Öğretmen Adaylarının Pedagojik İçerik Bilgisi: Öğretimsel Açıklamalar

Zülbiye Toluk Uçar[1]

Özet

Matematik bilgisi ve matematiğe özgü pedagoji bilgisi matematiği öğretmek için gerekli olan en önemli bilgilerdir. Son yıllardaki öğrencilerin matematikteki başarısızlıkları öğretmenlerin bu bilgi türlerine oldukça fazla önem verilmesine ve bu konuda pek çok araştırma yapılmasına neden olmuştur. Bu araştırmada ilköğretim matematik ve sınıf öğretmeni adaylarının matematiksel durumlara vermiş oldukları öğretimsel açıklamaların incelenmesi ve bu açıklamalar ile matematiksel bilgileri arasındaki etkileşimin tespit edilmesi amaçlanmıştır. Araştırmaya 37 sınıf ve 46 matematik öğretmeni adayı katılmıştır. Veri analizi öğretmen adaylarının bazı konularda matematiksel bilgilerinin yanlış olduğunu, matematiksel anlamalarının genelde işlemsel düzeyde olduğunu ve buna bağlı olarak verdikleri öğretimsel açıklamaların da işlemsel düzeyde olduğunu göstermektedir. Ayrıca, öğretmen adaylarının genelde kuralları vermeyi öğretimsel açıklama için yeterli gördükleri, bu kuralların neden böyle olduğunu açıklamaya gerek duymadıkları görülmüştür. Matematiksel bilgileri yetersiz olan öğretmen adaylarının açıklamalarında bazen bir kaçış yolu olarak biçimsel hilelere de başvurdukları belirlenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Alanı öğretme bilgisi, öğretimsel açıklamalar, matematik eğitimi

1. Giriş

Son yıllarda yapılan birçok araştırma öğretmen adaylarının üniversite öncesinden ve üniversite matematik derslerinden getirdiği matematiksel anlamaların ilköğretim düzeyinde öğretim yapabilmeleri için yetersiz olduğunu göstermiştir (Ball, 1990a, 1990b; Even, 1993; Ma, 1999; Tirosh, 2000; Toluk Uçar, 2009). Bu çalışmalarda, öğretmen adayları genelde kural ve yöntemlerin ne olduğunu ve nasıl uygulanacağını bilmesine rağmen, verilen durumların altında yatan anlama uygun matematiksel açıklamalar oluşturamamışlardır. Matematik öğretmeni olabilmek için, öğretmen adayları derin bir alan bilgisi, alana özgü pedagoji bilgisi ve öğrencilerin bilişsel gelişim bilgisine sahip olmalıdırlar (Shulman, 1986; Ball, 1990a; Carpenter, Fennema and Franke, 1996; Ma, 1999). Bu üç bilgi türü öğretmenin öğretimini planlarken ve uygularken kullandığı daha geniş bir bilgi sisteminin birer parçasıdır (Verschafel, Janssens, and Janssens, 2005). Ayrıca, Borko, Eisenhart, Brown, Underhill, Jones ve Agard (1992) alan bilgisi ve alana özgü pedagoji bilgisinin, alanı öğretme işinin temelini oluşturduğunu ileri sürmüşlerdir.

[1] Doç. Dr., AİBÜ, Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, *ztoluk@yahoo.com*

Alan bilgisi, matematikteki anahtar kavram, ilke ve kurallarda ustalık, problem çözme teknik ve stratejilerini içerir. Ball (1991) öğretmenin hem matematik bilgisine (*knowledge of mathematics*) hem de matematik hakkında bilgiye (*knowledge about* mathematics) sahip olması gerektiğini vurgulamıştır. Bu bilgi türünde kritik olan öğretmenin matematiği anlama düzeyidir (Ball, 1990a; Borko et al., 1992; Ma, 1999; Kinach, 2002a). Ball'a (1990a) göre, öğretmenlerin sahip olduğu kavram ve işlem bilgisinin doğru olması gerektiği gibi; bu bilgilerin altında yatan ilkeleri de anlamaları gerekmektedir. Bunlara ek olarak, Ball öğretmenlerin matematiksel düşünceler arasındaki ilişkileri hem anlamaları hem de takdir etmeleri gerektiğini ileri sürmektedir. Öğretmenin sahip olması gereken diğer bilgi türü olan pedagojik içerik bilgisi ya da alana özgü pedagoji bilgisi alan bilgisine bağlıdır (McDiarmid, Ball, and Anderson, 1989). Bu bilgi türü, matematiği öğrencilerin daha iyi anlayacakları hale dönüştürmenin yollarını, öğrencilerin kavram yanılgıları, önkavramaları ve matematiksel gelişimlerini bilmeyi içerir. Bir başka deyişle, pedagojik içerik bilgisi matematiksel kavramların en kullanışlı temsil biçimlerinin ne olduğunu bilmeyi; matematiksel durumlara en güçlü örnek ve açıklamaları verebilmeyi; matematiksel kavramların öğrenciler için güçlük derecesinin ne olduğunu bilmeyi içerir.

Matematiğe özgü pedagoji bilgisinin en önemli boyutlarından biri matematiksel kural ve kavramlar için iyi bir öğretimsel açıklama verebilmektir. Yapılan araştırmalar öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kullandıkları öğretimsel açıklamaların genellikle anlamadan çok ezbere dayalı olduğunu ve dolayısıyla kural ve işlem odaklı olduğunu göstermektedir (Henningsen ve Stein, 1997; Kinach, 2002a, 2002b; Kılcan, 2006). Öğretmenlerin öğretimsel açıklamalarının kural ve işlem odaklı olmasının birçok nedeni olabilir. Bu nedenlerden bazıları öğretmenlerin matematik bilgilerinin yetersizliği ve matematiğe ilişkin inançlarıdır (Borko ve Putnam, 1996; Prawat, 1992; Richardson, 1996; Thompson, 1992). Eğer öğretmenin matematik bilgisi işlemsel düzeyde ise genelde verdiği açıklamalar da buna paralel olarak işlemsel düzeyde olmaktadır. Bununla birlikte, öğretmen matematiğin anlamsız kurallar bütünü olduğu düşüncesine sahipse, öğrencilerinden de bu kuralları anlamadan ezberlemelerini beklemektedir.

