Cebirin Tarihsel Gelişimi

Adnan Baki[1]

Suphi Önder Bütüner[2]

Özet

Cebirsel problemlerin çözümleri ve cebirsel gösterimler tarih boyunca hep aynı mı olmuştur? Elbette matematiğin bir alt dalı olan cebir de edebiyat, fizik, sanat, ekonomi ve müzik gibi sürekli gelişen bir insan etkinliğidir. Cebirin bugünü olduğu gibi, geçmişi vardır ve geleceği de olacaktır. Bugün öğrendiğimiz ve kullandığımız cebir 1000 yıl, 500 yıl hatta 100 yıl önceki cebirden çok farklıdır. Cebirin geçmişini bilmek, bugünü ve geleceği ile ilgili etkileşime geçmemizi ve cebiri daha iyi anlamamızı kolaylaştırabilir. Bu çalışma ile cebirin gelişim sürecinin ayrıntılı bir görüntüsü ortaya koyulmaya çalışılmıştır. Bu derleme çalışmasında cebirin tarihsel gelişimi, cebirsel ifadelerin, cebirsel problemlerin ve çözümlerinin düz yazı biçiminde yazıldığı dönem, cebirsel ifadelerin gösterimlerinde kısaltmaların kullanıldığı dönem ve sembollerin kullanıldığı dönem olarak üç dönemde ele alınmaktadır. Çalışmada; farklı kültürlerin kullandıkları cebirsel gösterimleri ve cebirsel problemleri nasıl çözdükleri bu dönemler dikkate alınarak ortaya koyulmaya çalışılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Matematik tarihi, cebir, cebirsel problemler

1. Giriş

Cebirsel problemlerin çözümleri ve cebirsel gösterimler ilk dönemlerden beri hep aynımı olmuştur? Bu soruyu ayrıntılı olarak ele aldığımızda cebirin de diğer bilimler gibi kendisine özgü tarihsel gelişimi olduğunu görmekteyiz. Eğitim sistemi içerisinde çoğu zaman cebirin eski ve zengin bir tarihe sahip olduğunu öğrenci ve öğretmen yeterince göremez. Bu duruma paralel olarak, matematiğin sürekli gelişim gösterdiğini, insan emeğinin ürünü olduğunu ve farklı zamanlarda farklı kültürlerin yaptıkları matematiğin farklı olduğunu değerlendirmede başarısız olmaktadırlar (Tzanakis ve Arcavi, 2000). Matematiksel bilgiyi özel olarak cebirsel bilgiyi kesin, düzenli, teorem, ispat ve kurallardan oluşan mükemmel bir bilgi topluluğu olarak algılamaktadırlar (Arcavi, 1991; Bidwell, 1993). Bu algı öğrencilerin cebiri öğrenme biçimlerini ve başarıları üzerinde olumsuz etkiler yarattığı, ilgili literatürde vurgulanmaktadır (Franke ve Carey, 1997; Carlson, 1999; Cifarelli ve Goodson, 2001). Araştırmacılar, bu eksik algılamanın giderilmesinde bir yol olarak, matematik tarihi ile matematik derslerinin zenginleştirilmesi önerisini yapmaktadır (Fauvel, 1991; Ernest, 1998; Tzanakis ve Arcavi, 2002). Bu çalışma, matematiğin alt dalı olan cebirin tarihsel gelişim sürecinin ayrıntılı görüntüsünü ortaya koymak, öğretmenlerin ve

[1]Prof. Dr.,Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fatih Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü,*abaki@ktu.edu.tr*
[2]Doktora Öğrencisi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Eğitim Bilimleri Enstitüsü, *onderbutuner@mynet.com*

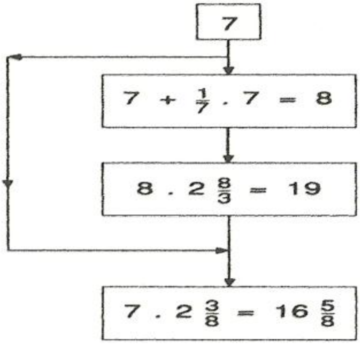
öğrencilerin cebirin doğası ve tarihsel gelişim sürecini anlamalarında onlara yardımcı olmak ve öğretmenlerin sınıflarında kullanabilecekleri bir kaynak sağlamak amacıyla hazırlanmıştır.

Matematiğin hiçbir dalında cebirde olduğu kadar işlem ile anlam arasında ilişki yoğunluğu yaşanmaz. Bir cebirsel etkinliği denklem kurma, genelleme ve fonksiyonlarla çalışma olarak karakterize edebiliriz (Baki, 2008). Harizmi'nin "*Al KitabFi Hisab Al Cabr wal Muqabalah*" isimli kitabındaki "*Al Cabr*" sözcüğünden adını alan cebir, aritmetiğin genelleştirilmiş şekli olarak düşünülebilir (Amerom, 2003; Brezina, 2006; Katz, 2007). Örneğin, a+a=2a eşitliği, a yerine yazılabilecek tüm sayılar için doğru olacaktır (Brezina, 2006). Cebir; genelleştirilmiş sayılarla, değişkenlerle ve fonksiyonlarla ilgilenir (Carraher, Brizuela ve Earnest, 2006). Bilinmeyen veya değişken niceliklerle ilgili muhakeme yapmayı, özel ve genel durumlar arasındaki farklılıkları tanımlamayı gerektirir (Amerom, 2003). Cebir problemleri ise, bilinmeyenin veya diğer bir değişle değişkenin değeri bulunarak verilen eşitliğin çözülmesine dayanmaktadır (Brezina, 2006). Çoğu tarihi metinde, cebirin gelişiminin üç dönemde gerçekleştiği belirtilmektedir. Bu dönemler sırasıyla, cebirsel ifadelerin, cebirsel problemlerin ve çözümlerinin düz yazı biçiminde yazıldığı dönem, cebirsel ifadelerin gösterimlerinde kısaltmaların kullanıldığı dönem ve sembollerin kullanıldığı dönem olarak ifade edilmektedir. Bu çalışmada sırasıyla Eski Mısırda, Babillilerde, Eski Yunanda, Eski Hindistan'da, İslam Dünyasında ve Batıda cebirsel ifadelerin gösteriminin ve cebirsel problemlerin çözümünün tarihsel gelişimi ele alınmıştır.

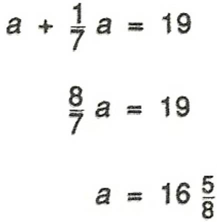
Eski Mısır'da Cebir

Eski Mısır'dan günümüze ulaşan iki önemli matematik yapıtı Golenişev papirüsü (M.Ö 1900) ile Rhind papirüsüdür (M.Ö 2000–1000). Rhind papirüsünde çok sayıda birinci dereceden bir bilinmeyenli denklem ve çözümleri yer almaktadır. Mısırlılar (M.Ö 2000–1000), birinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümlerinde yanlışı deneme yolunu kullanmışlardır. Bu yöntem 15. ve 16. yüzyıllarda eski Mısır dışında, Hintliler ve İslam dünyası matematikçileri tarafından da kullanılmıştır. Ayrıca bu yöntemin 16. yüzyıl İtalyan matematikçilerinden Nicole Tartalia, Philipo Calandri ve İspanyol matematikçi Tosca tarafından da kullanıldığı bilinmektedir.

Eski Mısır'da cebirsel denklemlerin çözümlerinde bugün kullandığımız (x, y, x^2,…) gibi semboller kullanılmamıştır. Her şey düzyazı biçiminde yazılmıştır. Rhind papirüsünde "*Bir miktar ve bu miktarın yedide birinin toplamı 19 olduğuna göre, bu miktarın büyüklüğü nedir?"* şeklinde ifade edilen 24. problemin çözümü bugünkü gösterimlerle aşağıdaki gibi açıklanabilir:



Şekil 1. Eski Mısırda yapılan çözüm



Şekil 2. Modern çözüm

Şekil 1 incelendiğinde, a / 7 ifadesini tamsayı yapan 7 değerinin bilinmeyen yerine yazıldığı görülmektedir. Elde edilen sonucun doğru sonuç olmadığı düşünülerek, "*Bilinmeyen 7 iken sonuç 8 oluyorsa, sonucun 19 olması için bilinmeyen ne olmalıdır?*" şeklindeki bir soru ile doğru sonuca ulaşılmaya çalışılmıştır (Ofir ve Arcavi, 1992). Çözüm incelediğinde Eski Mısır'da orantısal düşünmenin matematik yaparken kullanıldığı görülmektedir. Nitekim Eski Mısır'da firavunların hükümdarlığı sürecinde, orantısal düşünme matematiğin merkezinde yer almıştır. Çünkü vergiler, ürün miktarı ile orantılı şekilde alınmakta, binalar inşa edilirken belli orantılara bağlı olarak yapılmaktaydı. Eski Mısır papirüsünden alınan bir problem bu durumu ortaya koymaktadır. "*Düşünün ki 450 hektarlık arpaya sahipsiniz ve her 10 hektarın 1 hektarını vergi olarak vermek zorunda olduğunuza göre, bu üründen kaç hektarlık vergi verirsiniz?*" (Lumpkin, 1997). Eski Mısır'da doğrusal olmayan denklemler üzerinde de yanlışı deneme yolunun kullanıldığını görmekteyiz. Örneğin, Berlin papirüsünde "*İki karenin alanları toplamı 100'dür. Karelerden birinin kenar uzunluğunun üç katı, diğer karenin kenar uzunluğunun dört katına eşit olduğuna göre, karelerin kenar uzunluklarını bulunuz?*" sorusunun Mısır'da yapılan çözümü ve modern gösterimi Tablo 1'de verilmiştir (Bunt, Jones ve Bedient, 1998).

Tablo 1.Eski Mısır'da Berlin papirüsündeki doğrusal olmayan denklemlerle ilgili problemin çözümü

Matematiksel İfadesi	**Çözüm**
$x^2 + y^2 = 100$ $3x = 4y$	1) x = 4, y = 3alırsak ve yerlerine yazarsak, 2) $4^2 + 3^2 = 25$ bulunur ki, bizim ulaşmak istediğimiz sayı 100. 3) Buradan; $\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{100} = 10$ o halde $10/5 = 2$ 4) Başlangıçta x ve y için verilen değerler 2 ile çarpılarak karelerin kenarları 6 ve 8 olarak bulunur.

Yukarıdaki çözüm incelendiğinde, Eski Mısır'daki insanların, doğrusal olmayan denklemleri çözerken orantısal düşünme ve yanlışı deneme yolları dışında, karekök alma işlemini de kullandıkları görülecektir (Lumpkin, 1997). Sonuç olarak, çeşitli denklemlere ve çözüm yöntemlerine rastlansa da, Eski Mısır'da bugünkü anlamda cebirin bir bilim olarak var olduğuna söylemek oldukça zordur (Smith, 1925). Eski Mısır'da olduğu gibi cebir üzerine çalışmaları Babillilerde de görmekteyiz. Eski Mısır'da cebir üzerine yürütülen çalışmalar yanlışı deneme ve orantısal düşünme üzerine dayalı iken Babillilerde geometrik bir düşünce yapısıyla ikinci derece denklemlerin ve doğrusal denklem sistemlerinin çözümünün yapıldığı görülmektedir.

Babillilerde Cebir

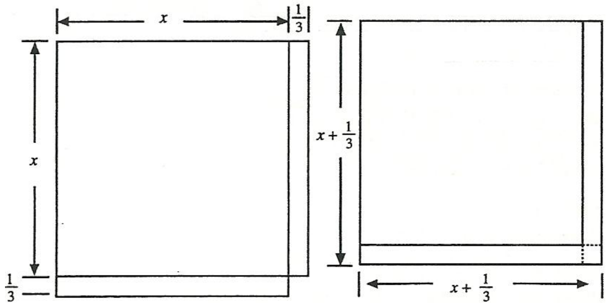
Babilliler, eski Mısır'daki cebir anlayışından daha ileri giderek, ikinci dereceden denklemler ve doğrusal denklem sistemlerinin çözümleriyle uğraşmışlardır. M.Ö 2000'li yıllarda Babil tabletlerinden alınan ikinci dereceden bir denklem günümüz gösterimleriyle aşağıda ifade edilmiştir.

"*Bir karenin alanına, karenin kenar uzunluğunun 2/3'ü eklendiğinde sonuç 35/60 olduğuna göre, karenin kenar uzunluğunu bulunuz?*".

Matematiksel gösterimi, $\mathrm{x}^2 + \frac{2}{3}\mathrm{x} = \frac{35}{60}$ olan eşitliğin çözümü aşağıda verilmiştir.

- 2/3'ün yarısını bul: 1/3
- 1/3'ün karesini al: 1/9
- 35/60 ile 1/9'u topla: 25/36
- 25/36'nın karekökünü al: 5/6
- 5/6'dan 1/3'ü çıkar: 3/6
- Sonuç, $\frac{1}{2}$'dir.

Yukarıdaki çözümden de anlaşılacağı gibi, Babilliler, eski Mısır'da olduğu gibi çözümlerini düz yazı biçiminde yapmışlardır. Ancak yaptıkları çözümlerin oranlama yönteminin yanında geometrik bir düşünce yapısına dayandığı düşünülmektedir. Babillilerin $\mathrm{x}^2 + \frac{2}{3}\mathrm{x} = \frac{35}{60}$ eşitliğini çözerken kullandıkları geometrik düşünce biçimi Şekil 3'te verilmiştir (Swetz, 1994).



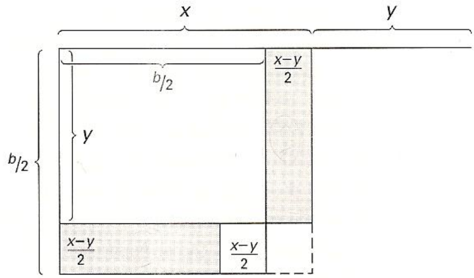
Şekil 3. Babillilerin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin çözümünün geometrik gösterimi

Şekil 3 incelendiğinde, Babillilerin x^2'yi ifade etmek için x br uzunluklu bir karenin alanını, $2x/3$'ü ifade etmek için kenar uzunlukları 1/3 ve x br olan iki adet dikdörtgenin alanını kullandıkları ve kareye tamamlama yolu ile ikinci dereceden denklemleri çözdükleri düşünülmektedir.

