

# İlköğretim Matematik Öğretmeni Adaylarının Limit Kavramının Formal Tanımına Yönelik Anlamalarının İncelenmesi

Müjgan Baki<sup>1</sup>

Erdem Çekmez<sup>2</sup>

## Özet

Bu çalışma ile geleneksel olarak yürütülen analiz dersleri sonucunda ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik geliştirdikleri anlamaları ortaya çıkarmak amaçlanmıştır. Bu amaç doğrultusunda analiz 1 dersini başarıyla tamamlamış olan 112 öğretmen adayına, alan uzmanlarının görüşleri ve literatürde yer alan araştırmalar doğrultusunda hazırlanmış açık uçlu ve çoktan seçmeli sorulardan oluşan bir test uygulanmıştır. Veriler incelendiğinde adayların tanımın grafiksel temsilini, tanım içerisindeki değişkenleri ve eşitsizlikleri anlama ve yorumlamada sıkıntılar yaşadıkları belirlenmiştir. Çalışmadan elde edilen sonuçlar doğrultusunda önerilerde bulunulmuştur.

**Anahtar Kelimeler:** Analiz, limit kavramı, formal tanım

## 1. Giriş

Limit kavramı matematiğin analiz dalında önemli yer teşkil etmektedir. Analiz dersi içerisinde yer alan türev, integral, Taylor serileri vb. konuların tanımları, ilk kez Cauchy tarafından ortaya konan ve  $\epsilon$ - $\delta$  tanımı olarak da bilinen limit kavramının formal tanımı üzerine inşa edilmiştir. Bu sebepten Artigue (2000) analiz dersi bağlamında limit kavramının birleştirici rolünü, problemlere çözüm getirme rolünden daha önemli olduğunu söylemektedir. Artigue'nin paralelinde Cornu (1991) limit kavramını matematiğin analiz dalının her konusuna nüfuz eden ve merkezinde bulunan bir kavram olarak ifade etmiştir. Limit kavramının sahip olduğu bu öneme karşın matematik eğitiminde limit konusunda yapılan araştırmalar, bu kavrama yönelik yapılan öğretim süreçleri sonucunda öğrencilerin çok az bir bölümünün yeterli bir anlama geliştirebildiklerini ortaya koymaktadır (Davis & Vinner, 1986; Tall & Vinner, 1981; Sierpiska, 1987).

Analiz dersi bağlamında gerçekleşen limit öğretimi ile genel olarak öğrencilerin, çeşitli fonksiyonların bir noktadaki limit değerini hesaplayabilme, fonksiyonun grafiği ile limiti arasındaki ilişkiyi anlayabilme, limit kavramına ilişkin teoremleri kullanabilme ve formal tanım yoluyla limitin var olup olmadığını belirleyebilme gibi kazanımlara sahip olması amaçlanmaktadır. Hiç kuşkusuz öğrencilerin bu kazanımlara erişebilmeleri, limit

<sup>1</sup> Öğr. Gör., KTÜ, Fatih Eğitim Fakültesi, İlköğretim Bölümü, [mujgan@ktu.edu.tr](mailto:mujgan@ktu.edu.tr)

<sup>2</sup> Arş. Gör., KTÜ, Fatih Eğitim Fakültesi, OFMAE Bölümü, [erdemcekmez@ktu.edu.tr](mailto:erdemcekmez@ktu.edu.tr)