Pedagojik içerik bilgisi alan bilgisine bağlıdır. Çünkü öğretmenin kavramsal açıdan doğru temsiller oluşturabilmesi için öncelikle kendisi bu kavram ya da işlemleri kavramsal düzeyde anlamalıdır (McDiarmid, Ball, and Anderson, 1989; Borko et al., 1992; Ma, 1999). O halde, öğretmen yetiştirme programları öğretmen adaylarının matematiği anlama düzeylerini öylesine derinleştirmeli ki bu anlama matematiği anlamak için öğretme bilgisine dönüşebilsin (Kinach, 2002a). Shulman da (1986), pedagojik içerik bilgisini, alan bilgisinin öğretme bilgisine dönüşmüş hali olarak tanımlamıştır. Kinach (2002a) bu dönüştürme sürecine ilişkin birkaç önemli soruyu gündeme getirmiştir. Öğretmen adaylarının matematik bilgilerinin niteliğinin önemi nedir? Alan bilgilerinin verdikleri öğretimsel açıklamaların niteliği üzerindeki etkisi nedir? Kinach bu sorulardan yola çıkarak Skemp ve Perkins ve Simmon'ın matematik bilgisini sınıflandırmalarını temel almış, matematik ve pedagojik içerik bilgisinin niteliğini değerlendirmek amacıyla bir değerlendirme çerçevesi geliştirmiştir (Kinach, 2002b; Skemp, 1978; Perkins ve Simmons, 1988). Bu çerçevede işlemsel (instrumental) anlama *ne* ve *nasıl* bilgisi ya da *nedensiz kurallar* bilgisini, ilişkisel (relational) anlama ise *ne* ve *nasıl*'ın arkasında yatan nedenleri anlamayı içerir. Tablo 1'de Kinach'ın geliştirdiği anlama çerçevesindeki seviyeler verilmiştir. Kinach işlemsel anlamayı, yöntem, kural ve işlemlerden oluşan *konu-düzeyi* anlama olarak tanımlamaktadır (Kinach, 2002a). Kinach'a göre ilişkisel anlama ise 3 anlama seviyesinden oluşmaktadır. Bunlar genelleştirilmiş düşünceler olan kavram ve yapılar hakkında deneyim ve bilgileri içeren *kavram-düzeyi* anlama, genel ve alana özgü stratejileri ve kendi düşünce sürecini denetlemek için kullanılan deneyimsel şemaları içeren *problem çözme-düzeyi* anlama ve kanıtlama, açıklamalarını gerekçelendirmeyi içeren *epistemik-düzey* anlamadır. İlişkisel anlamayı oluşturan 3 anlama düzeyi, her biri o alanı bilmenin farklı yönlerini yansıtsa da, üçü birlikte bir kişinin o alanda sahip olabileceği en derin anlamayı gösterirken, işlemsel anlama ise en yüzeysel anlamayı içerir. Ayrıca, işlemsel anlama pasif şekilde öğrenilen, birbirinden kopuk bilgiye dayanırken, ilişkisel anlama ise öğrencilerin aktif bir şekilde örüntü ve ilişkileri belirleme, analiz etme ve genellemelere varma yoluyla kazandıkları bilgiye dayanır (Kinach, 2002a, 2002b).

Tablo 1. Kinach'ın geliştirdiği anlama seviyeleri

	İşlemsel Anlama	Kavramsal Anlama
Anlama Düzeyleri	*Konu Düzeyi*: algoritmalar, terimler, kurallar, işlemler bilgisi ve yüzeysel beceriler	*1. Kavram Düzeyi*: matematikte inceleme ve araştırma yapabilmeyi yönlendirecek, tanımlayacak ve sınırlayacak genel düşünceler hakkında bilgi ve deneyim *2. Problem Çözme Düzeyi*: kendi düşünce çizgisini denetleyebilecek genel ve konuya özgü stratejiler ve yol gösterici şemalar *3. Epistemik Düzey*: bir disiplinde kanıtlama ve gerekçelendirme

Pedagojik içerik bilgisinin, matematik bilgisinin öğretime uygun biçime dönüştürülmüş hali olduğu düşünülürse, bu bilginin öğretmenin matematik bilgisinin niteliğinden etkilendiği sonucuna varılabilir. Bu bağlamda, öğretmen adaylarının pedagojik içerik bilgisi incelenirken, alan bilgisinin de dikkate alınmasının gerekliliği ortaya çıkmaktadır. O halde, öğretmenlerin matematiksel kavramlara vermiş olduğu öğretimsel açıklamalar hakkında elde edilen bilgiler, onların matematik bilgileri üzerine de bir ışık tutacaktır. Türkiye'de öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamaları üzerine yapılmış bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu çalışmada, hem öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamaları incelenecek hem de öğretimsel açıklamalar bağlamında öğretmen adaylarının matematik bilgileri hakkında değerlendirmeler yapılacaktır.

1.1. Araştırmanın Amacı

Bu çalışmanın amacı sınıf ve matematik öğretmeni adaylarının matematik bilgileri ve oluşturdukları öğretimsel açıklamaları değerlendirmektir. Bu araştırmada öğretmen adaylarının matematiksel durumlara vermiş oldukları öğretimsel açıklamaların düzeyleri Kinach'ın matematik ve pedagojik içerik bilgisinin niteliğini değerlendirme çerçevesine göre incelenerek bu açıklamalarla matematiksel bilgileri arasındaki etkileşim belirlenmiştir.

2. Yöntem

2.1. Katılımcılar

Araştırmaya Batı Karadeniz bölgesindeki bir üniversitenin Sınıf ve İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programlarında okuyan 83 öğretmen adayı katılmıştır. Katılımcıların 37'si sınıf öğretmeni adayı (SÖA), 46'sı ise matematik öğretmeni adayıdır (MÖA). Katılımcıları üçüncü sınıfta Matematik Öğretimi 1 ve Özel Öğretim Yöntemleri 1 dersine devam eden üçüncü sınıf öğretmen adayları oluşturmuştur.