M.Ö. 2000-1000'li yıllarda Babilliler ikinci dereceden denklemleri çözmek dışında, $x+y=b$ ve $x.y=c$ (b, c sabitler) şeklindeki denklem sistemlerini de düz yazı formatında ancak geometrik bir düşünce biçimiyle çözmüşlerdir. YBC 4663 kodlu Babil tabletinden alınan eşitliğin günümüz şekliyle ifadesi şu şekildedir. "*İki sayının toplamı*$6\frac{1}{2}$*, çarpımları ise* $7\frac{1}{2}$*'dir. Bu sayıları bulunuz?*". Modern gösterimi $x+y=6\frac{1}{2}=b$, $x.y=7\frac{1}{2}=c$ şeklinde olan denklem sisteminin Babilliler tarafından yapılan çözümü aşağıda verilmiştir (Oliver, 2007):

- Altı tam 1 /2'nin yarısını bul: 3 tam ¼
- 3 tam ¼'ün karesini al: 10 tam 9/16
- 10 tam 9/16'dan 7 tam ½'yi çıkar: 3 tam 1/16
- 3 tam 1/16'nın karekökünü bul: 1 tam ¾
- 1 tam ¾'e 3 tam ¼'ü ekle: 5
- 3 tam ¼'ten 1 tam ¾'ü çıkar: 1 tam ½
- Aranan sayılar 5 ve 1 tam ½'dir.

Babilliler, modern gösterimi $x+y=b$ ve $x.y=c$ şeklinde olan doğrusal denklem sistemlerini çözerken düşündükleri geometrik yol aşağıda açıklanmıştır. Babilliler çözümü yaparken, kare ve dikdörtgenin alanı ve çevresinden faydalanmışlardır (Katz, 1998).



Şekil 4. Babillilerin doğrusal denklem sistemlerinin çözümünün geometrik gösterimi

Şekil 4'de görüldüğü gibi Babillilerin geometrik bir düşünce biçimiyle yaptıkları çözümün modern biçimde ifadesi şu şekildedir: Öncelikle b'nin yarısı alınarak $\frac{b}{2} = x - \frac{x-y}{2} = y + \frac{x-y}{2}$ şeklinde bir eşitliğe ulaşılır. Ardından bu denklemdeki ifade, x ve y birim kenarlı bir dikdörtgen üzerinde gösterilir. y birim uzunluklu kenardan $\frac{x-y}{2}$ arttırıp, x birim uzunluklu kenardan $\frac{x-y}{2}$ kısaltarak, $\frac{b}{2}$ br uzunluktaki kenarlar elde edilir. Yapılan bu işlemler sonucu;

$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \rightarrow \left(\frac{b}{2}\right)^2 = c + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 \rightarrow \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} = \frac{x-y}{2}$ elde edilir.

Bu eşitlikten de $\frac{x-y}{2}$; x ve y cinsinden yazılarak $x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ ve $y = \frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c}$ elde edilir (Aaboe, 1964; Katz, 1998).

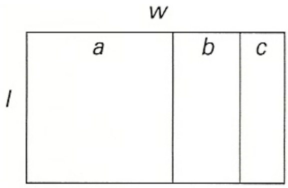
Denklem sisteminin kökleri olan x ve y'yi bulmak için bulunan bu kural, Babillilerin yaptıkları sözel çözümde görülebilir. Sonuç olarak, Babillilerin lineer denklem sistemlerini ve ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemleri düz yazı formatında ancak geometrik bir düşünce yapısıyla çözdükleri söylenebilir. Bunun yanında, Babilliler, en, boy, alan gibi kavramları içeren cebirsel problemlerle uğraşmışlardır. Sonuçta Babillilerin bilinmeyen olarak geometrik şekillerin kenar uzunluklarını tanımladıkları düşünülebilir.

Eski Yunanda Cebir

Babillilerin ardından cebir uğraşı Eski Yunan'daki matematik bilginleriyle devam ettirilmiştir. Eski Yunan'da cebir dendiğinde akla gelen ilk isim Euclid'dir. Euclid (M.Ö 300)'in en önemli yapıtı olan elementler, 13 kitaptan oluşmaktadır. İkinci kitabında Euclid'in cebiri geometrik inşalar üzerine kurduğu anlaşılmaktadır. Kitabındaki, birinci, dördüncü, beşinci ve altıncı önermeler aşağıda verilmiştir.

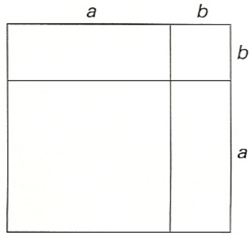
Elementler, Önerme 2.1: "*Birbirine paralel olan iki düz çizgi alınırsa ve bu çizgilerden herhangi biri çok sayıdaki doğru parçası ile kesilirse, iki paralel doğru ile oluşturulan büyük dikdörtgen, küçük dikdörtgenlerin toplamına eşittir*".

Elementler, Önerme 2.4: "*Bir düz çizgi rastgele kesilirse, büyük kare, doğru parçaları üzerindeki kareler ve doğru parçalarının oluşturduğu dikdörtgenlerin toplamına eşittir*" (Katz, 1998).



Şekil 5. Önerme 2.1'in modellenmesi

$$l(a + b + c) = la + lb + lc$$



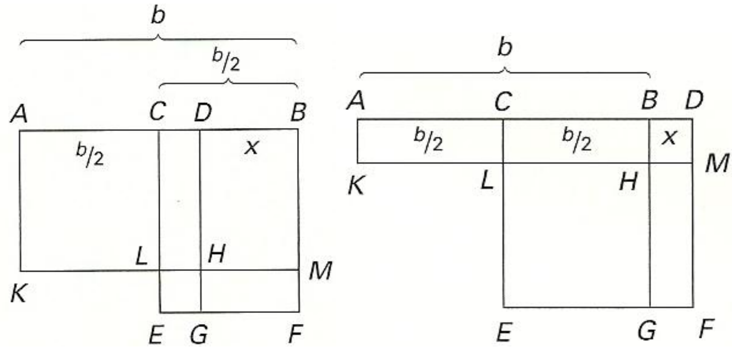
Şekil 6. Önerme 2.4'ün modellenmesi

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Yukarıda verilen önermeler, Euclid'in çarpma işleminin dağılma özelliğini ve iki terimin toplamının parantez karesi özdeşliğinin açılımının farkında olduğunu ortaya koymaktadır. Euclid'in beşinci ve altıncı önermeleri, denklemlerin çözümlerinde Babillilerde olduğu gibi geometrik bir modelleme düşüncesinin hakim olduğunu göstermektedir. Ancak Babillilerin düz yazı biçiminde yaptığı çözümler, araştırmacılar tarafından geometrik modellere çevrilmişken, Euclid'in kitabındaki çözümlerin geometrik modellemelerle yapıldığı görülmektedir. Euclid'in beşinci ve altıncı önermeleri aşağıda verilmiştir.

Elementler, Önerme 2.5: "*Bir düz çizgi, eşit olan ve eşit olmayan doğru parçaları ile kesilirse, düz doğru üzerindeki kare ile birlikte şeklin bütününde eşit olmayan doğru parçalarının oluşturduğu dikdörtgen, oluşan karelerden birine eşittir*"

Elementler, Önerme 2.6: "*Düz bir çizgi, iki eşit parçaya bölünüp, bu çizginin yanına ek bir çizgi eklenirse, tüm çizgilerin oluşturduğu dikdörtgen ile ikiye bölünün ilk çizginin oluşturduğu karelerden birinin toplamı, sonradan eklenen çizgi ile ilk çizgiyi ikiye bölen doğru parçası ile oluşturulan kareye eşittir*" (Katz, 1998).



Şekil 7. Önerme 2.5 ve Önerme 2.6'nıngeometrik modellenmesi

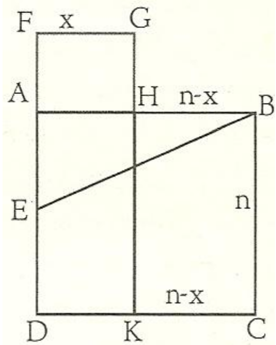
Şekil 7, Önerme 2.5'in ve Önerme 2.6'nın anlaşılmasını kolaylaştırmaktadır. Eğer $|AB|$=b, $|BC|$=b/2 ve $|DB|$=x olarak alınırsa, Önerme5, $(\mathrm{b}-\mathrm{x}).\mathrm{x}+(\mathrm{b}/2-\mathrm{x})^2=(\mathrm{b}/2)^2$ ve Önerme 6,$(\mathrm{b}+\mathrm{x}).\mathrm{x}+(\mathrm{b}/2)^2=(\mathrm{b}/2+\mathrm{x})^2$olarak ifade edilebilir. İlk eşitlikte $\mathrm{bx}-\mathrm{x}^2=\mathrm{c}$ ifadesi (b – x).x = c şeklinde yazılarak, eşitlik $(\mathrm{b}/2-\mathrm{x})^2=(\mathrm{b}/2)^2-c$ olarak elde edilir. Buradan $\mathrm{x}=\frac{\mathrm{b}}{2}+\sqrt{\left(\frac{\mathrm{b}}{2}\right)^2-\mathrm{c}}$ kuralına ulaşılır. Benzer şekilde, $\mathrm{bx}+\mathrm{x}^2=\mathrm{c}$eşitliği (b+x).x = c şeklinde yazılarak, eşitlik $c+(b/2-x)^2=(b/2)^2$ olarak elde edilir. Buradan; $\mathrm{y}=\frac{\mathrm{b}}{2}-\sqrt{\left(\frac{\mathrm{b}}{2}\right)^2-\mathrm{c}}$ kuralına ulaşılır.

Euclid'in düşünce biçimi Babillilerin düşünce biçimine benzemektedir. Eğer IADI=y ve IDBI=x olarak alınırsa, yukarıdaki ilk eşitliğin, $\mathrm{x}+\mathrm{y}=\mathrm{b}$, $\mathrm{x}.\mathrm{y}=\mathrm{c}$ ve ikinci eşitliğin $\mathrm{y}-\mathrm{x}=\mathrm{b}$, $\mathrm{y}.\mathrm{x}=\mathrm{c}$ şekline dönüştüğü görülecektir (Katz, 1998). Euclid'in ortaya koyduğu önerme modelleri, Babillilerin geometrik düşünce yapısına benzemektedir. Bu durum, Eski Yunan'daki matematik bilginlerinin Babillilerden etkilenmiş olma olasılığını arttırmaktadır (Katz, 2007; NCTM, 2006).Eski Yunan'da, Euclid ve Apollonius zamanının cebirinin de Babil tabletlerinde olduğu gibi geometrik bir düşünceyle yapıldığı, Euclid'in Elementler kitabındaki önermeleri ile gösterilmiştir. Kısacası Babillilerin ve Euclid'in döneminde cebir kavramının henüz ortaya çıkmadığı, cebirin geometrikselleştirildiği söylenebilir (Katz, 1998; Cajori, 2007). Euclid'in geometrik modellemeyle çözdüğü diğer bir cebir problemi aşağıdaki gibidir (Baki, 2008):

AB doğru parçasının boyu n olsun. AB doğru parçasını x ve n-x olarak öyle bölünüz ki, $\mathrm{n}(\mathrm{n}-\mathrm{x})=\mathrm{x}^2$olsun. Euclid bu problemi oluşturduğu kareler yardımıyla çözmüştür (Baki, 2008).

Euclid ilk önce ABCD karesini oluşturuyor. $|AD|$'nin orta noktası E'yi B köşesine birleştiriyor ve ABE dik üçgenini elde ediyor. Sonra $|EF|$=$|EB|$ olacak şekilde $|DA|$'yı uzatarak F noktasını belirliyor ve FGAH karesini elde ediyor. Sırasıyla;

- $|AE| = |ED|$ (E orta nokta)
- $A(FGKD) = (|EF| + |ED|).(|EF| - |ED|) = |EF|^2 - |ED|^2$
- $A(FGKD)$ + $|ED|^2$ = $|EF|^2$
- $|AB|^2 + |AE|^2 = |EB|^2 = |EF|^2$
  ($|EF|$=$|EB|$ ve ABE üçgeni dik)
- $|AB|^2 + |AE|^2$ = $A(FGKD)$ + $|AE|^2$ ($|ED|$=$|AE|$)
- $A(FGKD)$ = $|AB|^2$
- $A(FGKD)$'den $A(AHKD)$'yi çıkarırsak $|AH|^2$ kalacak.
- $A(ABCD)$=$A(FGKD)$ ise $A(FGKD)$'den $A(AHKD)$'yi çıkarırsak $A(ABCK)$ dikdörtgeni elde edilir.
- $A(HBCK)$= $|AH|^2$ olur.



$A(HBCK)$= $|AH|^2$ sonucu, $\mathrm{n}(\mathrm{n}-\mathrm{x}) = \mathrm{x}^2$ olduğunu gösterir. Böylece Euclid $|AH|$ veya x'in sayısal değerinden denklemi çıkarabilmiştir. Aslında Euclid, bizim kolayca bulduğumuz $\mathrm{x} = \frac{\mathrm{n}.(\sqrt{5}-1)}{2}$ eşitliğini bulmadan ziyade, verilen$|AB|$'nı istenilen oranda bölmeyi cebirsel formüle dönüştürmüştür.