kavramının formal tanımına yönelik yeterli bir kavramsal anlamaya sahip olmalarına bağlıdır. Bununla birlikte öğrenciler daha önceki matematiksel deneyimlerinden farklı olarak ilk kez bir matematiksel tanım içerisinde niceleyicilerin, değişkenlerin ve bunlara bağlı birbiriyle ilişkili eşitsizliklerin bulunduğu karmaşık bir matematiksel notasyon ile karşılaşmaktadırlar. İlk bakışta bu denli karmaşık bir matematiksel ifadenin ne anlam ifade ettiğini tam olarak kavramanın güç olacağı aşikârdır. Literatürde yer alan araştırmalar, öğrencilerin çok az bir kısmının öğretim süreçleri sonucunda limit kavramının formal tanımına yönelik kesin bir anlama geliştirdiklerini söylemektedir (Ervynck, 1981; Quesada, Richard, & Wiggins, 2008). Tanımın bu denli yoğun ve anlaşılmasının güç olması bazı eğitimcileri, limit kavramının öğretiminde formal tanıma daha az vurgu yaparak informal bir yaklaşım sergileme eğilimine yöneltmiştir (Fernandez, 2004; Gass, 1992). Bu görüşün aksine, bazı araştırmacılar limit kavramının formal tanımını soyut düşünmeye geçişte, formal ve kesin matematiksel ifadelerle yönelik anlam çıkarmada ve formal ispat tekniklerini kullanmada bir başlangıç noktası olarak görmektedirler (Ervynck, 1981; Swinyard & Lockwood, 2007). Tall (1992) ileri matematiksel düşünmeye geçiş için soyut düşünebilme becerisinin ön şart olduğunu belirtmektedir. Limit kavramının formal tanımının soyut düşünmeye geçişte başlangıç noktası olduğu görüşü benimsendiğinde, bu tanımın öğrenciler tarafından nasıl anlaşıldığının araştırılması önem kazanmaktadır.

Limit kavramının analiz öğretiminde sahip olduğu önemin bir sonucu olarak, literatürde bu kavrama ilişkin birçok çalışma bulunmaktadır. Yapılan çalışmaların büyük kısmı, öğrencilerin limit kavramını anlamada yaşadıkları zorluklara, farklı öğretim yöntemlerinin limit kavramını öğrenmede etkisine ve bu kavrama yönelik kavram yanlışlarına odaklanan çalışmalardır (Akbulut & Işık, 2005; Altun, 2009; Kabaca, 2006). Bu araştırmalara nazaran sayıca daha az diğer bazı araştırmalarda ise öğrencilerin limit kavramının formal tanımına yönelik anlamalarına odaklanılmıştır. Çolak (2002), "Limit Öğretiminde İki Farklı Eğitim Durumunun Karşılaştırılması" isimli yüksek lisans çalışmasında alt problemlerden biri olan, iki farklı eğitim durumunun limit kavramının formal tanımını anlamaya etkisini karşılaştırmıştır. Çalışmanın sonucunda her ne kadar deney grubu lehine bir durum ortaya çıkmış olsa da, araştırmacı limit kavramının formal tanımını anlamayı sadece limit hesaplamayı gerektiren cebirsel 2 probleme ve öğrencilerin limit kavramına ilişkin kavram imajlarını ortaya çıkarmaya amaçlayan 2 soruya indirgemıştır. Fernandez (2004) yaptığı çalışmasında limit kavramının öğretimine formal tanıma vererek başlamak yerine, tasarladığı farklı bir öğretim sürecinin öğrencilerin anlamalarına nasıl etki ettiğini belirlemeyi amaçlamıştır. Sınıf içerisinde öğrencileri birbiriyle tartıştırma yöntemi ile, hem grafiksel hem de cebirsel olarak temsil edilmiş tek bir örnek üzerinde, formal tanım içerisinde yer alan epsilon-delta değişkenlerine tekil değerler vererek bu iki değişken arasındaki ilişkiyi keşfettirmeyi hedeflemiştir. Yürüttüğü yöntemin etkisini belirlemek için öğretim sürecinin sonunda çalışmaya katılan öğrencilere limit kavramının formal tanımına yönelik 3 sorudan oluşan bir test uygulanmıştır. Testin sonucunda öğrencilerin  $\epsilon$ - $\delta$  değerlerinin birbirine bağlı değerlerini bulmaya yönelik cebirsel sorularda kayda değer bir başarı gösterdikleri rapor edilmiştir. Fakat bu çalışmada bir önceki çalışmada olduğu gibi

limit kavramının formal tanımını anlamayı sadece cebirsel boyutta  $\epsilon$ - $\delta$  değişkenlerinin değerlerini bulmaya indirgemıştır. Yapılan bir diğer çalışmada Queseda ve diğ. (2008) kendi öğretim deneyimleri sonucunda öğrencilerin limit kavramında yaşadıkları zorlukları şu şekilde belirtmektedirler;