2.2. Veri Toplama Süreci

Sınıf ve matematik öğretmeni adaylarına altı açık uçlu sorudan oluşan iki test uygulanmıştır. Testlerdeki 4 soru ortak, son iki soru ise farklıdır. Çalışmanın amacı sınıf ve öğretmen adaylarını karşılaştırmak olmadığı için ve öğretmen adaylarının bilgi düzeyi göz önüne alınarak bu sorular farklı hazırlanmıştır. Tablo 2'de öğretmen adaylarına sorulan sorular verilmiştir. Testlerdeki ortak sorular kesirlerle işlemler (toplama, çıkarma, çarpma ve bölme) ile ilgilidir. Sınıf öğretmeni adaylarına uygulanan testteki beşinci soru sıfır sayısının tek veya çift olması ve altıncı soru ise çemberin çevre formülü ile ilgilidir. Matematik öğretmeni adaylarına uygulanan testteki beşinci soru iki negatif sayının çarpımının pozitif olması ve altıncı soru ise sıfır faktöriyelin 1 olması ile ilgilidir. Testte öğretmen adaylarından matematiksel bir kavramı ilk kez öğrenen bir öğrenciye nasıl açıklayacaklarını detaylı bir şekilde yazmaları istenmiştir.

Tablo 2. Öğretmen adaylarına sorulan sorular

Sorular	SÖA	MÖA
$\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$	√	√
$\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$	√	√
$\frac{4}{5}\times\frac{3}{2}=\frac{6}{5}$	√	√
$\frac{6}{4}\div\frac{1}{2}=3$	√	√
Sıfırın bir tek sayı mı yoksa çift sayı mı olduğunu	√	
r yarıçaplı bir çemberin çevre formülünün $2\pi r$ olduğunu	√	
(-2) × (-3)= (+6)		√
0!=1		√

Veriler öğretmen adaylarından yazılı olarak 2009–2010 öğretim yılının güz döneminin sonunda toplanmıştır. Öğretmen adaylarına soruları cevaplamaları için yaklaşık 1 saat süre verilmiş ve toplanan verilerin değerlendirme amaçlı kullanılmayacağı belirtilmiştir. Ayrıca, katılımcılara hiçbir soruyu boş bırakmamaları söylenmiş, eğer soru hakkında hiçbir bilgileri yoksa bunu da test kâğıdına yazmaları belirtilmiştir. Testin sonunda, öğretmen adaylarından soruları cevaplarken nasıl hissettiklerini de yazmaları istenmiştir.

2.3. Verilerin Analizi

Veri analizinde Kinach'ın geliştirmiş olduğu Anlama Düzeyi Çerçevesi temel alınmıştır. Öğretmen adaylarının vermiş olduğu açıklamalar bu çerçevedeki 4 anlama düzeyi temel alınarak kodlanmıştır (Kinach, 2002a, 2002b). Öncellikle cevaplar matematiksel açıdan doğru ya da yanlış olmaları açısından değerlendirilmiştir. Daha sonra doğru cevaplar, çerçevedeki 4 anlama düzeyine göre kodlanmıştır. Eğer öğretmen adayı açıklamasında sadece kuralın nasıl uygulanacağını adım adım anlattıysa ya da durumu anlamsız matematiksel olmayan biçimsel hilelerle açıkladıysa bu konu düzeyi anlama olarak kodlandı. Öğretmen adayının açıklamasında kavramın ya da sembollerin özelliklerini ve farklı anlamlarını kullandıysa bu kavram düzeyi anlama olarak kodlandı. Eğer; açıklamasında kavramın ya da sembollerin farklı anlamlarını bir problem durumu ve şekil ile desteklediyse bu problem çözme düzeyi anlama ve son olarak, açıklamasını kuralın neden öyle olduğunu altında yatan matematiksel prensiplere göre gerekçeleriyle birlikte desteklediyse epistemik düzey anlama olarak kodlanmıştır. Bulgular, öğretmen adaylarının yazdıkları açıklamalardan doğrudan alıntılarla desteklenmiştir.

3. Bulgular

Bulgular aşağıdaki başlıklar altında sunulmuştur:

- Öğretimsel açıklamaların anlama düzeylerine dağılımı
- Kesirlerdeki işlemlerin öğretimsel açıklamaları
- Sıfır ile ilgili öğretimsel açıklamalar
- Çemberin çevre formülü ile ilgili öğretimsel açıklamalar
- İki negatif sayının çarpımı ile ilgili öğretimsel açıklamalar
- Öğretim hileleri
- Öğretmen adaylarının açıklamaları hakkındaki duyguları

3.1. Öğretimsel Açıklamaların Anlama Düzeylerine Dağılımı

Analizlerin sonucunda, 12 (% 32) sınıf öğretmeni adayının sıfırın bir çift sayı olduğunu belirleyemediği görülmüştür. Bu cevaplar elendikten sonra, bütün sorulardan toplam 486 öğretimsel açıklama elde edilmiştir. Tablo 3'de araştırmada ortaya çıkan öğretimsel açıklamaların anlama seviyelerine dağılımı verilmiştir. Öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamalarının % 69'unun işlemsel yani konu düzeyi açıklama olduğu belirlenmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının oluşturduğu açıklamaların % 36'sı kavramsal düzeydeyken, sınıf öğretmeni adaylarının açıklamalarının % 21'i kavramsal düzeyde olmuştur. Ayrıca, öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamalarının sadece % 5'i yeterli düzeyde olmuştur. Bir başka deyişle toplam açıklamaların sadece % 5'inde, söz konusu matematiksel işlem ya da kuralın neden öyle olduğu gerekçeleriyle birlikte sunulmuştur.

Tablo 3. Öğretimsel açıklamaların Kinach'ın anlama seviyelerine dağılımı

Düzeyler	SÖA		MÖA		Toplam	
	Sayı	%	Sayı	%	Sayı	%
Konu	166	79	176	64	333	69
Kavram	29	14	65	24	96	20
Problem çözme	12	6	20	7	35	7
Epistemik	3	1	15	5	22	5