Cebir alanında önemli çalışmaları olan bir diğer matematik bilgini ise M.S 250'lerde yaşamış olan Yunanlı Diophantus'tur. Euclid cebiri geometrikleştirirken, Diophantus sembolleştirmeye ve analitik hale sokmaya çalışmıştır (Smith, 1925; Cajori, 2007). "Arithmetica" (13 kitabın 6'sı mevcuttur), "*On Polygonal Number*" (Bir bölümü mevcuttur), "Porisms" (Kayıp) isimlerinde üç kitap yazmıştır. Kitabının giriş kısmında, aritmetik problemlerini çözmek için göstereceği yolların takip edilmesi gerektiğini ifade etmiştir (Christianidis, 2006). Mevcut bölümleri, 189 problemin çözümünü içermektedir. Diophantus, çok değişkenli iki veya üç denklemden oluşan, sınırsız sayıda rasyonel çözümü olan denklemlerin çözümleriyle uğraşmıştır. Bu denklemler, "*Diophantine denklemleri*" olarak bilinmektedir. Pisagor üçlülerinin $(2\mathrm{mn}, \mathrm{n}^2 - \mathrm{m}^2, \mathrm{n}^2 + \mathrm{m}^2)$ bulunması ve Diophantus'tan önce yaşamış olan Yunanlı matematikçi Archimedes (M.Ö 287-212)'in büyük baş hayvan problemi, bu tip denklemlerle ilk defa Diophantus'un uğraşmadığını göstermektedir (Swift, 1956; Horn ve Zakeri, 1998). Archimedes'in büyük baş hayvan probleminde, dört farklı renkte olan boğa ve ineklerin sayısının kaç olduğu istenmektedir. Yani denklem sekiz bilinmeyenden oluşmaktadır. Archimedes problemin çözümü için oluşturduğu lineer eşitlikleri, tek bir eşitliğe indirgeyerek, $x^2 - 4{,}729{,}494y^2 = 1$ eşitliğine ulaşmıştır. Buradan y sayısının 9314'ün bir katı olduğunu tespit etmiştir (Burton, 2007). İlerleyen yıllarda bu tip eşitlikler Pell eşitlikleri olarak adlandırılmıştır. Bugün Pell eşitlikleri olarak bildiğimiz ve Archimedes'in de uğraştığı $\mathrm{y}^2 = \mathrm{ax}^2 + 1$ tipindeki denklemler için Hintli matematikçi Brahmagupta ve Bhaskara ilk defa genel çözüm yöntemleri ortaya koymuşlardır. Bu durum, Diophantus'tan önce ve sonra bu tip denklemlerle uğraşıldığını, eşitliklerin doğru ve genel çözümlerinin yapıldığını ortaya koymaktadır. Diophantus, genel bir çözüm algoritması ve sistematik bir yöntem geliştirmemiştir. Diophantus, birden fazla bilinmeyeni tanımlayamamıştır. Buna paralel olarak, Babillilerin yaptıkları gibi, tüm bilinmeyenleri bir parametre cinsinden ifade ederek çözüme ulaşmaya çalışmıştır (Katz, 1998; NCTM, 2006).

Diophantus'un dördüncü kitabındaki problemlerden biri, "*Öyle iki sayı bul ki, bu iki sayının toplamı, bu iki sayının küpler toplamına eşit olsun*" şeklindedir. Diophantus bazı problemlerin çözümlerinde, Eski Mısırda kullanılan yanlışı deneme yolunu da kullanmıştır. "Bir sayının küpü ile herhangi bir sayının toplamı, küpü alınan sayı ile diğer sayının toplamlarının küpüne eşittir" problemini, yanlışı deneme yolunu kullanarak çözmüştür (Eves, 1983; Katz, 1998; Cajori, 2007). Diophantus'un negatif sayıları kabul etmediğini beşinci kitabının ikinci problemine verdiği cevaptan anlayabiliriz. Diophantus, negatif bir sayı ile negatif bir sayının çarpımının pozitif, negatif bir sayı ile pozitif bir sayının çarpımının negatif olduğunun farkında olmasına rağmen, denklem çözümlerinde negatif köklerin varlığını ortaya koyamamıştır. $4x+20= 4$ eşitliğinin çözümü için Diophantus, "Bu çok anlamsız, çünkü 4, 20'den daha küçük" cevabını vermiştir. Dolayısıyla 20 ile toplandığında 4 sonucunu verecek herhangi bir sayının olamayacağını düşünmüştür (Katz, 1998; Berlinghoff, Gouvea, 2004).

"Toplamları 20, karelerinin toplamı ise 208 olan sayılar nelerdir?" sorusunu ise daha sonra Harizmi'de göreceğimiz farklı bir parametre tanımlama yoluyla çözmüştür. Modern gösterimi $x+y=20$ ve $x^2+y^2=208$ olan sorunun çözümü için Diophantus z parametresini $x=10+z$ ve $y=10 – z$ şeklinde kullanarak sonuca ulaşmıştır (Katz, 1998). $x^2 +y^2=a^2$ tipindeki denklemleri çözerken, a için 4 gibi kesin bir değer vererek çözüme başlamış, y değişkenini x cinsinden tanımlama yoluna gitmiştir. $x^2+y^2=16$ eşitliğinde $y=2x-4$ tanımlamasını yapmış ve $4x^2+16–16x=16–x^2$ eşitliğini düzenleyerek çözüme ulaşmıştır. Diophantus, tamamlama ve indirgeme işlemlerini yaparak, $5x^2=16x$ olacak şekilde eşitliği düzenlemiştir (Katz, 1998; Puig, 2004; Christianidis, 2006; Derbyshire, 2006; Cajori, 2007). Eşitliğin sonsuz çözümü olmasına rağmen, eşitliğin kökü olarak sadece 16/5 ve 12/5 rasyonel sayılarını dikkate almıştır. Derbyshire (2006), bu çözümün etkileyici bir çözüm olmadığını ifade etmektedir. Çünkü Diophantus, $x^2+y^2=a^2$ tipindeki sınırsız rasyonel çözümleri olan denklemlerle uğraşmasına rağmen, çözüm olarak sadece 16/5 ve 12/5 rasyonel sayılarını kabul etmiştir. Sıfır için sembol kullanmadığından, kök olarak sıfırı göz ardı etmiştir (Derbshire, 2006).

Diophantusun cebir alanına yaptığı en büyük katkı cebirsel gösterimlerde kısaltmaları kullanmasıdır. Diophantus tarafından kullanılan kısaltmalar ve modern gösterim örnekleri Tablo 2'de verilmiştir (Stalling, 2000; Oliver, 2007).

Tablo 2. Diophantus kısaltmaları ve modern gösterimine örnekler

		Modern Gösterimi			Modern Gösterimi
Büyük Yunan Harfleri	$\overset{o}{M}$	Sabit Terim	**Diophantus Kısaltmaları**	$\overset{o}{M}\ \varepsilon$	5
	ς	Bilinmeyen (x)			
	Δ^{γ}	Bilinmeyenin Karesi(x^2)		ς $\wedge$	–x
	K^{γ}	Bilinmeyenin Küpü(x^3)			
	$\wedge$	Eksi sembolü		ς δ	4x
Küçük Yunan Harfleri	β	2			
	γ	3		$\Delta^{\gamma}\ \gamma$	$3x^2$
	δ	4			
	ε	5		$K^{\gamma}\ \beta$	$2x^3$

Euclid ve Diophantus'un ardından cebir üzerine çalışmalar Hintli matematik bilginleriyle devam etmiştir.

Hint Kültüründe Cebir

Diophantus'tan sonraki süreçte de Hintli matematikçiler cebirsel ifadelerin gösterilişlerinde kısaltmaları kullanmışlardır. 500'lerden itibaren Hint matematiğinde önemli gelişmeler yaşanmıştır. Hintli matematikçiler, Aryabhata (525), Brahmagupta (628), Mahavira (850) ve Bhaskara (1150) aritmetik ve cebir alanında önemli çalışmalar yapmışlardır. Ancak Bhaskara'dan sonraki süreçte Hint matematiği bir duraklama sürecine girmiştir. Cebirsel gösterimlerde kısaltmalara başvurulması Diophantus'la başlamış, Hintli Matematikçi Brahmagupta (M.S. 628) ile devam ettirilmiştir. Brahmagupta'nın kullandığı kısaltmalar Tablo 3'te gösterilmiştir (Stallings, 2000; NCTM, 2006; Oliver, 2007).

Tablo 3. Brahmagupta kısaltmaları

Sembol	bha	*ya*	*ka*	k(a)	*ru*	*ya ka* 6 bha	k(a) 5 *ru* 2
Modern Gösterim	Çarpım	x	y	$\sqrt{\ }$	Tamsayı	6xy	$\sqrt{5}-2$

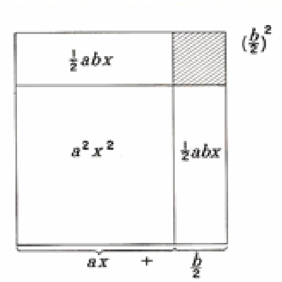
Brahmagupta, modern gösterimi $x^2 - 10x = -9i$ şeklindeki ikinci dereceli denklemi aşağıdaki şekilde göstermiş ve çözmüştür.

$$yav\ 1\ ya\ 10$$

$$ru\ 9$$

"*Sabit sayı olan (9), x^2'nin katsayısı olan 1 ile çarpılarak (9) bulunur. Bu değer, bilinmeyen terimin katsayısı olan (10)'un yarısının karesi ile toplanarak, 16'ya ulaşılır. 16'nın karekökü bilinmeyen terimin katsayısı olan (10)'un yarısından çıkarılarak 9 elde edilir. Bu değer,* x^2*'nin katsayısı olan 1 ile bölünerek 9 sonucuna ulaşılmış olur*" (Katz, 1998; NCTM, 2006).

Sözel çözüm incelendiğinde, Brahmagupta'nın modern gösterimi $x^2 - 10x = -9$ olan denklemi çözerken, geometrik bir düşünce yapısına başvurduğu anlaşılmaktadır. Yapılan çözümün geometrik biçimi aşağıda verilmiştir (Katz, 1998; NCTM, 2006; Plofker, 2006).



$$\left(a^2x^2 + abx\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \qquad x = \frac{-b + \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$$

$$ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2$$

$$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$ax = \sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}$$

$$x = \frac{\sqrt{ca + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a}$$

Diğer bir Hintli matematikçi Bhaskara (M.S 1150), $ax^2 + bx = c$ tipindeki denklemleri çözerken Babillilerin, Brahmagupta'nın ve Harizmi'nin yaptığı gibi kareye tamamlama tekniğini kullanmıştır. Öncelikle eşitliğin her iki tarafına uygun bir sayı ekleyerek sol tarafı $(rx - s)^2 =$ dolacak şekilde tam kare olarak yazmıştır. Daha sonra bu eşitliği, rx – s= $\sqrt{d}$ şekline getirmiş ve buradan x'i bulmuştur. $\sqrt{d}$< s olduğunda denklemin köklerinin $\frac{(s+\sqrt{d})}{r}$ veya $\frac{(s-\sqrt{d})}{r}$ olacağını ifade etmiştir.

Hint cebirinde cebirsel eşitlikler ifade edilirken kısaltmalar kullanılmış olsa da, Hint cebirinin büyük ölçüde düz yazı formunda sunulduğu söylenebilir. Dikkate değer olan şey negatif sayıların doğru şekilde kullanılmasıdır. Dikkat edilirse sayının üstüne koyulan nokta sayının negatif olduğunu göstermektedir (NCTM, 2006). Negatif sayıların ve irrasyonel sayıların varlığını ilk defa Hintli matematik bilginleri ortaya koymuşlardır. Bhaskara $x^2 - 45x = 250$ eşitliğinin çözümünü 50 ve -5 olarak bulmuş olmasına rağmen, negatif sayıları çözüm kümesi içerisine almamıştır. Ayrıca aşağıdaki eşitliği elde etmeleri irrasyonel sayılarla işlemler yaptıklarının da bir göstergesidir (NCTM, 2006; Cajori, 2007).

$$\sqrt{a \mp b} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \mp \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad \sqrt{a} \mp \sqrt{b} = \sqrt{a+b \pm 2\sqrt{ab}}$$

Eski Mısırdaki yanlışı deneme yolu, Babilliler, Eski Yunan ve Hintlilerdeki cebirsel eşitliklerin geometrik düşünce biçimi ile çözümü cebir kavramının ortaya çıkmasında etkili olmuş olsa da, Cebir kavramı İslam dünyasıyla anlam kazanmış ve Batı dünyasına aktarılmıştır.

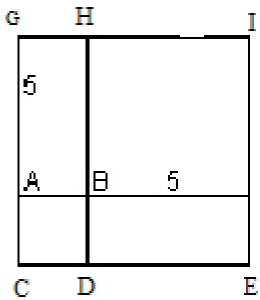
İslam Dünyasında Cebir

İslam dünyasına bakıldığında, İslam dünyasının cebir alanındaki en önemli matematik bilgininin 780–847 yılları arasında yaşamış olan Harizmi olduğu söylenebilir. Matematik alanlarından Cebir'in mucidi Harizmi'dir. Sayı sisteminin ilk şeklini Hindistan'dan alarak Arap sayı sistemini geliştirmiştir. Batının ve dolayısıyla bugünün matematiğinin kullandığı sayılar Harizmi'nin sekizinci yüzyılda kullandığı sayıların bir çeşit uyarlamasıdır. Harizmi Hindistan'dan o günün astronomi bilgilerini de Bağdat'a taşıdı. Harizmi "Darül-Hikme'deki ilk dönemlerinde saray çevresine ve tüccarlara dört işlemi içeren aritmetik öğretti. Bunun yanında İslam'a göre miras hukukunu yürütmekte olan kadılara bu konuyla ilgili bazı hesaplamalar öğretti. Özel miras problemlerinin ortaya çıkardığı denklemleri çözme durumunda kalan Harizmi bugünkü bildiğimiz anlamda cebire yönelmiştir. Bu alanda yaptığı çalışmaları, daha sonra matematiğin bir kolu olarak bildiğimiz cebirin adını alacağı "*Al KitabFi Hisab Al Cabr wal Muqabalah*" adlı kitabında toplamıştır. Kitabı üç bölümden oluşmaktadır. Harizmi kitabının birinci bölümünde cebirsel eşitlikleri çözme sürecini açıklamıştır. Harizmi tüm lineer ve ikinci derecen denklemlerin $\mathrm{ax^2 = bx}$, $\mathrm{ax^2 = b}$, $\mathrm{ax = b}$, $\mathrm{ax^2 + bx = c}$, $\mathrm{ax^2 + c = bx}$, $\mathrm{ax^2 = bx + c}$ olacak şekilde altı biçime indirgenebileceğini ifade etmiştir. "*Al KitabFi Hisab Al Cabr wal Muqabalah*" Rönesans dönemi cebir çalışmaları için en önemli kaynak olmuştur. Buradaki Al Cabr terimi İngilizce ve Fransızcaya algebra olarak geçmiş ve Türkçe'de de cebir olarak kullanılmıştır. Ayrıca Harizmi'nin bu kitapta kullanmış olduğu çözüm yöntemleri ve işlem yönergeleri Arapçada isminin Al Khwarizm olarak telaffuz edilmesi nedeniyle Avrupa'daki matematikçiler Harizmi'nin yöntemleri anlamında "algorithm" deyimini kullanmışlardır (Arndt, 1983; Baki, 1992; Baki, 2008).

