics Teaching and Learning. ss.127-146.

Toumasis, C. (1997). The NCTM standards and the philosophy of mathematics. *Studies in Philosophy and Education*, 16(3), 317-330.

Yıldırım, C. (2000). *Matematiksel Düşünme*. İstanbul: Remzi Kitabevi.

Yuxin, Z. (1990). From the Logic of Mathematical Discovery to the Methodology of Scientific Research Programmes. *British Journal for the Philosophy of Science,* 41(3), 377-399.