3.2. Kesirlerdeki İşlemlerin Öğretimsel Açıklamaları

Kesirlerdeki işlemleri açıklamada öğretmen adayları çoğunlukla işlemsel anlama sergilemişlerdir. Tablo 4'de öğretmen adaylarının oluşturdukları öğretimsel açıklamaların anlama seviyelerine dağılımı verilmiştir. Hemen hemen bütün sınıf öğretmeni adayları kesirlerde çarpma ve bölme işlemlerini açıklayamamış ve dört işlemden hiçbiri için epistemik düzeyde açıklama verememiştir. Matematik öğretmeni adayları sınıf öğretmeni adaylarına göre daha iyi bir performans sergilese de, onların da ancak üçte biri kesirlerde dört işlem için kavramsal düzeyde açıklamada bulunabilmişlerdir. Öğretmen adaylarının açıklamaları payda eşitleme yöntemini anlamadıklarını göstermiştir. Payda eşitlemenin neden gerekli olduğunu ve ortak payda bulmanın ne anlama geldiğini açıklayamamışlardır. Genelde öğretmen adayları payda eşitlemeyi bütünleri eşitlemek ile karıştırmışlardır. Ayrıca, sınıf öğretmeni adayları açıklamalarında toplama ve çıkarma işlemlerinde payda eşitleme yönteminin doğru uygulanmasına odaklanırken, çarpma ve bölme işlemlerinde payda eşitlemeye gerek olmadığını sıkça vurgulamışlardır. Sınıf öğretmeni adayları, kesirlerdeki işlemleri açıklarken o işlemin neden öyle olduğunu açıklamak yerine, verilen cevabın nasıl elde edileceğini göstermeye çalışmışlardır.

Tablo 4. Öğretmen adaylarının kesirlerle işlemlere vermiş oldukları açıklamaların düzeylere dağılımının yüzdeleri

Düzeyler	SÖA				MÖA			
	+	-	×	÷	+	-	×	÷
Konu	73	84	94	94	67	67	65	67
Kavram	22	11	3	3	24	24	15	20
Problem çözme	5	5	3	3	7	7	20	4
Epistemik	0	0	0	0	2	2	0	9

Sınıf öğretmeni adaylarının % 14'ü kesirlerle ilgili konuları açıklamanın çok zor olduğunu ifade ederken, matematik öğretmeni adaylarının % 85'i kesirler hakkında çok şey bilmediklerini ve yazdıkları açıklamaların yeterli olmadığını fark ettiklerini ifade etmişlerdir. Matematik öğretmeni adayları test kâğıtlarına soruları cevaplarken çok zorlandıklarını ve bu konuları ezberlemiş olduklarını fark ettiklerini not düşmüşlerdir. Bunun aksine, çok az sayıda sınıf öğretmeni adayı bu tür ifadelerde bulunmuşlardır. Bu bağlamda, sınıf öğretmeni adaylarının iyi bir açıklama için işlemin arkasında yatan anlam ve ilkelere hiç bir şekilde atıfta bulunmadan bir şekil çizerek işlemin gerekli adımlarını şekil üzerinde göstermenin yeterli olduğunu düşündüğünü göstermiştir. Aşağıda bazı sınıf ve matematik öğretmeni adaylarının açıklama yapmakta ne kadar zorlandıklarını göstermektedir.

> "*Kesirleri nasıl anlatabileceğim konusunda en ufak bir fikrim yok… Kavramsal bilgi veremem, işlemsel bilgi olarak da sadece işlemin kuralını ezberlemelerini sağlarım*." (SÖA)

> *"…Valla bilmiyorum gerçekten. … Bir önceki soruda (toplama) yeterince saçmaladım zaten*." (MÖA)

> "*… Valla bize hep davranışçı sistemle anlattılar… Çok sıkışırsam kuralı veririm.*" (MÖA)

> "*Açıkçası böyle bir soruyu (kesirlerle bölme) nasıl anlatacağım hakkında pek bir bilgim yok."* (SÖA)

> "*hocam öncelikle bu işlem (çarpma) bize hiç mantıki olarak anlatılmaya çalışılmadı, sadece kural olarak pay ve payda çarpılır denildi. Çocuklara ben de kural olarak verebilirim sanırım.*" (SÖA)

> "*Öğrenciye açıklayamam. Ama ben bu işlemi şöyle öğrendim. Önce payda eşitlerim sonra da toplarım (çıkarırım)*" (SÖA)

> "*Öğrenci işlemi yapabilir ama neden böyle olduğunu anlamayabilir. Bu konuda nasıl açıklama yapabileceğimi bilemiyorum.*" (SÖA)
>
> "*…işlemleri yaparken sadece işlemin kurallarını uyguladım. Kavramsal açıklamalar yapamadım. Açıklamalarım saçma oldu*." (MÖA)
>
> "*Kurallardan başka bir şey gelmiyor aklıma. Yazdığım şeyler saçma, çocuğa pek yardımcı olmayacak şeyler*." (MÖA)

Alıntılardan da görüldüğü gibi öğretmen adayları, söz konusu işlemleri yeterince anlamadıkları sadece işlemsel düzeyde bildikleri için, öğrenciye bu bilgiyi ancak işlemsel düzeyde verebileceklerini belirtmektedirler. Ayrıca, öğretmen adayları açıklama verememelerine neden olarak kendilerinin de bu kavramları ve işlemleri işlemsel düzeyde öğrenmiş olmalarını göstermişlerdir. Bu açıklamalardan çıkarılabilecek önemli bir çıkarım ise az da olsa bazı öğretmen adaylarının kuralların öğretimsel açıklama olarak kullanılmasının anlamayı desteklemeyeceğinin farkında olmalarıdır.

3.3. Sıfır İle İlgili Öğretimsel Açıklamalar

Sınıf ve matematik öğretmeni adaylarının sıfır ile ilgili soruları açıklamada zorlandıkları belirlenmiştir. Matematik öğretmeni adaylarının yarısı 0!=1'in bir kural olduğunu ifade etmişlerdir. Kural olduğunu belirten katılımcıların yaklaşık yarısı ise bu kuralı nasıl açıklayacaklarını bilmediklerini belirtmişlerdir. Benzer şekilde sınıf öğretmeni adaylarının üçte biri sıfırın çift olmasını yanlış belirlerken, üçte biri ise sıfırın çift olmasının bir kural olduğunu ve bir açıklama getiremeyeceklerini ifade etmişlerdir.