Harizmi, 825 yılında yazmış olduğu"*Al KitabFi Hisab Al Cabr wal Muqabalah*" (Tamamlama ve Dengeleme Yoluyla Hesaplama) isimli kitabında, denklemlerin çözümlerini Babil'de, Euclid'in Eski Yunanında ve Hintlilerde görülmemiş bir şekilde yapmıştır (Arndt, 1983; Katz, 1998; NCTM, 2006; Brezina, 2006). Harizmi'nin en büyük başarılarından biri, cebiri geometriden kurtarması ve matematiğin bir dalı olarak ortaya koymasıdır. Nitekim geometrik bir düşünce yapısıyla yapılan cebirsel çözümler, Harizmi'den önce vardı (Brezina, 2006). Harizmi, denklemleri *"al-jabr"* ve *"al-*

muqabala" denilen iki işlem kullanarak çözmüştür. Al-jabr (Cebir) tamamlama anlamına gelmektedir. Bir denklemde negatif terimlerin ortadan kaldırılması işlemini ifade etmektedir. $3x + 2 = 4 - 2x$ eşitliğinin $5x + 2 = 4$ olarak yazılması al-jabr ifadesine karşılık gelmektedir. Aslında Harizminin yaptığı bu işlem günümüz cebir anlayışını yansıtmaktadır. Eşitliğin her iki tarafına $2x$ eklenerek negatif terimlerin yok edilmesi eşitliğin çözümünü kolaylaştırmaktadır. "Al-muqabala" terimi ise dengeleme anlamına gelmektedir ve denklemin iki tarafında aynı kuvvetten pozitif terimlerin indirgenebileceğini ifade etmektedir. $5x + 2 = 4$ eşitliğinin $5x = 2$ olarak yazılması "al-muqabala" ifadesine karşılık gelmektedir. Altı değişik tipteki denklemlerin her birinin çözümü için birer algoritma ortaya koyması, kitabında daha karışık ve soyut problemlerin olması, Harizmi cebirinin, Babil ve Yunan'daki cebir anlayışından diğer bir farkıdır. Harizmi, bilinmeyen yani x için şey, x^2 için $\overline{mal}$, x^3 için ka'b, x^4 için $\overline{mal}\ \overline{mal}$, x^5 için ise ka'b $\overline{mal}$ sözcüklerini kullanmıştır (Katz, 1998; NCTM, 2006; Baki, 2008).

Harizmi kitabının ikinci bölümünde, 4. tipteki $x^2 + 10x = 39$ eşitliğininin çözümünü şu şekilde yapmıştır; "*Şeylerin sayısının yarısını al, 5, onu kendisi ile çarp, 25, buna 39'u ekle, 64, bunun karekökünü al, 8, bunu şeylerin sayısının yarısından çıkar. Sonuç 3'tür*" (Varadarajan, 2003). Harizmi'nin çözümü, Babillilerin çözümüne benzemekle birlikte, belirgin farklılıkları vardır. İlki, Harizmi bilinmeyen için "şey" sözcüğünü kullanmıştır. İkincisi, Harizmi'nin çözümü evrenseldir ve örneğin; yukarıda yaptığı çözüm$x^2 + bx = c$ formundaki her eşitliğe uygulanabilmektedir (Kvasz, 2006). Harizmi, yaptığı çözümleri geometrik şekillerle göstererek doğrulamıştır. Bu durum, onun eski Yunan'daki geometrik gösterim anlayışından etkilendiği şeklinde yorumlanabilir. Harizmi'nin çözümlerinin geometriye dayanması, Eski Yunandan esinlendiğini ortaya koysa da, geometrik modelleme biçimi Babillilerin çözümlerindeki geometrik düşünce biçimine benzemektedir (Katz, 2007).x^2, x br uzunluklu bir karenin alanı, x ise kenar uzunlukları x ve 1 br olan dikdörtgenin alanı olarak düşünülürse, kareye tamamlama tekniği kullanılarak çözüme ulaşılabilir. Harizmi'nin yapmış olduğu çözümün, geometrik olarak doğrulanması aşağıda verilmiştir (Baki, 1992; Baki, 2008).



Şekil 8. Harizmi'nin modellemesi

Harizmi, $x^2 + 10x = 39$ denklemini çözmek için önce ABCD karesini oluşturmakta ve bu kare yardımıyla diğer dikdörtgen ve kareleri tanımlamaktadır. ABCD karesinin bir kenarını bir şey olarak (bizim anladığımız şekilde x olarak) almakta ve bu kareye A, B ve D köşelerinden 5 şey ekleyerek CGEI karesini elde etmektedir. Son adım olarak, CGEI karesinin alan formülünden denklemin çözümüne ulaşmaktadır. Harizmi'nin yaptığı çözümün modern şekilde ifadesi şu şekildedir: $A(CEIG) = (5 + x)^2 = x^2 + 10x + 25$ olur. $x^2 + 10x = 39$ denkleminden $x^2 + 10x$ ifadesinin 39 olduğu bilinmektedir. Öyleyse, $A(CEIG) = (5 + x)^2 = 39 + 25 = 64$'tür. Buradan, $(5 + x)^2 = 64$ olacağından 5+x= ± 8 eşitliği elde edilir. Sonuç olarak $x = 3$ veya $x = -13$ olarak bulunur. Harizmi pozitif kökü kabul etmiş, negatif kökü ise reddetmiştir (Baki, 1992; Baki, 2008).

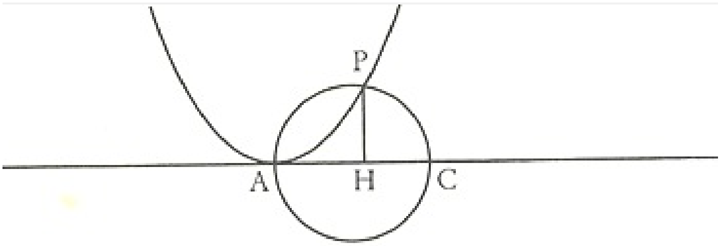
Harizmi cebirsel gösterimlerde sembolleri kullanmamıştır. Cebirsel gösterimleri, cebirsel soruları ve çözümlerini yazılı olarak yapmıştır. Harizmi'nin kitabındaki bir problem şu şekildedir; " *10 sayısı iki parçaya ayrılıyor. Ayrılan parçaların her biri kendisi ile çarpılıyor ve daha sonra birbirleriyle toplanıyorlar. Bunların farkları da bunlara ekleniyor. Toplamın sonucu 54 olduğuna göre x=?*" Modern ifadesi; $(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x) - x = 54$ olan eşitliği Harizmi, $100–20x+x^2+x^2+10–x–x=54$ olarak yazdıktan sonra elde ettiği $110 – 22x+2x^2=54$ eşitliğini düzenleyerek eşitliğin her iki tarafına 22x eklemiş (al-jabr) ve $110+2x^2=54+22x$ eşitliğine ulaşmıştır. Daha sonra eşitliğin her iki tarafından 54 çıkararak (al-muqabala), $56+2x^2=22x$ eşitliğine ulaşıp, her iki tarafı iki ile bölerek $x^2+28=11x$ şeklinde eşitliğe son biçimini vermiştir. 5. tipteki bu eşitliği kendi geliştirdiği algoritmayı kullanarak çözmüştür (Katz, 2007). Harizmi, irrasyonel sayılar içeren hiçbir problem çözmemesine rağmen, kitabının başında köklü sayılarla nasıl uğraşılacağı ile ilgili bilgiler sunmuştur. $n.\sqrt{q}$ sayısını n'yi kök içine alarak $\sqrt{n^2.q}$ şeklinde yazmıştır. İslam dünyasında Harizmi'den sonraki matematik bilgini Al-Karaji, benzer şekilde 25 ile $\sqrt{25}$'in çarpımını, 25'i kök içine alarak $\sqrt{15625}$ olarak yapmıştır. Ortaçağ cebir anlayışında, Abu-Kamil'in yaptığı gibi $\sqrt{8}x$ yerine $\sqrt{8x^2}$'nin tercih edilmesinin nedeninin bilinmeyen (şey) sayısının irrasyonel olarak ifade edilememesinden kaynaklanmış olabileceği düşünülmektedir. Nitekim kaç tane şey (dirham) tipindeki bir soruya $\sqrt{8}$ tane cevabını vermek o dönemin cebir anlayışı için zor olmuş olabilir (Groza, 1968; Katz, 1998; Oaks, 2009).

İslam dünyasında Harizmi'den sonra Ibn Türk, Thabit Ibn Kurra, Abu Kamil, Al-Karaji, Al-Samaw'al, Ömer Hayyam, Şerafeddin Tusi cebirle uğraşan diğer matematik bilginleridir. Ibn Turk, Kitab al-jabr wa'l muqabala isimli kitabında, Harizmi'nin kitabındaki 1, 4, 5 ve 6. tiplerdeki denklemlerin çözümündeki geometrik düşünce biçimini geliştirerek çözümler yapmıştır. Thabit ibn Kurra (830-890) ve Abu Kamil (850-930), yaptıkları çözümlerin geometrik olarak doğrulanmasında Euclid'in Elementler II kitabından esinlenmişlerdir (Katz, 1998). Abu-Kamil, cebir üzerine, "*Kitab fi al-jabr wa'l muqabala*" isimli bir kitap yazmıştır. Abu Kamil cebirsel problemlerde irrasyonel sayılarla da uğraşmıştır. Ayrıca çözümlerde değişkenler arasında dönüşümlere başvurmuştur. Modern şekilde ifadesi $\left(\frac{x}{10-x}\right)^2 - \left(\frac{10-x}{x}\right)^2 = 2$ eşitliğinin çözümünü şu şekilde yapmıştır: Öncelikle $y = \frac{10-x}{x}$, $\frac{1}{y} = \frac{x}{10-x}$ seklinde düşünerek, eşitliği y cinsinden $\frac{1}{y^2} = y^2 + 2$ olarak yazmış, eşitliğin her iki tarafını y^2 ile çarparak $(y^2)^2 + 2y^2 = 1$ eşitliğine ulaşmıştır. Buradan y'yi $\sqrt{\sqrt{2}-1}$olarak, x'i ise $10 + \sqrt{50} - \sqrt{50 + \sqrt{20.000} - \sqrt{5000}}$ olarak bulmuştur (Katz, 1998). Harizmi ve Abu-Kamilden sonra gelen İslam dünyasının önde gelen matematikçileri, Al-Karaji ve Al-Samaw'al'dır. Al-Karaji, ilk defa serileri formülleştirmeye çalışmış ve yaptığı eşitliğin sonsuza kadar gittiğini ifade etmiştir. Eski Yunanda Diophantus, sadece bilinmeyenlerin üçten büyük kuvvetlerini ortaya koyabilmiştir. Al-Karaji, cebir üzerine yazmış olduğu Al-Fakhri (Harika) isimli kitabında, $1/x^2$'yi juzu mal şeklinde yazarak belirtmiştir. Al-Karajinin ortaya koyduğu yapı aşağıda verilmiştir (Katz, 1998; Baki, 2008; Oaks, 2009).

$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3 = \ldots$$
$$\frac{1}{x} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^4} = \ldots$$

Al-Karaji, üslü bilinmeyen ifadeler ile ilgili yukarıdaki kuralı bulduktan sonra, tek terimli ve çok terimlilerin çarpımı, toplamı ve farkı ile ilgili genel ilkeler ortaya koymuştur. Bölme işlemi için ise negatif sayılarla yaşadığı zorluk nedeniyle sadece tek terimlileri bölen olarak kullanmıştır (Katz, 1998). Modern gösterimi $\frac{10-x}{x} - \frac{x}{10-x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ eşitliğini çözerken, öncelikle $\frac{x}{10-x}$'i eşitliğin diğer tarafına atmış, ardından eşitliğin her iki yanını (10-x) ile çarpmıştır.$\frac{100+x^2-20x}{x} = 8\frac{1}{3} + \frac{x}{6}$ şekline dönüşen eşitliğin her iki yanını x ile çarparak $100+x^2-20x = 8\frac{1}{3}x + \frac{x^2}{6}$ eşitliğine ulaşmıştır. Abu-Kamil ve Al-Karaji'nin bölme içeren cebirsel yapıları polinom tipine dönüştürdükleri görülmektedir. Bunu, eşitliği aynı cebirsel ifade ile çarparak sadeleştirme yoluyla gerçekleştirmişlerdir. Ancak $(2x+1).(x^2-1)$ türündeki çarpma işlemini yapmaktan kaçındıkları görülmektedir (Oaks, 2009).