- Tanım içerisinde niceleyicilerin kullanımı ve limitin varlığını ispat etmedeki rolünün öğrenciler için yeni olması,
- Öğrencilerin önceki matematiksel deneyimlerinin, limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel temsilleri arasındaki karşılıklı etkileşimi anlamaya olanak vermemesi. Sonuç olarak verilen bir limit durumunda gerekli eşitsizlikleri kurmada zorluk yaşanması,
- Öğrencilerin limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizliklerden değişkenlerin değer aralıklarını bulmada ve  $\epsilon$ ,  $\delta$  değişkenlerinin arasındaki ilişkiyi belirleme adına eşitsizliklerde cebirsel değişiklikler yapmada zorluk yaşaması.

Barak (2007) öğretmen adaylarının limit kavramına ilişkin kavram yanılgılarını belirleme amacıyla yürüttüğü çalışmasının içerisinde limit kavramının formal tanımına yönelik yaşanan zorlukları da araştırmıştır. İlköğretim, ortaöğretim matematik, fen bilgisi ve bilgisayar öğretmeni adaylarının dâhil olduğu çalışmanın sonucunda, öğretmen adaylarının  $\epsilon$ - $\delta$  tanımını tam olarak anlayamadıkları, bu ifadenin sadece limitin tanımı olduğunu bildiklerini  $\epsilon$ ,  $\delta$  sembolleriyle ne anlatılmak istendiğine yönelik bir açıklama yapamadıkları belirlenmiştir. Bunun yanı sıra öğretmen adaylarının limit tanımı içerisindeki eşitsizlikleri düzenleyemedikleri ve  $\epsilon$ - $\delta$  değerleri arasındaki eşitliği bulamadıkları rapor edilmiştir.

Analiz dersi içerisinde yer alan kavramların iyi düzeyde anlaşılması, kavramların hem geometrik hem de cebirsel boyutuna ilişkin yeterli seviyede anlama geliştirmeyi gerektirmektedir (Zimmermann, 1991). Buradan hareketle, öğrencilerin limit kavramının formal tanımına yönelik iyi seviyede anlama geliştirmeleri için, tanım içerisinde yer alan değişkenlerin ve bu değişkenlerin belirlediği eşitsizliklerin hem cebirsel hem de geometrik boyutta temsillerini belirleyebilmeleri ve bu temsiller üzerinde muhakeme yapabilmeleri gerekmektedir. Limit kavramının formal tanımını konu alan yurt içinde yapılan çalışmalara bakıldığında, tanımı anlamayı yalnızca cebirsel boyutta incelediği, tanım içerisinde yer alan eşitsizliklerin ve değişkenlerin geometrik boyutunun dikkate alınmadığı görülmektedir. Yapılan bu çalışma ile literatürde yer alan bu boşluğa katkı sağlamak amaçlanmıştır.

### **1.1. Araştırmanın Amacı**

Yapılan bu çalışmanın amacı Analiz I dersi bağlamında ele alınan limit kavramının öğretimi sonucunda, öğretmen adaylarının limit kavramının formal tanımına ilişkin geliştirdikleri anlamaları ortaya çıkarmaktır.

## 1.2. Araştırmanın Problemi

Bu amaç doğrultusunda araştırmanın problemi; “Analiz I dersi bağlamında geleneksel şekilde yürütülen limit kavramına ilişkin öğretimin sonucunda öğretmen adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik anlamaları nelerdir?” olarak belirlenmiştir. Bu ana problem altında araştırmada aşağıdaki alt problemlere cevap aranmıştır:

- Öğretmen adayları limit kavramını tanımlayabilmekte midir?
- Öğretmen adayları limit tanımı içerisinde yer alan değişkenlerin kartezyen düzlemdeki temsillerini belirleyebilmekte midir?
- Öğretmen adayları bir limit durumunun formal ve informal ifadeleri arasında geçiş yapabilmekte midir?
- Öğretmen adayları limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizlikler grafiksel olarak verildiğinde, verilen eşitsizlikleri cebirsel olarak ifade edebilmekte midir?
- Öğretmen adayları  $\epsilon$ - $\delta$  değişkenlerinin birbirlerine bağlı olarak değerlerini belirleyebilmekte midir?