Bu sorularda özellikle sınıf öğretmeni adaylarının sıfır sayısının kavram bilgisine sahip olmadıkları gözlemlenmiştir. Örneğin, sıfır sayısının çift olduğunu belirleyemeyen sınıf öğretmeni adaylarından, 9 tanesi sıfırın ne tek ne de çift olduğunu belirtmiştir. Öğretmen adayları buna gerekçe olarak "*sıfırın sadece bir sembol olduğunu*", "*sıfırın bir değerinin olmamasını*", "*sıfırın yokluğu ya da hiçliği göstermesini*" ya da "*sıfırın saymayı gerektirecek herhangi bir şeye sahip olmamasını*" göstermişlerdir. Başka bir sınıf öğretmeni adayı sıfırın tek ya da çift sayı olmasının kesin olmadığını belirtirken, 2 öğretmen adayı ise bu konuda hiç bir fikirlerinin olmadığını belirtmişlerdir. Benzer şekilde, bir matematik öğretmeni adayı da 0!=1 olmasını açıklayamayacağını çünkü sıfır ile ilgili konuları anlamakta zorluk çektiğini belirtmiştir. Aşağıdaki alıntılar öğretmen adaylarının bu konudaki sıkıntılarını göstermektedir.

> "*Sıfırın tek mi çift mi olduğunu tam anlamıyla gerekçeleriyle kavrayamadığım için bunu açıklayamam*."
>
> "*Sıfırın çift sayı olduğunu biliyorum ancak sebebini bilmiyorum*."
>
> "*Tek de değil çift de öğrenciye açıklayamam*."

3.4. Çemberin Çevre Formülü İle İlgili Öğretimsel Açıklamalar

Çemberin çevre formülü sorusu sadece sınıf öğretmeni adaylarına sorulmuştur. Sınıf öğretmeni adaylarının % 72'si bunu bildiklerini fakat neden öyle olduğunu açıklayamayacaklarını belirtmiştir. Öğretmen adaylarının aşağıdaki ifadeleri kendilerine bu formülün nasıl elde edildiğinin öğretilmediğini ve bu nedenle de formülün arkasında yatan ilişkiyi anlamadıklarını gözler önüne sermektedir.

> "*Düşündüm düşündüm buna (2πr) bir şey bulamadım*."
>
> "*Açıklama yapamıyorum. ... Bize yapıldığı gibi formülü (2πr) yazdırmak da olmaz*."
>
> "*Öğrenciye anlatamam. Ben bu formülü ezberlediğim için biliyorum*."
>
> "*Bunu nasıl açıklayacağımı bilmiyorum. Çünkü ben bunları açıklamasız öğrendim*."

Öğretmen adayları çemberin çevre formülünü açıklayabilmek için, öncelikle herhangi bir çemberin çevre uzunluğunun çapa bölümünün sabit bir sayı olduğunu ve bu sayının da pi sayısı olduğunu bilmeleri gerekir. Sınıf öğretmeni adaylarının çevre formülünü açıklamaya çalışırken, pi sayısını herhangi bir sabit sayı olarak ele almaları bu ilişkisel anlamaya sahip olmadıklarını göstermektedir. Benzer şekilde, bazı öğretmen adayları ise 2r nin çap olduğunu belirtmiş fakat pi sayısından hiç bahsetmemiştir.

3.5. İki Negatif Sayının Çarpımı İle İlgili Öğretimsel Açıklamalar

Bu soru ise sadece matematik öğretmeni adaylarına sorulmuştur. Öğretmen adaylarının % 67'si iki negatif sayının çarpımının bir pozitif tam sayı olmasının bir kural olduğunu belirtmişlerdir. Bu öğretmen adaylarının sadece yarısı bunu böyle öğrendiklerini ama nasıl açıklama getireceklerini bilmediklerini ifade etmişlerdir.

Matematik öğretmeni adaylarının iki negatif sayının çarpımının bir pozitif tam sayı olmasını açıklarken kullandıkları ifadeler, kuralların matematiksel kavram ve kurallardan çıkarılan genellemeler olduğunun farkında olmadıklarını göstermiştir. Örneğin bir öğretmen adayı "*Bu bir kural mı? Emin değilim. Eğer kuralsa, açıklamaya gerek yok.*" diyerek matematiksel kurallar hakkındaki düşüncesini ortaya koymuştur. Bir başka matematik öğretmeni adayı ise "*eksi çarpı eksi, pozitif. Bu bir aksiyomdur. Kuralı veririm.*" ifadesiyle matematikte kural, tanım veya aksiyom terimlerinin rolünü anlamadığını göstermektedir.

3.6. Öğretim Hileleri

Konu düzeyi olarak sınıflandırılan öğretimsel açıklamaların bazılarında ise öğretmen adayları verilen matematiksel durumlara kendilerince tatmin edici bir açıklama veremediklerini düşündüklerinde anlamsız ifadelere başvurmuşlardır. Bu ifadelerde öğretmen adayları verilen durumu bir gerçek hayat durumuna benzetmeye çalışmışlardır. Bu açıklamalar, herhangi bir matematiksel temelinin olmaması fakat hatırlamayı (ezberlemeyi) kolaylaştırması açısından "hile olarak" nitelendirilmiştir. Aşağıdaki alıntılarda iki sınıf öğretmeni adayı payda eşitlemeyi böyle bir hile ile açıklamaya çalışmaktadırlar:

> *"... Bir kesri toplama veya çıkarmak için pay ve payda kendi aralarında anlaşır. Payda zaten altta kalıp ezildiği için onun toplanan sayının paydasıyla eşitlenmek istediğini küçük bir hikaye şeklinde anlatırım. Bunu gören paylar da aralarında el sıkışırlar ve birlik olurlar, toplanırlar. Paydalar da birbirlerine eşit olduğu için birinin alta yerleşmesi yeterlidir. Tabi bu eşitlenme sırasında paylar da güçlerini korumalı eşitlenmek için çarpılan sayıya onlarda çarpılmalıdır, öyle toplanmalıdır birbirleriyle."*

> *"Kesirlerin de insanlar gibi isimlerinin ve soyadlarının olduğunu söylerim. İnsanları isimlerine mi göre gruplama daha kolay soyadlarına göre mi gruplamak kolay diye sorarım. Soyadı derler (aynı isimden çok var) kesirler de toplama çıkarma yaparken (gruplarken) payda kısmını (soyadlarını) aynı olmalarını sağlamalıyız deriz ve paydaları eşitlemeden toplama yapamayacağını anlamalarını sağlarız. Ailedeki üyelerin soyadların nasıl aynıysa kesirlerin paydalarının aynı olması toplama ve çıkarma yapmamızı sağlar."*

Benzer şekilde aşağıdaki alıntılarda öğretmen adayları kesirlerle çarpma ve bölme işlemlerini bu tür bir yaklaşımla açıklamaya çalışmışlardır. Bu açıklamalardan öğretmen adaylarının kesir, çarpma ve bölme kavramlarının anlamasına sahip olmadıkları görülmektedir.