İslam dünyasında üçüncü dereceden denklemlerin çözümleriyle uğraşan ilk matematikçi 1048-1131 arasında yaşamış olan Ömer Hayyam'dır. Hayyam, üçüncü dereceden denklemleri sınıflandırmış ve çözümlerini geometrik yolla yapmıştır. x, x^2, x^3 gibi günümüz cebirsel sembollerini kullanmamış ve bu yöntemde uzunluk sözkonusu olduğu için negatif çözümler düşünülmemiştir. Şekil 9'da açıklandığı gibi Hayyam, $x^3+ax=b$ tipindeki denklemleri günümüz diliyle sırasıyla şu adımları takip ederek çözmüştür. Önce, $x^2 = \sqrt{a}y$ parabolünü çizdi, sonra parabolün tepe noktasından bir teğet çizdi ve yarıçapı b/a olan ve parabolü teğet noktasında kesen bir çember çizdi. Parabolle çemberin diğer kesişim noktası P noktasından teğete inilen dik IPHI doğru parçası H noktasında kessin, *IAHI* uzunluğu denklemin çözümlerinden biridir (Baki ve Güven, 2009). İlerleyen yıllarda Cardano, üçüncü dereceden denklemlerin çözümü için Hayyam'ın çözümlerinden yararlanarak yeni yöntemler geliştirmiştir (Baki, 2008).



Şekil 9. Ömer Hayyam'ın 3. dereceden denklemlerin çözümü için geliştirdiği model

İslam dünyasının diğer bir matematik bilgini 1200'lerde yaşamış olan Şerafeddin Tusi'dir. Ömer Hayyam gibi o da, üçüncü dereceden denklemlerin çözümleriyle ilgilenmiştir. $x^3+d=bx^2$ eşitliğini çözerken kullandığı yöntem Ömer Hayyam'ın kullandığı yöntemden farklıdır. Eşitliği öncelikle $x^2.(b – x)=d$ şeklinde yazmıştır. Daha sonra eşitliğin sol tarafının değerinin d veya d olmamasına bağlı olarak eşitliğin bir çözümünün olup olamayacağı sorusuna yönelmiştir. Bunu belirlemek için, fonksiyonun maksimum değerini bulmaya ihtiyacı vardı. Fonksiyonun maksimum x değerini 2b/3 olarak aldığında fonksiyonun değerinin $4b^3/27$ olduğunu ifade etmiştir. Fonksiyonun değerinin $4b^3/27$'den küçük olduğunda iki çözümünün, büyük olduğunda ise hiçbir pozitif çözümünün olmadığını ifade etmiştir. Ancak yaptığı çözümü bir algoritmaya dayandırmamıştır. Şerafeddin Tusi tarafından yapılan çözüm daha sonra ne İslam dünyasında ne de Avrupa'da devam ettirilmiştir (Katz, 2007). İslam dünyasında cebir alanında atılan adımlar ilerleyen süreçlerde Batılı matematikçiler tarafından alınarak geliştirilecektir.

Batı Dünyasında Cebir

Genellikle yüksek ortaçağ denilen ve Roma imparatorluğunun çöküşünden 9. yüzyılın sonuna kadar uzanan dönem boyunca, salgınlardan, kıtlıklardan, savaşlardan kırılmış olan Batı Avrupa büyük bir siyasi karışıklığa, iktisadi gerilemeye, aydınlık ve bilim adına karanlığa gömülmüştü. Bu durum Avrupa'yı 1200-1300'lü yıllar arasında Euclid'in, Archimedes'in, Harizmi'nin, El Biruni'nin, İbni Sinan'ın eserlerini öğrenmeye yöneltmiştir Avrupa'ya cebirin geçisi Harizmi'nin eserleri sayesinde 12. ve 13. yüzyıllarda olmuştur. Avrupa'nın ilk matematikçilerinden olan, İtalyan matematikçi Fibonacci'nin 1202 yılında yazdığı kitapta, başta Harizmi olmak üzere, İslam dünyasının matematik bilgilerinin yaptıkları çalışmalarından etkilendiği belirtilmektedir (Katz, 1998; Ifran, 2003).

Fibonacci, Liber Abaci isimli kitabında, Harizmi, Abu-Kamil ve Al-Karaji'nin kitaplarında çözmüş oldukları problemleri aynen alıp, bu problemler üzerine çalışmıştır. Kitabının son bölümünde Harizmi'nin altı tipe ayırdığı denklemlerin çözümlerini geometrik olarak yapmış, Harizmi ve Abu-Kamilin çözümlerini yaptığı "*10 sayısı iki parçaya* *ayrılıyor*" şeklinde başlayan problemlerin çözümleriyle uğraşmıştır. Fibonacci, problem çözümlerinde çeşitli çözüm yöntemleri kullanmıştır. Kullanmış olduğu çözüm yöntemlerinden biri Eski Mısırda kullanılan yanlışı deneme yoludur (Katz, 1998). Yanlışı deneme yolunu kullanarak çözdüğü bir problem şu şekildedir. "*Yükseklikleri sırasıyla 30 ve 40 adım olan, iki kulenin birbirine olan uzaklıkları 50 adımdır. Kulelerin üzerinde duran iki kuş, aynı hızla uçarak yerde bulunan yiyeceğe aynı anda ulaştıklarına göre, yemin kulelere olan uzaklıkları kaçar adımdır* " (Grugnetti, 2002). Fibonacci, aslan problemi olarak bilinen problemi de yanlışı deneme yolu ile çözmüştür. Problem şu şekildedir: "*50 adım derinliğindeki bir çukurdaki aslan, her gün bir adımın yedide biri kadar yükselip, her gece bir adımın dokuzda biri kadar iniyor. Kaç gün sonunda aslan çukurdan çıkar?*". Fibonacci'nin kullandığı diğer bir çözüm yolu ise iki bilinmeyenin olduğu bir problemde yeni bir bilinmeyen tanımlayarak çözüme ulaşmaya çalışmasıdır. Yeni bir bilinmeyen tanımlama yolunu kullanarak çözüme ulaştığı bir problemi şu şekilde örneklendirebiliriz. "*Ahmet ve Cemilin belli miktar paraları vardır. Cemil, Ahmet'e 1 TL verirse paraları eşit oluyor. Ahmet, Cemil'e 1 TL verirse Cemil'in parası Ahmet'in parasının 10 katı oluyor. Buna göre Ahmet ve Cemil'in başlangıçta ne kadar paralarının olduğunu bulunuz?*". Fibonacci, modern gösterimi $x+1=y-1$ ve $y+1=10(x-1)$ olan problemin çözümünü yaparken $z=x+y$ şeklinde z gibi bir parametre tanımlamıştır. Daha sonra $x+1=\frac{1}{2}z$ ve $y+1=\frac{10}{11}z$'ye ulaşarak x ve y bilinmeyenlerini z cinsinden yazmıştır. İki eşitliği toplayarak $z+2=\frac{31}{22}z$ eşitliğine ulaşmıştır. Buradan$z=\frac{44}{9},\ x=1\frac{4}{9},\ y=3\frac{4}{9}$sonucunu elde etmiştir.

Genel olarak o dönem abaküsçülerinin tümü, Harizminin denklemleri sınıflandırmasını ve çözüm yöntemini dikkate alarak cebir ile uğraşmaya yönelmişlerdir. Ancak Maestro Dardi, 1344 yılında yazmış olduğu kitapta bu sınıflandırmayı genişletmiştir. Dardi, $x^3+bx^2+cx=d$ tipindeki denklemleri çözerken eşitliğin sol tarafını, iki sayının toplamının parantez küpü olarak ifade etmeye çalışmıştır. Benzer şekilde Pierro Della Frencesca (1420-1429), Dardi'den daha ileri giderek, beşinci ve altıncı dereceden denklemlerin çözümü ile uğraşmıştır. Abaküsçülük akımı, son abaküsçü Pacioli ile son bulmuştur. Pacioli cebirsel problemlerini büyük bir kısmını Pierro'nun çalışmalarından almıştır. Avrupa'da 16. yüzyıla kadar denklemlerin çözümleri sözel olarak yapılmıştır. İslam dünyasının etkisiyle İtalya'da sürdürülen cebirin gelişimi ilerleyen süreçlerde devam etmiştir. 14. ve 15. yüzyıllar arasında Fransa, Almanya, İngiltere ve Portekiz'de cebir üzerine yapılan çalışmalar Tablo 3'te özetlenmiştir (Katz, 1998).

Tablo 3. Fransa, Almanya, İngiltere ve Portekiz’de cebir üzerine yapılan çalışmalar

Yazar Ülke	Kitabı Yılı	Çalışmaları
Nicolas Chuquet Fransa (1445-1488)	Triparty 1484	Harizmi’nin ortaya koyduğu denklem çözümlerini farklı dereceli her bir denklem için genelleyerek, cebiri İtalyan abaküsçülerinden daha ileri bir noktaya taşımıştır. $cx^m = bx^{m+n} + x^{m+2n}$ tipindeki denklemlerin çözümü için $x = \sqrt[n]{\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}}$ kuralını ortaya koymuştur. 2^0'dan 2^{20}'ye kadar olacak şekilde 2’nin kuvvetlerinin tablosunu yaptı. İlk satıra 2’nin kuvvetlerini, altlarındaki satıra ise değerlerini yazdı. Buradan üslü sayılarda çarpma kuralını tanımladı. Negatif üssün varlığını bilmesine rağmen, oluşturduğu tabloda *Al-Samaw-al’ın* aksine 2’nin negatif kuvvetleri yoktu.
Christoff Rudolff Almanya (1499-1545)	Art of the Coss 1520	Almanya’da cebir ile ilgili çalışmalar 15. yüzyılın sonlarında başlamıştır. Art of the Coss Almanya’daki kapsamlı ilk cebir kitabıdır. Harizmi’nin denklem sınıflarını kullanmak yerine, denklemleri sekiz sınıfa ayırmıştır. Chuquet gibi, denklemleri indirgeme yoluyla çözmüştür. Örneğin; $ax^n + bx^{n-1} = cx^{n-2}$ eşitliğinin çözümü için; $x = \sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \frac{c}{a}} - \frac{b}{2a}$ kuralını ortaya koymuştur. İlk defa modern karekök sembolünü kullanmıştır. Chuquet gibi Rudolff da 2’nin sadece pozitif kuvvetlerinin tablosunu yapmıştır.
Michael Stifel Almanya (1487-1567)	Arithmetica Integra 1553	Avrupa’da Pascal üçgenini ilk defa ortaya koyan matematikçidir. Yazdığı kitap, Rudolff’un kitabının genişletilmiş halidir. Kendinden önceki bilginler gibi o da, negatif kökü kabul etmemiştir. İkinci dereceli denklemleri üç standart biçimini, $x^2 = bx + c$ biçiminde tek tip olarak ilk defa Stifel göstermiştir. Çözüm için, $x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ kuralını ortaya koymuştur. 2’nin hem negatif, hem de pozitif kuvvetlerinin tablosunu yapmıştır.
Robert Recorde İngiltere (1510-1558)	The Whetstone of Witte 1557	Recorde, yazdığı kitapta Alman kaynaklarına bağlı kaldığından cebir adına orijinal bir çalışma ortaya koyamamıştır. Günümüzde kullandığımız eşittir sembolü ilk defa Recorde’nin kitabında görülmüştür.

Tablo 3'ün devamı

Yazar Ülke	Kitabı Yılı	Çalışmaları
Pedro Nunes Portekiz (1502-1578)	Libro de Algebra 1532	İtalyan matematikçi Pacioli'den etkilenmiştir. Günlük hayata ilişkin cebirsel problemler yerine, soyut cebirsel problemlerin çözümleriyle ilgilenmiştir. İki sayının çarpımı 10, karelerinin toplamı ise 30'dur. Buna göre bu sayıları bulunuz? Problemini üç farklı teknikle çözmüştür. Modern şekilde gösterimi, $x^2 + \frac{100}{x^2} = 30$ olan eşitliğin, her iki tarafını x^2 ile çarparak, eşitliği indirgemiştir. İndirgenmiş yapının çözümü, Harizmi tarafından da yapılmıştır. Buradan $x^2 = 15 \pm \sqrt{125}$ sonucuna ulaşmıştır. Aranan sayıları; $\sqrt{15-\sqrt{125}}$ ve $\sqrt{15+\sqrt{125}}$ olarak bulmuştur.

Üçüncü dereceden denklemlerin çözümü, 15. yüzyıl ile 16. yüzyılın başına kadar çoğu matematik bilgini için bir uğraş alanı olmuştur. 1500-1515 yılları arasında Bologno üniversitesinde profesör olan Scipione del Ferro (1465-1526), x^3+cx=d tipindeki denklemlerin çözümleri için cebirsel bir yöntem geliştirmiştir. Bilindiği gibi İslam dünyasında sadece pozitif katsayılı denklemler geometrik bir yolla çözülmüş, negatif çözümler dikkate alınmamıştır. Ferro'nun üçüncü dereceden denklemleri doğrusal, pozitif katsayılı ve sabit terimden oluşmaktadır. Ferro ölmeden önce yaptığı çözümleri öğrencisi olan Antonio Marie Fiore (16. yüzyılın ilk yarısı) açıklamıştır. O dönemin İtalyan matematikçilerinden Niccolo Tartaglia (1499-1557), $x^3+bx^2=d$ tipindeki denklemlerin çözümlerini ilk kendisinin keşfettiğini iddia etmiştir. Fiore, halkın huzurunda Tartaglia'ya meydan okumuş, ancak Tartaglia, Fiore'nin yapamadığı üçüncü dereceden denklem çözümlerini doğru olarak yaparak, halkın huzurunda kazandığını ilan etmiştir (Cajori, 2007).

Bir diğer İtalyan matematikçi Gerolamo Cardano (1501-1576), Tartaglia'dan yaptığı çözümleri kendisine anlatmasını istemiştir. Tartaglia, Cardano'ya yaptığı çözümleri yayımlamaması koşuluyla anlatacağını söylemiştir. Tartaglia, üç farklı üçüncü dereceden denklem formunun çözümlerini şiir formatında Cardano'ya açıklamıştır. İlerleyen süreçlerde Cardano, denklem çözümlerinin Tartaglia'dan önce del Ferro tarafından yapıldığını öğrenmiştir. Bu duruma sinirlenen Tartaglia, 1545 yılında yayımladığı Ars Magna sive de Regulis Algebracis isimli eserindex^3+bx=c tipindeki denklemlerin çözümlerini sözel olarak yapmış ve çözümü veren formülü açıklamıştır (Katz, 1998). Cardano, $x^3 \pm bx=c$ tipindeki denklemlerin çözümlerini modern gösterimiyle;

$$x=\sqrt[3]{\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}-\sqrt[3]{-\frac{c}{2}+\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{3}\right)^3}}$$ ve

$$x=\sqrt[3]{\frac{d}{2}+\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{\frac{d}{2}-\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^3}}$$ şeklinde vermiştir.