> *"bölme işleminin çarpma işleminin tersi olduğunu söylerim. Ters bir şapkayı düzeltmek için ne yaparsınız diye sorarım. Çevirip düzeltmeleri gerektiğini söyledikleri zaman bunun de böyle olduğunu söylerim. 2. her zaman ters durmuştur. Onu biz çevirip düzeltelim derim. ...tersi düzelttik o zaman şapkamızı takabiliriz derim ve çarpmalarını isterim."*

> "*İki yumurtayı çarparken onların büyüklüğüne bakılmaz sonuçta çarptığımızda ikisi de karışacaktır. İşte kesirlerde de paydaların eşit olmalarına bakılmaksızın birbirleriyle çarpılır diyerek çocukların akıllarında kalmasına yardımcı olunabilir. Şimdi geldi aklıma saçma olmuş olabilir."*

Özellikle kesirlerdeki işlemlerde öğretmen adayları uygun açıklama verebilecek düzeyde matematiksel anlamaya sahip olmadıkları durumlarda bu kaçış yollarına başvurmuşlardır. Bu tür açıklamalarda öğretmen adayları kurallara ya da kavramlara şeklen yaklaşmışlar ve matematiğin anlamsız sembollerle yapılan bir oyun olduğu düşüncesini yansıtmıştır. Bu açıklamalarda, öğretmen adayı hiçbir şekilde matematiksel bir gerekçe sunmamıştır. Matematik öğretmeni adayları bu tür açıklamalara daha az başvurmakla birlikte özellikle iki negatif tam sayının çarpımının pozitif bir tam sayı olmasını açıklamakta zorlanmış ve aşağıdaki ifadeleri kullanmışlardır.

"*Düşmanımın düşmanı dostumdur. Buradan eksi çarpı eksi artıdır. Benim sınıftaki arkadaşlarım ortaokulda bu şekilde öğrenmiş. Halen de hatırlıyorlar. Ben de öğrencilerime bu şekilde öğreteceğim*."

"- × - = +, Düşmanımın düşmanı dostumdur. Biliyorum saçma ama en azından unutmazlar."

Matematik öğretmeni adaylarının yukarıdaki açıklamaları, öğretmenin iyi bir açıklama verebilmesi için öncelikle kendisinin söz konusu işlem veya kavramın altında yatan matematiksel ilişki ve ilkeleri anlaması gerektiğini gözler önüne sermektedir. Neden öğretmen adaylarının açıklamalarında sık sık kuralları kullandıklarını aşağıdaki öğretmen adayının ifadesi açıklamaktadır. Öğretmen adayı matematikte kuralların bir açıklamasının olabileceğinin farkında değildir.

"*Yani bu bir kural mıdır yoksa bunun bir mantığı var mıdır hiçbir bilgim yok. Sadece işlemin (bölme) nasıl yapılabileceğini anlatabilirim*."

3.7. Öğretmen Adaylarının Açıklamaları Hakkındaki Duyguları

Öğretmen adaylarından soruları cevaplarken nasıl hissettiklerini yazmaları istenmiştir. Sınıf öğretmeni adaylarının % 25'i (9 kişi) ve matematik öğretmeni adaylarının ise % 46'sı (21 kişi) bütün sorulara verdikleri açıklamaların yetersiz olduğunu ve bu nedenle de kaygılandıklarını ifade etmişlerdir. Aşağıdaki alıntılarda öğretmen adaylarının matematik bilgilerinin nedensiz kurallar bilgisi (işlemsel bilgi) olduğunun farkına vardıkları görülmektedir.

"*Sadece işlemsel bakarsak sorular çantada keklik fakat kavramsal olarak çocuğa anlatmak çok zor.*" (MÖA)

"*Çok zorlandım. Herşeyi ezbere öğrendiğimi gördüm. Bir başkasına da ezbere anlatabileceğimi gördüm*." (MÖA)

"*Testte genel olarak zorlandım. Kendimi şu an çok kötü hissettim. Daha doğrusu bilmediğimi farketmek üzdü. Bu soruların tamamını yapabilirim fakat neden diye sorulduğunda verecek cevabım yok*." (MÖA)

"*Bu açıklamaları yazarken acaba karşımdaki çocuk anlar mı diye bir kaygı duydum.*" (SÖA)

"*Açıklamalarımın yetersiz olduğunu biliyorum. Ben hep ÖSS, LGS için öğrendim. Kısacası ezberlemişim. Öğrencilerimin böyle matematik öğrenmesini istemiyorum.*" (SÖA)

"*Nedenini bilmediğim bir şeyi bilmeyen birine anlatmak çok zor. Ben biliyorum ama başkasına anlatamıyorum. Mesleğime ilişkin kaygılarım arttı*." (SÖA)

Yukarıdaki alıntılardan da görüldüğü gibi, bazı öğretmen adayları soruları bildiklerini fakat açıklayamadıklarını vurgulamışlardır. Bu ifadelerden, bazı öğretmen adaylarının matematik bilmeyi kuralları hatırlamak ve bu kuralları doğru şekilde uygulamak olarak gördükleri izlenimi doğmaktadır. Bununla birlikte, öğretmen adaylarının ifadelerinden matematiği öğrencilerin anlayabilecekleri şekilde öğretmek için sadece kuralları bilmenin yani işlemsel düzeyde matematik bilgisine sahip olmanın yeterli olmayacağının farkında oldukları ve bu nedenle de kaygılandıkları gözlemlenmiştir.

4. Tartışma, Sonuç ve Öneriler

Bu çalışmada sınıf ve matematik öğretmeni adaylarının bir konuyu ilk kez bir ilköğretim öğrencisine nasıl açıklayabilecekleri yazılı olarak incelenmiştir. Araştırmanın bulguları öğretmen adaylarının öğretimsel açıklamalarının genelde işlemsel düzeyde olduğunu göstermiştir. Öğretmen adaylarının yapmış olduğu açıklamaların büyük bir çoğunluğu kuralların tekrarı şeklinde olmuştur. Öğretimsel açıklamalarda kuralların nasıl uygulanacağının anlatılmasının yanı sıra hiçbir matematiksel dayanağı olmayan ifadelere de sıklıkla yer verilmiştir. Az sayıda öğretmen adayı kavramsal düzeyde açıklama yapabilirken hemen hemen hiçbir öğretmen adayı işlemlerin kurallarının altında yatan anlamları ve nedenleri açıklamalarında kullanmamıştır.

Araştırmadan elde edilen bulgular sınıf ve matematik öğretmeni adaylarının İlköğretim Matematik Programının hedeflediği şekilde bir öğretim yapabilecek düzeyde matematik bilgisine sahip olmadıklarını göstermektedir. Öğretmen adaylarının sorulardaki işlemlerin kurallarını bilmelerine rağmen bu kuralların altında yatan matematiksel ilişkileri ve nasıl elde edildiğini bilmedikleri gözlemlenmiştir. Benzer problemler farklı araştırmacılar tarafından da ortaya konumluştur (Ball, 1990a, 1990b; Even, 1993; Ma, 1999; Tirosh, 2000; Toluk Uçar, 2009). Bununla birlikte, matematik öğretmeni adaylarının ve az da olsa bazı sınıf öğretmeni adaylarının kuralların öğretilmesinin öğretimsel açıklama için yeterli olmadığının farkında olmaları umut vericidir. Öğretmen adaylarının kavramsal düzeyde öğretimsel açıklamalar yapabilmeleri için öncelikle kendilerinin matematiği kavramsal düzeyde anlamaları gerekmektedir (McDiarmid, Ball, and Anderson, 1989; Borko et al., 1992; Ma, 1999). Öğretmen adayları yeterli düzeyde matematiksel anlamaya sahip olmadıklarında, öğrenciye kuralı daha kolay ezberletmek için kaçış yollarına başvurmaktadırlar. Araştırmada ortaya çıkan bazı öğretimsel açıklamalarda, öğretmen adayları verilen matematiksel durumu hiç bir matematiksel dayanağı olmayan gerçek yaşam durumlarına benzetmiştir. Bu kaçış yolları öğrencilerin matematiğin anlamsız, saçma kurallar yığını olduğu düşüncesini (Toluk Uçar, Pişkin, Akkaş ve Taşçı, 2010) pekiştirir niteliktedir.

Öğretmen adaylarının cevap kâğıtlarına yazmış olduğu ifadeler kendilerinin bu kavramları açıklamasız yani işlemsel düzeyde öğrendiklerini gözler önüne sermektedir. Kendileri soruları bilmelerine rağmen fakat bu bilgi kavramsal düzeyde olmadığı için öğrenciye de bu kavramları açıklamakta zorlandıklarını belirtmişlerdir. Bu bağlamda, Ball'un (1990a) da altını çizdiği gibi, etkili bir matematik öğretimi için öğretimsel açıklama yapabilmenin birinci koşulunun öğretmenin matematik bilgisinin niteliği olduğu ortaya çıkmaktadır. Bir başka ifadeyle öğretmenler derin bir matematik bilgisine sahip olmadığı sürece öğrencilerinin matematiği anlayabilecekleri düzeyde de bir öğretim gerçekleştirmeleri zor görünmektedir. Yapılan araştırmalar da öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının kullandıkları öğretimsel açıklamaların genellikle anlamadan çok ezbere dayalı olduğunu ve dolayısıyla kural ve işlem odaklı olduğunu göstermektedir (Henningsen ve Stein, 1997; Kinach, 2002a, 2002b; Kılcan, 2006). Kılcan (2006) ilköğretim matematik öğretmenlerinin kesirlerle bölme işlemi ile ilgili bilgilerini değerlendirmiş ve bu işlemi nasıl öğrettiklerini gözlemlemiştir. Kılcan'ın çalışmasında, işlemsel düzeyde bilgiye sahip öğretmenlerin öğretimlerinde ögrencilerine ters çevir çarp kuralını hiçbir açıklama yapmadan verdikleri, kuralın ezberlenmesinin önemini vurguladıkları ve kuralın uygulanmasını gerektiren bol işlem yaptırdıkları gözlemlenmiştir. Bu çalışmada, öğretmen adaylarının sıklıkla kuralları açıklama olarak vermelerine neden olarak kendilerinin de bu konulardaki bilgilerinin kurallardan ibaret olması gösterilebilir.

Bu bulgulara dayanarak şu önerilerde bulunulabilir:

Bu araştırma Kinach'ın öğretmen adaylarının matematik bilgilerini, pedagojik içerik bilgisine dönüştürmek amacıyla geliştirmiş olduğu 5 aşamalı bilişsel stratejinin ilk iki aşamasına (belirleme ve değerlendirme) ait bulguları ortaya koymuştur. İleride yapılacak çalışmalar, diğer üç aşamanın (meydan okuma, dönüştürme ve kalıcılığı sağlama) gerçekleştirilmesine yönelik olabilir.

Öğretmen adaylarını ilköğretim matematik programının hedeflediği şekilde öğretmeye hazırlamak için, öğretmen yetiştirme programlarında bu yönde derslere ihtiyaç vardır. Bir başka deyişle, öğretmen adaylarının hizmet öncesi eğitimlerinde ortaöğretimden getirdikleri matematik bilgilerini kavramsal biçime dönüştürecek deneyimlere ihtiyaçları vardır. Programlarda önerilen alan ve alan eğitimi derslerinde öğretmen adayları bu konuda desteklenmelidir.

Matematik öğretimine yönelik derslerde öğretmen adaylarının matematik, matematiği öğrenme ve öğretmeye ilişkin inançlarını gözden geçirmelerine ve matematik bilgilerini İlköğretim Matematik Programının hedeflediği amaçlara uygun öğretim yapmalarını sağlayacak hale dönüştürecek şekilde yeniden yapılandırılması gerekmektedir.

Preservice Teachers' Pedagogical Content Knowledge: Instructional Explanations

Extended Abstract

Many research studies have documented that the mathematical understanding preservice teachers bring from schooling and university mathematics courses was inadequate for teaching primary school mathematics (Even, 1993; Tirosh, 2000). In these studies, while preservice teachers generally knew how to carry out a procedure, they could not produce mathematical explanations for the underlying meaning. To become a mathematics teacher, preservice teachers need to develop profound subject matter knowledge, pedagogical content knowledge and knowledge of students' cognition (Shulman, 1986; Ball, 1990a; Ma, 1999). These three types of knowledge should be considered as parts of a larger system on which teacher relies on as they plan and implement instruction (Verschafel, Janssens, and Janssens, 2005). Pedagogical content knowledge, which depends on subject matter knowledge (McDiarmid, Ball, and Anderson, 1989), consists of knowledge of ways of representing and explaining mathematics to make it understandable, and knowledge of students' cognition. Knowledge of representation and knowledge of students' mathematical thinking are two main components of this knowledge type. The purpose of this study was to investigate the nature of explanations they provide for mathematical situations and the knowledge of these mathematical situations.