Cardano, $(c/3)^3 > (d/2)^2$olduğunda, negatif sayıların karekökünün alınamayacağını düşünerek çözümü yapamamıştır. Cardano, çözümünü yaptığı problemlerin çözüm kümesinde negatif sayıların kareköküne ulaşmıştır. Ancak bunları özel bir sembolle gösterememiştir. "*10 sayısı iki parçaya ayrılıyor. Parçaların çarpımı 40 olduğuna göre, her bir parçayı bulunuz?* " probleminde çözüm kümesini $5+\sqrt{-15}$ ve $5-\sqrt{-15}$ olarak bulmuş, bulduğu sonuçları doğrulamak için iki sonucu çarpmış ve 25+15=40 sonuca ulaşmıştır. Dolayısıyla hesaplamalarda negatif kökü ilk kullanan matematikçinin Cardona olduğunu söyleyebiliriz (Green, 1976; Katz, 1998; NCTM, 2006). "-6 sayısı iki parçaya ayrılıyor. Parçaların çarpımı 24 olduğuna göre, her bir parçayı bulunuz? " probleminde Cardano,$-3+\sqrt{-15}$ ve$-3-\sqrt{-15}$ gibi iki köke ulaşmıştır. (Jahnke vd, 2002). Negatif sayıların karekökü ilk defa M.S. 50'lerde Heron'un çalışmalarında görülmüştür. Yunan matematikçi $336x^2+24=172x$ eşitliğinin kökünü $\sqrt{1{,}849-2{,}016}$ olarak bulmuş, ancak sonucu reddetmiştir. Heron gibi, Yunanlı bir diğer matematikçi Diophantus, Hintli matematikçilerMahavira ve Bhaskara'da, kök içi negatif olan sayıları tanımlayamamışlardır. Avrupa'da Nicolas Chuquet ve Luca Pacioli'de kök içi negatif olan sayıları reddetmişlerdir (Green, 1976; NCTM, 2006). Cardano üçüncü dereceden denklemlerle uğraşırken, öğrencisi olan Lodovica Ferrari, dördüncü dereceden denklemlerin çözümlerini yapmayı başarmıştır. Çözümü yaparken öncelikle denklemdeki x^3'lü terimleri yok etmiş, ardından eşitliğin sol tarafını iki terimin toplamının karesi şeklinde yazmaya çalışmıştır. Cardano, öğrencisinin yapmış olduğu çözümlere Ars Magna isimli kitabının son bölümünde yer vermiştir (Katz, 1998).

Cardanodan sonra gelen diğer önemli batılı matematikçi Rafael Bombelli (1526-1572)'dir. Bombelli, Cardano'nın formülünden gelen negatif sayıların karekökleri ile uğraşmış, kompleks sayıları özel sembollerle göstermiştir. $x^3+bx^2=d$tipindeki denklemlerde $(c/3)^3 > (d/2)^2$olduğunda, elde edilen sayıları kendine özgü şekilde adlandırmıştır. 2+3i sayısını $2p\dim 3$, 2-3i sayısını ise $2mdi\,m3$ şeklinde yazmıştır. Bombelli yaptığı çözümler esnasında ulaştığı bu sayıları sistematik bir şekilde tanımlayamadığından, bu sayılarla ilgili herhangi bir ispat yapamamıştır. Ancak bu sayıların kullanıldığı dört işlem içeren problemleri kendine özgü yollarla çözmüştür. Örneğin; $\sqrt[3]{2+\sqrt{-3}}$ sayısının kendisi ile çarpımını aşağıdaki şekilde yapmıştır.

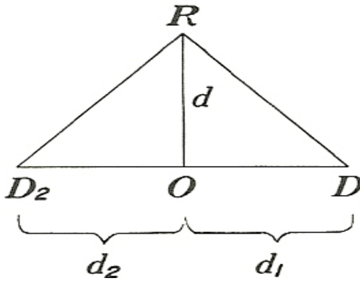
$$\sqrt{-3}x\sqrt{-3}=-3\ \ 2x2=4\ \left(-3\right)+4=1\ \ 2x\sqrt{-3}x2$$ Sonuç: $\sqrt{-48}$

Bir diğer örnek ise, 1000 sayısını 2+11i sayısına bölerken izlediği yoldur. Çözüme her bir sayıyı 2-11i ile çarparak başlamıştır. Paydada elde ettiği 125 sayısını 1000 sayısına bölerek 8 sayısına ulaşmış, ardından 8 sayısını 2-11i ile çarpmış ve 16-88i sonucunu elde etmiştir. Bombelli, toplama ve çıkarma işlemleri ile ilgili de detaylı çözümler yapmıştır. x^3=15x+4 kübik eşitliğinin çözümü, Cardano'nun ortaya koyduğu kurala göre, $x = \sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}$ olmaktadır. Buradan çözümün 4 olduğu açık olmasına rağmen, Bombelli çözümü, tanımladığı yeni sayılar çerçevesinde çözmüştür. $\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}=a+\sqrt{-b}$ ve $\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}}=a-\sqrt{-b}$ dönüşümlerini yaparak, $a^2+b=5$ ve $a^3-3ab=2$ denklemlerine ulaşmıştır. Denklemlere dayalı olarak, $a^2< 5$ ve $a^3> 2$ olarak düşünmüş, buradan a sayısının ancak 2 olabileceği sonucuna ulaşmıştır. a=2'den b=1 bularak, a ve b'yi yerlerine yazmıştır. $x = \left(2+\sqrt{-1}\right) + \left(2-\sqrt{-1}\right)$'den x=4 sonucuna ulaşmıştır. Bombelli, ikinci dereceden denklemlerin çözümlerinin yapılmasında karmaşık sayıların nasıl kullanılabileceğini de göstermiştir. Kompleks sayıların kullanımı ile ilgili tüm sorulara cevap verememesine karşın, problem çözümlerinde kompleks sayıları kullanma yeteneği, kendinden sonra gelen matematikçiler için ilham kaynağı olmuştur. 15. yüzyılın sonlarına gelindiğinde negatif sayıların kullanımında yaşanan sıkıntılar, Cardano'nun negatif sayılar için "gerçek olmayan" kavramını kullanması, Bombelli'nin negatif sayıları kök olarak kabul etmemesi, kompleks sayıların matematiğe girişinin uzun zaman almasına neden olmuştur (Katz, 1998).

Newton, Descartes ve Euler zamanında, kompleks sayılarla cebirsel şekilde uğraşılmaya devam edilmiştir (Cajori, 2007). Descartes, 1637 yılında kompleks sayıların isimlendirmesine katkılar sağlayarak, gerçek (real) ve sanal (imaginary) kavramlarını ortaya atmıştır (Green, 1976). Euler, 1748 yılında $\sqrt{-1}$ sayısını "i" ile göstermiştir. Kompleks sayıların grafiksel gösterimlerini yapan ilk matematikçiler ise, Caspar Wessel ve Jean Robert Argant olmuştur. Ancak yaptıkları gösterimler matematikçiler arasında çok da ilgi uyandırmamıştır (NCTM, 2006; Cajori, 2007). Wessel, 1, –1, $\sqrt{-1}$, –$\sqrt{-1}$'in çarpım tablosunu yapmış, Wessel ve Argand, i sayısını tanımlamak amacıyla geometrik gösterimlerden yararlanmışlardır. Wessel ve Argand'ın yaptıkları gösterimler aşağıda verilmiştir (Jahnke vd, 2002; NCTM, 2006).

	1	-1	ε	-ε
1	1	-1	ε	-ε
-1	-1	1	-ε	ε
ε	ε	-ε	-1	1
-ε	-ε	ε	1	-1

Şekil 10. Wessel'in gösterimi



Şekil 11. Wessel ve Argand gösterimleri

Şekil 10'da görüldüğü gibi, Wessel, ε sayısını $\sqrt{-1}$alarak, 1, –1, ε ve –ε'nin çarpım tablosunu yapmıştır. Şekil 11'den Wessel ve Argant'ın$d_1 = +1,\ d_2 = -1$ olarak kabul ettikleri, R açısı dik açı olmak koşuluyla, $d$sayısını$d = \sqrt{+1.-1} = \sqrt{-1} = i$ olarak tanımladıkları anlaşılmaktadır (NCTM, 2006). Kompleks sayılar Gauss'la birlikte sistematik bir yapıya kavuşmuştur. Gauss, kompleks sayıların günümüz şekliyle özelliklerini tanımlayarak, işlemler yapmış, kompleks sayıları koordinat ekseninde göstermiştir. 1831 yılında, kompleks sayıları sıralı ikililer olarak göstererek, $(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$ eşitliğini ortaya koymuştur. Gauss, x eksenini reel eksen, y eksenini hayali eksen olarak ifade ederek, karmaşık sayıları tanımlamış ve karmaşık sayıları a+bi biçiminde göstermiştir. Matematikte, bir karmaşık sayının reel ve sanal kısımlarının her ikisi de rasyonel sayı olduğunda bu karmaşık sayı, "*Gauss rasyonelleri*" (Gaussian rationals) $Q(i)$, karmaşık sayının reel ve sanal kısımlarının her ikisi de tamsayı ise, bu karmaşık sayı, "*Gauss tamsayıları*" (Gaussian integers) olarak ifade edilmektedir (Varadarajan, 1998; NCTM, 2006; Cajori, 2007).

Avrupa, İslam dünyasında cebir üzerine ortaya koyulan eserleri inceledikten ve özümsedikten sonra, Avrupa'da cebirsel gösterimlerde sembolik döneme geçişin adımlarının atıldığı görülecektir. Ancak bu geçiş bir anda olmamıştır (Kvasz, 2006). Cebirsel gösterimlerde sembolik döneme 15. yüzyılın sonlarında Fransız matematikçi Viete (1540-1603) ile geçilmiştir. Viete 1591 yılında bilinmeyenleri göstermek için büyük ünlü harflerden A, E, I, O ve U'yu kullanmıştır. Bilinmeyen olarak A'yı tercih ettiğinde, A^2'yi Aq, A^3'ü Acu ve A^4'ü ise Aqq biçiminde göstermiştir. Çarpma için "*in*" kelimesini, bölüm için kesir çizgisini kullanmıştır. Modern gösterimi $\frac{AB}{C^2}$ olan matematiksel ifadeyi, $\frac{AinB}{Cqq}$ şeklinde yazmıştır. Karekök için L harfini, küp kök için ise LC harflerini kullanmıştır. Viete, A-B kere A+B'nin eşitini $A^2–B^2$ olarak ifade etmiş ve $(A+B)^2 - (A-B)^2 = 4AB$eşitliğine ulaşmıştır.$(A+B)^n$açılımını n=2, 3, 4, 5 ve 6 sayıları için yapabilmiştir. Ancak buradan bir genellemeye ulaşamamıştır. Viete'nin genellemeye ulaşamamış olması, tamsayıların kuvvetlerini harflerle ifade etmesine bağlanmaktadır. A–B'yi A^2+AB+B^2, $A^3+A^2B+AB^2+B^3$'…ile çarparak, $A^3 – B^3$, $A^4 – B^4$,…. $A^6 – B^6$'yı elde etmiştir. Ancak benzer şekilde bir genellemeye ulaşamamıştır. Viete, on üç farklı üçüncü dereceden denklem biçiminin her biri için ayrı çözüm yolları vermek yerine, bu denklemleri, Cardano ve Bombelli gibi ikinci dereceden hiçbir terim olmayacak şekilde yazmıştır. Viete, çözümlerini Cardano ve Bombelli'den farklı şekilde yapmıştır. Homojenlik kuralı (devamlılık gösteren dört oranın varlığına dayanır) ve$(r+s)^3$'nün açılımı çözüm yollarından ikisidir. Viete, x^3–3bx=d kübik eşitliğini çözerken, x=r+s, b=r.s olarak düşünmüş ve $d=r^3+s^3$ eşitliğini elde etmiştir. x^3–6x=9 eşitliğinde 3b=6 olduğundan b sayısını 2 olarak bulmuştur. Yani r.s=2'dir. d=9 olduğundan $r^3+s^3=9$'dur. Buradan r ve s sayılarının 1 ve 2 olabileceğini ifade ederek x=r+s=3 sonucuna ulaşmıştır. Viete, x^3–3bx=d tipindeki denklemleri çözerken$(r+s)^3-(r^2+s^2+rs)(r+s)=rs(r+s)$ eşitliğinden de yararlanmıştır. x^3 –21x=20 eşitliğini çözerken, $r^2+s^2+rs=21$ ve $rs(r+s)=20$ şeklinde eşitlikleri düzenlemiş, r ve s değerlerinin 1 ve 4 olabileceğini ifade etmiş, buradan x değerini 5 olarak bulmuştur.

1637 yılında Descartes (1596–1650), bugün bizim kullandığımıza benzer semboller kullanmıştır. Descartes, bilinmeyenleri x, y ve z olarak ifade etmiş, x^2'yi xx, x^3'ü ise xxx olarak yazmış, eşittir sembolünü ise günümüzden farklı olarak ∝ sembolü ile göstermiştir. Bir polinomun x-a ile bölümünün standart yönteminin ayrıntılı açıklaması ilk defa Descartes'in Geometri kitabında yer almaktadır. Descartesin matematiğe en büyük katkısı koordinat düzlemini tanımlaması olmuştur. Descartes ayrıca denklemlerin çözümleri kullanılarak, denklemlerin nasıl yazılacağını açıklamıştır. Örneğin; kökü 2 olan denklemin x-2=0, kökü 3 olan denklemin ise x-3=0 olarak yazılabileceğini, dolayısıyla kökleri 2 ve 3 olan denklemin, bu eşitliklerin çarpımı olan x^2–5x+6=0 olduğunu ifade etmiştir. Descartes ayrıca bugün bildiğimiz işaretler kuralını, ispatını yapmadan açıklamıştır. Örneğin, $x^4-4x^3-19x^2+106x-120=0$ eşitliğinde işaretlerin -, +, - olmak üzere üç kez değiştiğini belirterek, eksilerin ardışık olarak bir kez devam ettiğine dikkati çekmiş ve eşitliğin üç doğru (pozitif) kökü, bir yanlış (negatif) kökü olabileceğini belirtmiştir. Gerçekten de, eşitliğin kökleri, 2, 3, 4 ve -5'tir. Descartes, üçüncü kitabının son bölümünde üçüncü ve dördüncü dereceli denklemlerin çözümlerini parabol ve çemberin kesişim noktalarından hareketle İslam dünyası matematikçilerinden Ömer Hayyam'a benzer şekilde yapmıştır. Ancak Descartes denklemlerin yanlış (negatif) köklerinin de olabileceğini fark etmiştir. (Groza, 1968; Katz, 1998; Heeffer, 2008).

Artı (+) ve Eksi (-) işaretleri, ilk defa Alman matematikçi Widman'ın 1489 yılında yayımladığı *Commercial Arithmetic* adlı eserinde görülmüştür. Çarpma (x) sembolü ilk defa 1600'lü yıllarda İngiliz matematikçi William Oughtred tarafından gösterilmiştir. Aynı matematikçi oranı : : şeklinde göstermiştir. Eşittir (=), sembolü 1557 yılında İngiliz matematikçi Recorde'nin kitabı The Whetstone of Witte isimli kitabında tanıtılmıştır. Karekök sembolü $(\sqrt{\quad})$ ise ilk defa 1525 yılında Christoff Rudolff tarafından *Die Coss* isimli cebir kitabında gösterilmiştir. Kök sembolü, Latincede kök anlamına gelen *radix* sözcüğünün ilk harfi olan r harfine benzemektedir (Groza, 1968; NCTM, 2006; Cajori, 2007). Cebirsel gösterimlerin tarihsel gelişim süreci daha kapsamlı şekilde Ek 1'de verilmiştir.

On yedinci yüzyılda Fermat'ın sayı teorisi üzerine yaptığı çalışmalar, Newton'un analiz üzerine yaptığı çalışmalar, sözel problemleri sembolik dilde yazarak çözümü ve Binom teoremi, Maclaurin'in lineer denklem sistemlerini yok etme metoduyla çözümüştür. Bu yöntem bugün Cramer kuralı olarak bilinmektedir. Gabriel Cramer (1704-1752), Langrange (1736-1813)'nin denklemler teorisi, Galois(1811-1832)'in cebirsel denklemler teorisi, Euler (1707-1783) ve Gauss (1777-1855)'un karmaşık sayıları düzlemde noktalar olarak göstermesi ve analiz üzerine yaptıkları çalışmalar cebirin günümüzdeki şekline kavuşmasında yardımcı olmuştur.

2. Sonuç

Bu çalışmada, cebirin tarihsel gelişim süreci ve bu gelişim sürecine eski Mısır, Babil, Yunan, Hint, İslam dünyası ve Batı'nın yaptıkları katkılar araştırılmıştır. Yapılan literatür taraması kısaca aşağıda özetlenmiştir.

- Eski Mısır'da yanlışı deneme yolu kullanılarak rasyonel tipteki denklemlerin ve doğrusal olmayan denklem sistemlerinin çözümleri yapılmıştır. Eski Mısırda cebirsel gösterimler düz yazı formatında yapılmıştır.
- Babilliler, eski Mısırdan biraz daha ileri giderek, sınırlı sayıdaki bir bilinmeyenli doğrusal ve ikinci dereceli denklemlerin çözümlerine geometrik bir düşünce yapısıyla, düz yazı formatında yapmışlardır.
- Euclid, Babillilere benzer olarak, çözümlerini geometrik bir düşünce biçimiyle yapmıştır. Bu yüzden Euclid'in uğraşı alanı Geometri'dir.
- Diophantus, denklemleri çözerken tamamlama ve indirgeme yollarına başvurmuş olmasına rağmen, kitabında bu yollara isim vermemiştir. Diophantus, Euclid'den farklı olarak cebiri geometriden kurtararak, analitik hale sokmaya çalışmıştır. Çok değişkenli iki veya üç denklemden oluşan, sınırsız sayıda rasyonel çözümü olan denklemlerin çözümleriyle uğraşmıştır. Bu denklemler, "*Diophantine denklemleri*" olarak bilinmektedir. Ancak, Diophantus'tan önce ve sonra bu tip denklemlerle uğraşıldığı, bu tip denklemlerin doğru ve genel çözümlerinin yapıldığı bilinmektedir. Diophantus, denklem çözümlerinde genel bir çözüm algoritması ve sistematik bir yöntem geliştirememiş, denklemleri Harizmi'nin yaptığı gibi sınıflara ayıramamış ve her bir sınıfa giren denklemler için genel bir çözüm algoritması ortaya koyamamıştır. Ayrıca çok değişkenli denklemlerle uğraşmasına rağmen, birden fazla bilinmeyen tanımlayamamıştır. Buna paralel olarak, Babillilerin yaptıkları gibi, tüm bilinmeyenleri bir parametre cinsinden ifade ederek çözüme ulaşmaya çalışmıştır. En önemli başarısı, cebirsel gösterimlerde kısaltmalara başvurarak, sembolik döneme geçiş için önemli bir adım atmış olmasıdır. Diophantus, çözümlerinde sadece pozitif sayıları kök olarak kabul etmiş, kök olarak sıfırı göz ardı etmiştir. *Kitabı bir cebir kitabı olmaktan çok, sayı teorisi üzerine yazılmış bir kitaptır*.

- Matematik alanlarından cebirin mucidi Harizmidir. Harizmi, bir bilinmeyenli, birinci ve ikinci dereceli denklemlerin $ax^2 = bx,\ \ ax^2 = b,\ \ ax = b,$ $ax^2 + bx = c,\ \ ax^2 + c = bx,\ \ ax^2 = bx + c$ olacak şekilde altı biçime indirgenebileceğini ifade etmiş ve her bir sınıfa giren denklem için genel bir çözüm algoritması ortaya koymuştur. Sistematik olarak eşitlik kavramı üzerine çalışan ilk matematikçi Harizmidir. 825 yılında yazmış olduğu kitabı, "*Al KitabFi Hisab Al Cabr wal Muqabalah*" Rönesans dönemi cebir çalışmaları için Batılı matematik bilginlerine ilham kaynağı olmuştur. Buradaki "*Al Cabr*" terimi İngilizce ve Fransızcaya "***algebra***" olarak geçmiş ve Türkçede "*cebir*" olarak kullanılmıştır. Harizmi, çözümlerinde pozitif ve irrasyonel sayıları kök olarak kabul etmiştir.

- Avrupa'ya cebirin geçisi Harizminin eserleri sayesinde 12. ve 13. yüzyıllarda olmuştur. Avrupa'nın ilk matematikçilerinden olan, İtalyan matematikçi Fibonacci'nin 1202 yılında yazdığı kitapta, başta Harizmi olmak üzere, İslam dünyasının matematik bilginlerinin yaptıkları çalışmalarından etkilendiği belirtilmektedir. Üçüncü dereceden denklemlerin çözümü, 15. yüzyıl ile 16. yüzyılın başına kadar çoğu matematik bilgini için bir uğraş alanı olmuştur. Ferro (1465-1526), Tartaglia (1499-1557), Cardano (1501-1576), Bombelli (1526-1572) üçüncü dereceden denklemlerle uğraşmışlardır. Cebirsel gösterimlerde sembolik döneme 15. yüzyılın sonlarında Fransız matematikçi Viete (1540-1603) ile geçilmiştir. Viete 1591 yılında bilinmeyenleri göstermek için büyük ünlü harflerden A, E, I, O ve U'yu kullanmıştır. 1637 yılında Descartes (1596–1650), bugün bizim kullandığımız bazı sembolleri kullanmıştır. Bilinmeyenleri x, y ve z olarak ifade etmiştir. x^2' yi xx, x^3'ü ise xxx olarak yazmıştır. Eşittir sembolünü ise günümüzden farklı olarak ∝ sembolü ile göstermiştir. On yedinci yüzyılda Fermat'ın sayı teorisi üzerine yaptığı çalışmalar, Newton'un analiz üzerine yaptığı çalışmalar, sözel problemleri sembolik dilde yazarak çözümü ve Binom teoremi, Maclaurin'in lineer denklem sistemlerini yok etme metoduyla çözümü (Bu yöntem bugün Cramer kuralı olarak bilinmektedir, Gabriel Cramer 1704-1752), Langrange'nin denklemler teorisi, Galois'in cebirsel denklemler teorisi, 18. yüzyılda, Euler ve Gauss'un karmaşık sayıları düzlemde noktalar olarak göstermesi ve analiz üzerine yaptıkları çalışmalar cebir'in günümüzdeki şekline kavuşmasında yardımcı olmuştur.

Historical Development of Algebra

Extended Abstract

Mathematics and as well as algebra is a human activity which has been developing constantly as literature, physics, art, economy and music. Cebir that we learn in schools today is different from the past and will also be different in the next century. Many students and teachers are not aware of that there is an old and rich history of the mathematics. Because of this fact, they fail to consider that mathematics shows a consistently change, it is products of human labour and mathematics which performed in different times and places, are different from each other (Tzanakis & Arcavi, 2000). They see the mathematical knowledge as an impeccable and certain knowledge body, consisted of true and regular theorems, proofs and formulas (Arcavi, 1991; Bidwell, 1993). This perception of mathematics has negative effects over learning style and mathematics success of students (Franke & Carey, 1997; Carlson, 1999; Cifarelli & Goodson, 2001). As a way to remedy this deficiency which exists in many students and teachers, researchers suggested the idea of necessity for understanding the historical development of mathematics and integration of historical activities into mathematics lessons (Fauvel, 1991; Ernest, 1998; Tzanakis & Arcavi, 2002). In the light of these suggestions, this study have prepared to expose detailed image of historical development process of algebra, to help for understanding of teachers and students about nature and historical development process of mathematics, and to provide a source for teachers to use in their classes.

It is known that the oldest tool to do arithmetic operations is "abacus" and this name come from the word "*abax"* in Greek (Carraher, Brizuela & Earnest, 2006; NCTM, 2006). As for algebra, named from "*Al Cabr" word of* "*Al Kitab Fi Hisab Al Cabr wal Muqabalah*" of Harizmi's book, can be thought as an extended version of the mathematics (Amerom, 2003; Brezina, 2006; Katz, 2007). For example a+a=2a equality will be true for all number which can be written for "a" (Brezina, 2006). Algebra is interested in generalized numbers, variables and functions (Carraher, Brizuela & Earnest, 2006). It is needed to reason about unknown and describe differences between spesific and general situations (Amerom, 2003). For as algebraic problems are based on determining values of the unknown (in other words "variable") and solving equation (Brezina, 2006). In many historical texts, it is stated that there are three terms of development of the algebra. Respectively these terms like algebraic expressions, problems and solutions were first written as prose; then abbreviations had been used to image algebraic expressions; and finally symbols had been used instead of prose and abbreviations (Oliver, 2007). In this study, historical development of presentations and solving of algebraic expressions in Ancient Egypt, Babylonians, Ancient Greece, Ancient India, Islamic World and Western Civilizations.

Two important mathematical works which reached today, are Goleni̇şev Papyrii (1900 B.C.) and Rhind Papyrii (2000 – 1000 B.C.). In Rhind Papyrii, there are many equation solutions. Egyptians (2000 – 1000 B.C.) had used trying false thinking proportional ways (Bunt., Jones & Bedient 1988). This method had been used among Indians and Islam mathematicians in 15th and 16th century. It is also known that this method had been used by Italian mathematicians Nicola Tartlia, Philippo Calandri and Spanish mathematician Tosca. Symbols like x, x^2, x^3 had not been used for solutions of equations in Ancient Egypt. Everything had been written as prose (Ofir and Arcavi, A. 1992). Beside trying false and thinking proportional, people had used extraction in Ancient Egypt (Lumpkin, 1997). As a result, there is no proof for presence of the algebra as a science (Smith, 1925). After ancient egypt, studies about algebra had been continued by Babylonians.

Babylonians had worked on quadratic equations and linear equation systems with going further than Egyptians. It is possible to say that Babylonians had solved linear problem systems and quadratic equations with prose but a geometrical frame of mind. Beside this, Babylonians had worked on algebraic problems which included width, height and quadratures. In result, Babylonians had used side lengths of geometric figures as unknown (Katz 1997; Katz, 2007). After Babylonians, algebra avocation had been continued with Ancient Greece mathematics scholars.

Euclid is the first name in Greece when algebria is mentioned. “Elements” which is Euclid’s (300 BC) the most important work, is consisted of 13 books. In second book, it is seen that Euclid’s algebria is based on geometrical constructions. 1st and 4th propositions in his book, expose that he is aware of distributive property of multiplication and parenthesis square identity expansion of total of two terms. Euclid had solved equation systems as $x + y = b,\ x.y = c$ and $y - x = b,\ y.x = c$ by using space of square and rectangle in his 5th and 6th propositions. In short, Euclid had done his solutions with geometry, not with numbers. Geometrical modelling thought is dominant in Euclid’s solutions as Babylonian but while it is seen that solutions which Babylonians had done in form of prose, turned to geometric model, that solutions had been made by geometrical modelling in Euclid’s work (Katz, 1997; Katz, 2007).