Eighty three preservice teachers participated in this qualitative study. Thirty seven of the participants were preservice elementary teachers (PET) and 46 were preservice mathematics teachers (PMT). All of the participants were in the third year of their program at the same university. Two tests, each consisting of 6 mathematical situations, were used as a data collection instrument. Participants were asked to write in detail how they explain given mathematical situations to someone learning it for the first time and how they felt while they were answering the questions. After omitting mathematically incorrect responses, resulting explanations were coded using Kinach's levels of disciplinary understanding framework (Kinach, 2002). This framework is based on the distinction of procedural and conceptual understanding.

Twelve PETs (32%) were unable to identify whether zero is an even or an odd number. After omitting these responses, total of 486 instructional explanations were produced. Of these 69% of the explanations were at procedural level. While 36% of the explanations produced by PMTs were at conceptual level, 21% of those produced by PETs were conceptual. Only 5% of the explanations can be considered as adequate. While almost all of PETs were unable to explain multiplication and division with fractions, only one third of PMTs were able to provide explanations for four questions at conceptual level. Another striking result was the tendency of preservice teachers to use nonsense explanations for the given mathematical situations when they were unable to provide satisfactory justifications

for the given situations. These explanations were called as tricks. Such explanations were usually meaningless and nonsense and had no mathematical ground. These tricks also aimed at helping students remember the rules or procedures easily rather than helping students understand. Five PMTs and 6 PETs used such tricks.

The results of the study showed that preservice teachers' knowledge of mathematics is inadequate for teaching mathematics for understanding. All of the participants attempted to provide an explanation for the given mathematical situations. However, most of these explanations were in the form of restatement of procedures. In addition, preservice teachers' knowledge of fractions was fragmentary and rule based. Although they were preoccupied with the correct execution of the common denominator algorithm, they lacked the understanding of underlying principles and meanings of this algorithm. Preservice teachers also lack the understanding of which ideas in mathematics are arbitrary and which are necessary. Some preservice teachers confused rules with definitions or axioms. Their explanations revealed the belief that mathematics is not a rational and logical subject in which one has to reason, analyze, seek relationships, make generalizations, and verify answers. Preservice teachers mostly stated that they learnt mathematics without any explanations. More consideration of ''what teacher educators teach and how they teach it'' must be given in order to understand their impact on the development of preservice teachers' knowledge.

Key Words: Instructional explanations, mathematics education, preservice teacher

Kaynaklar/References

Ball, D. L. (1990a). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal, 90*(4), 449–466.

Ball, D. L. (1990b). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(2), 132–144.

Ball, D. L. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject-matter knowledge part of the equation. *Research on Teaching Mathematics, 2*, 1-48.

Borko, H., & Putnam, R., (1996). Learning to teach. In D. Berliner, & R. Calfee (Eds.), Handbook of educational psychology (pp. 673–708). New York: Macmillan.

Borko, H., Eisenhart, M., Brown, C. A., Underhill, R. G., Jones, D., & Agard, P. C. (1992). Learning to Teach Hard Mathematics: Do Novice Teachers and Their Instructors Give up Too Easily? *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(3), 194-222.

Carpenter, T. P., Fennema, E., and Franke, M. L. (1996). Cognitively Guided Instruction: A Knowledge Base for Reform in Mathematics Instruction. The Elementary School Journal, 97(1), 3–20.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(2), 94–116.

Henningsen, M., & Stein, M. K., (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*, 524–549.

Kılcan, S., (2006). *İlköğretim matematik öğretmenlerinin kavramsal bilgileri: Kesirlerle bölme.* Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Abant İzzet Baysal Üniversitesi.

Kinach, B. M., (2002a). Understanding and learning-to-explain by representing mathematics: Epistemological dilemmas facing teacher educators in the Secondary mathematics “methods” course. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 153–186.

Kinach, B.M. (2002b). A cognitive strategy for developing prospective teachers’ pedagogical content knowledge in the secondary mathematics methods course: Toward a model of effective practice. *Teaching and Teacher Education, 18*(1), 51–71.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers’ understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

McDiarmid, G. W., Ball, D. L., & Anderson, C. (1989). Why Staying One Chapter Ahead Doesn't Really Work: Subject-Specific Pedagogy. In M. C. Reynolds (Ed.), Knowledge Base for the Beginning Teacher (pp. 193-205). Elmsford, NY: Pergamon Press.

Perkins, D. N., & Simmons, R. (1988). Patterns of misunderstanding: An integrative model for science, math, and programming. *Review of Educational Research*, *58*(3), 303–326.

Prawat, R. S., (1992). Teachers’ beliefs about teaching and learning: A constructivist perspective. *American Journal of Education, 100*(3), 354–395.

Richardson, V., (1996). The role of attitudes and beliefs in learning to teach. In J. Sikula (Ed.), Handbook of Research on Teacher Education (pp. 102–119). New York: Macmillan.

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Skemp, R. R., (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher, 26*(3), 9–15.

Thompson, A. G., (1992). Teachers’ beliefs and conceptions: A synthesis of the research. In D. A. Grouws (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 127–146). New York: Macmillan.

Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers’ knowledge of children’s conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 31*(1), 5–25.

Toluk-Uçar, Z. (2009). Developing pre-service teachers understanding of fractions through problem posing. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 166–175.

Toluk Uçar, Z., M. Pişkin, E. N. Akdoğan, ve D. Taşçı, (2010). İlköğretim Öğrencilerinin Matematik, Matematik Öğretmenleri ve Matematikçiler Hakkındaki İnançları, *Eğitim ve Bilim, 35*(155), 131-144.

Verschaffel, L., Janssens, S., & Janssens, R. (2005). The development of mathematical competence in Flemish pre-service elementary school teachers. *Teaching and Teacher Education, 21*, 49–63.