Another mathematics scholar is also Diophantos of Greece who lived around 250 AD. While Euclid had been trying to do algebra geometrically, Diophantos had been trying to work up algebra into symbolizing and analytic form (Smith, 1925; Cajori, 2007). Diophantos had used completion and degradation methods but he had not given name these in his book. Contrarily, it is known that Harizmi had named these “al jabr” and “wal muqabala”. Diophtanos had worked on solutions of equations which is consisted of two or three equations and multivariable and has unlimited number of rational solutions. These equations are known as “Diophantine equations”. Discovering Pyhtagoras triadics $(2\mathrm{mn}, \mathrm{n}^2 - \mathrm{m}^2, \mathrm{n}^2 + \mathrm{m}^2)$ and Archimedes’ (287 – 212 BC) cattle problem, shows that these equations is not worked by Diophtanus firstly (Swift, 1956; Horn & Zakeri, 1998). In Archimedes’ cattle problem, it is demanded that how many bull and cow which has four different colours are there? So there are eight unknowns in the problem. Archimedes reached $x^2 - 4{,}729{,}494y^2 = 1$ equation by demoting linear equations which made for solutions of the problem. He fixed that number "y" is one fold of 9314 from here (Burton, 2007). These equations had been named as "Pell equations" in following years. For the first time Indian mathematicians Brahmagupta and Bhaskara presented general solution methods for equations in form of $y^2=ax^2+1$ which Archimedes worked on and we know as "Pell equations's. This shows these type equations were worked out and true and general solutions of equations had been done before and after Diophantus. Diophantus had not developed a general solution algorithm and a systematical method. He could not identify unknown more than one. Parallely, he had tried to reach solutions by denominating all unknowns as a single parameter as Babylonians did (Katz, 1997; NCTM, 2006). His most important achievement is taking an important step to pass to symbolic period by using abbreviations in algebraic presentation. Because in the process before Diophantus, algebraic presentations had been done as prose. After Diophantus Indian mathematicians used same abbreviations. Diophantus accepted only positive numbers as root in his solutions. Because he did not use symbol for zero, he ignored zero as a root. His book is a work about number theory more than an algebra book (Katz, 1998; Puig, 2004; Christianidis, 2006; Derbyshire, 2006; Cajori, 2007; NCTM, 2006).

In the period after Diophtanos, Indian mathematicians had used abbreviations for presentations algebraic expressions (Oliver, 2007). İmportant development had been lived in Indian mathematics as of 500s. Indian mathematicians Aryabhata (525), Brahmagupta (628), Mahavira (850) and Bhaskara (1150) had had important studies on arithmetic and algebra. But in the period after Bhaskara, Indian mathematics entered in the process of standstill. Though abbreviations had been used to show equations, it is possible to say that Indian algebra had been presented in prose substantially. When verbal solution is analysed, Brahmagupta had used a geometrical frame of mind when he was solving the equation which modern presentation is $x^2-10x=-9$. The remarkable thing is true using of negative numbers. When we pay attention, the point which placed over number means number is negative (NCTM, 2006). Presences of negative and irrational numbers had been proved by Indian scholars firstly. Bhaskara is found solution of $x^2-45x=250$ as 50 and -5 but he mentioned that second number cannot be accepted. As a result negative numbers had been seen in the solution but had not been accepted (NCTM, 2006; Cajori, 2007).

When we look at Islamic World, it is possible to say that the most important mathematics scholar in algebra is Harizmi who lived between 780 - 847 AD. Inventor of algebra, one of fields of the mathematics. He had done solutions of equations unprecedentedly in Babylonia, Greece and India, in his work "*Al KitabFi Hisab Al Cabr wal Muqabalah*" written in 825 AD (Arndt, 1983; Katz, 1998; NCTM, 2006; Brezina, 2006). One of the greatest success of Harizmi is presentation of algebra as a branch of mathematics by separating algebra from geometry. As a matter of fact that, algebra percept as geometry had used before Harizmi (Brezina, 2006). He mentioned all linear and quadratic equations can be demoted to six form as $ax^2 = bx$, $ax^2 = b$, $ax = b$,

$ax^2 + bx = c,\ ax^2 + c = bx,\ ax^2 = bx + c$ and put forward a solution algorithm for solutions of equations in every class. The first mathematician who worked on the term equation is Harizmi. His book, "*Al KitabFi Hisab Al Cabr wal Muqabalah*" written in 825 AD, had been source of inspiration to western scholar for renaissance algebra studies. The term "Al cabr" in here, passed as "algebra" to English and French and used as "cebir" in Turkish. In second chapter of his book, he used geometry to confirm the solution for the equation $x^2 + 10x = 39$ in 4th type which done as prose and showed accuracy of his solution by using fields of square and rectangle (Baki, 1992; Baki,2008). The first mathematician of Islamic world which worked on equations of the third degree, is Ömer Hayyam who lived between 1048 – 1131. He classified equations of the third degree and did its solutions in geometric method by using parabola and cycle. He did not accept negative solutions (Baki & Güven, 2009). In following years, Cardano developed new methods to solve equations of third degree by using Hayyam's methods.

Transition of algebra to Europa is accrued in 12thand 13thcenturies by means of Harizmi's Works. It is mentioned that Italian mathematician, Fibonnacci affected by mathematics scholars of Islamic world, especially Harizmi, in his book written in 1202 (Katz, 1998; Ifran, 2003). Solving equations of third degree had become a major study for many mathematicians until 16th centuries. Cardano (1501-1576), Bombelli (1526-1572) had worked on equations of third degree. Symbolic period in algebraic presentation had been passed with French mathematician Biete (1540 – 1603) (Katz, 1998). Viete used A, E, I , O and U to show unknowns in 1591. In 1637, Descartes (1596–1650), used some symbols which we used today too. He wrote x^2 as xx and x^3 xxx. He show equal symbol as ∝ as different from today (Groza, 1968; Kvasz, 2006). Fermat's studies on number theory in 17th century, Newton's studies on analysis, solving verbal problems by writing symbolic language and Binomial theorem; Maclaurin's solutions of linear equations with the method of eliminations of equation systems(this method is known as Cramer Formula today" Gabriel Cramer 1704-1752), Langrange's equation theory, Galois' group theory, Euler and Gauss' showing as points complex numbers in plane and their works about analysis; have been helped algebra to become form in today (Katz, 1998; Baki, 2008).

Key Words: History of algebra, different cultures, solutions of algebraic problems

Kaynaklar/References

Aaboe, A. (1964). Episodes from the early history of mathematics, Random House: New York.

Amerom, V. A. B. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra.*Educational Studies in Mathematics*, 54, 63-75.

Arcavi, A., (1991). Two benefits of using history. *For the learning of mathematics*, Volume 11, Number 2. (11).

Arndt, A. B. (1983). Al-Khawarizmi, *Mathematics Teacher*, December, s.668-670.
Baki, A. (1992). Al- Khwarizmi's contributions to the science of mathematics: al kitab al jabr wa'l muquabalah, *Journal of IslamicAcademy of Sciences*, 5(3), 225-228.
Baki, A. (2008). *Kuramdan Uygulamaya Matematik Eğitimi*, Harf Eğitim Yayıncılığı: Ankara.
Baki, A. & Güven, B. (2009). Khayyam with Cabri: experiences of pre-service mathematics teachers with Khayyam's solution of cubic equations in dynamic geometry environment, *Teaching Mathematics and Its Applications*, 28, 1-9.
Bidwell, J. (1993). Humanize your classroom with the history of mathematics. *The Mathematics Teacher*.Volume 86, Number 6. (461-464).
Brezina, C. (2006). *Great muslim philosophers and scientists of the middle Ages: Al-Khwarizmi, the inventor of algebra*, The Rosen Publishing Group: New York.
Bunt, H. N. L., Jones, S. P. & Bedient, D. J. (1988).*The historical roots of elementary mathematics*, Dover Publications: New York.
Burton, D. (2007). *The history of mathematics: an introduction*, The McGraw-Hill Companies: USA
Cajori, F. (2007).*A history of elementary mathematics*, Cosimo Classics: New York.
Carlson, M. P. (1999). The mathematical behavior of six successful mathematics graduate students: influences leading to mathematical success. *Educational Studies in Mathematics*, 40(3), 237-258.
Carraher, W. D., Schliemann, D. A., Brizuela, M. B. & Earnest, D. (2006).Arithmetic and algebra in early mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*. 37(2), 87-115.
Christianidis, J. (2006). The way of Diophantus: some clarifications on diophantus' method of solution, *Historia Mathematica*, 34, 289-305.
Cifarelli, V. & Goodson-Espy, T. (2001).The role of mathematical beliefs in the problem solving actions of college algebra students. In M. Van den Hevvel-Panhvizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Conference on the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, p,265). Utrecht, The Netherlands: Utrecht University.
Derbyshire, J. (2006). *Unknown quantity: a real and imaginary of algebra*, Joseph Henry Press: Washington DC.
Dönmez, A. (2007). *Matematik Bilimlerin Çimentosu*, Güncel Yayıncılık: İstanbul.
Ernest, P. (1998). The history of mathematics in the classroom, *Mathematics in School*, 27(4), 25-31.
Eves, H. (1983). *Great moments in mathematics before 1650*.The Mathematical Association of America.
Franke, M. L. & Carey, D. A. (1997). Young childrens' perceptions of mathematics in problem solving environments, *Journal for Research in Mathematics Education*. 28(1), 8-25.
Green, R. D. (1976). The historical development of complex numbers, *The Mathematical Gazete*, 60(412), 99-107.

Groza, S.V.(1968). *A survey of mathematics elementary concepts and their historicaldevelopment*, Holt: Rinehart and Winston.
Grugnetti, L. (2002). Ancient problems for the development of strategic thinking, (Edi: Fauvel, J., Maanen, V.J.), İçinde, *History in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers: Newyork/Boston/Dordrecht/London/Moscow.
Heeffer, A. (2008). The Emergence of symbolic algebra as a shift in predominant models, *Found Sci*, 13, 149-161.
Horn, W. & Zakeri, A. G. (1998). The pythagorean theorem and related topics a resource for geometry teachers, *Primus*, 8(4), 365-383.
Ifran, G. (2003). *İslam Dünyasında Hint Rakamları*, (Çeviren: Kurtuluş Dinçer), Tübitak Yayınları, Yorum Matbaacılık: Ankara.
Jahnke, N. H., Arcavi, A., Barbin, E., Bekken, O., Furinghetti, F., Idrissi, E. A., Silva da Silva, M. C. & Weeks, C. (2000). The use of original sources in the mathematics classroom, (Edi: Fauvel, J., Maanen, V.J.), İçinde, *History in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers: Newyork/Boston/Dordrecht/London/Moscow.
Katz, J. V. (1998). *A history of mathematics*, Addison-Wesley Educational Publishers, USA.
Katz, J. V. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching, *Educational Studies in Mathematics*, 66, 185-201.
Kvasz, L. (2006). The history of algebra and the development of the form of its language, *Philosophia Mathematica*, 14, 287-317.
Lumpkin, B.(1997). *Algebra activites from many cultures*, Portland: Walch Publishing.
Marsh, L. G. and Rich, S. B. (2000). The role of history in a mathematics class, *The Mathematics Teacher*, Cilt: 93, Sayı: 8. (704-707).
NCTM (2006).*Historical topics for the mathematics classroom*, In J. K. Baumgart, D. E. Deal, B. R. Vogeli, and A. E. Hallerberg (Eds.), Reston, VA: NCTM.
Oaks, A. J. (2009). Polynomials and equations in arabic algebra, *Arch. Hist. Exact. Sci*, 63, 169-203.
Ofir, R., & Arcavi, A.(1992). Word problems and equations: an historical activity for the algebra classroom, *The Mathematical Gazette, 76*, 69-84.
Oliver, J.(2007). How our method of writing algebra have evolved: a thread thrugh history, *Australian Senior Mathematics Journal*, 21(2), 12-17.
Plofker, K. (2006). Mathematics in india, (Edi: Katz, V.) *The mathematics of egypt, mesopotamia, china, india and islam: a sourcebook*, Princeton University Press: USA.
Puig, L. (2004). History of algebraic ideas and research on educational algebra.*The 10thInternational Congress on Mathematical Education*, Denmark.
Smith, E. D. (1925). *History of mathematics: special topics of elementary mathematics*. Ginn and Company: UK.
Stallings, L. (2000). A brief history of algebraic notation, *School Science and Mathematics*, May 100(5), 230-235.

Swetz, J. F. (1994). Using problems from the history of mathematics in classroom Instruction, (Ed: Swetz, F., Fauvel, J., & Bekken, O.)Mathematics Teacher, v82 n5 p370-377

Johansson, B; Katz, V.)*Learn from the Masters*, The Mathematical Association of America: Washington.

Swift, D. J. (1956). Diophantus of alexandria, *The American Mathematical Monthly*, 63(3), 163-170.

Tzanakis, C., Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey, (Edi: Fauvel, J., Maanen, V.J.), İçinde, *History in Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers: Newyork/Boston/Dordrecht/London/Moscow.

Varadarajan, S. V. (2003). *Algebra in ancient and modern times*, American Mathematical Society: USA.

URL-1, www.math.twsu.edu/history/men/diophantus.html

Ek 1. Cebirsel gösterimlerin tarihsel gelişim süreci

Kavramlar		Toplam	Çıkarma	Çarpma	Bölme	Eşittir	Bilinmeyen	Bilinmeyenin Karesi	Bilinmeyenin Küpü
Modern sembol		x+y	x-y	xy x.y	$\frac{x}{y}$	=	x	x^2	x^3
Kaynak	Tarih								
Diophantus	250						ς	Δ^{γ}	K^{γ}
Harizmi	780 847						şey	mal	ka‘ b
Bhaskara	1150		ya 6	ya 6 bha	6 2		ya, ka		
Pacioli	1494	$\bar{p}$	$\bar{m}$				co	ce	cu
Widman	1489	+	–						
Recorde	1557	+	–			=			
Viete	1591	+	–	6A	$\frac{6}{2}$		A (E, O)	Aq	Acu
Harriot	1631	+	–	6.2		=	a	aa	aaa