## 2. Yöntem

Geleneksel yolla yürütülen Analiz I dersi sonucunda öğretmen adaylarının limit kavramının formal tanımına ilişkin geliştirdikleri anlamaları ortaya çıkarma amacıyla yürütülen bu çalışmanın örneklemini 112 (60 Kız, 62 Erkek) öğretmen adayı oluşturmaktadır. Çalışmaya katılan öğretmen adayları 2. sınıf ilköğretim matematik öğretmenliği programı öğrencisi olup, katılımcıların tümü limit kavramının ele alındığı Analiz I dersini başarıyla tamamlamıştır. Çalışmada veri toplama aracı olarak kullanılan test, literatürde limit kavramının tanımına yönelik yapılan çalışmalar ve uzman görüşleri dikkate alınarak hazırlanmıştır. Test Analiz I dersinin bitiminden yaklaşık bir ay sonra sınıf ortamında 40 dakikalık süre sınırlamasıyla uygulanmıştır. Öğrencilerin testte yer alan sorulara verdikleri cevaplar, doğruluk bakımından kategorilere ayrılarak, kategorilerde yer alan öğrenci sayıları tablolar halinde sunulmuştur. Bunun yanı sıra testte yer alan açık uçlu sorulara öğrencilerin verdikleri cevaplardan alıntılar yapılarak ortaya çıkan hatalar ve anlamalar örneklendirilmiştir.

### 2.1. Veri Toplama Aracı

Yürütülen bu çalışmada veri toplama aracı olarak, açık uçlu ve çoktan seçmeli olmak üzere toplamda 8 soru içeren bir test kullanılmıştır (Ek-1). Çalışmanın alt problemlerinin ışığında testin içerisinde yer alan sorular limit kavramı ile ilgili 6 kazanıma odaklanmaktadır. Bu kazanımlar ve onlara ilişkin sorular Tablo 1’de sunulmuştur.

**Tablo 1.** Soruların odaklandığı kazanımlar

Odak Noktalar	Soru No
1. Bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti kavramını tanımlayabilme	1
2. Limit tanımı içerisinde yer alan değişkenlerin kartezyen düzlemdeki temsillerini belirleyebilme	2
3. Formal olarak verilen limit durumunu informal olarak ifade edebilme	8
4. İnfomal olarak verilen limit durumunu formal olarak ifade edebilme	4
5. Limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizlikler grafiksel olarak verildiğinde cebirsel temsilini tanıyabilme	3
6. $\epsilon$ ve $\delta$ değişkenlerinin birbirlerine bağlı değerlerini belirleyebilme	5 – 6 – 7

### 3. Bulgular

#### 3.1. Limit Kavramını Tanımlayabilme

Öğretmen adaylarına sunulan testin ilk sorusunun amacı, öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti kavramının tanımına ilişkin bilgilerini ortaya çıkarmaktır. Öğrencilerden elde edilen veriler sonucunda öğrencilerin bu soruya verdikleri cevaplar, formal ve informal ana başlıkları altında doğru(D), yanlış(Y) ve eksik(E) olarak sınıflandırılmıştır. Tablo 2’de öğrencilerin cevaplarının frekansları ve yüzdelik dağılımları sunulmuştur.

**Tablo 2.** Öğrencilerin 1. soruya verdikleri cevapların dağılımı

Formal						İnfomal						Boş	
D		E		Y		D		E		Y			
f	%	f	%	f	%	F	%	f	%	f	%	f	%
46	41,07	27	24,11	5	4,46	12	10,71	12	10,71	4	3,57	6	5,36

Formal doğru sınıfı altında toplanan öğrenciler soruya cevap olarak limit kavramının formal tanımı olan  $\forall \epsilon > 0, \exists \delta(\epsilon) > 0 : |x - a| < \delta$  *oldukça*  $|f(x) - L| < \epsilon$  ifadesini vermiştir. İnfomal doğru sınıfı altında toplanan öğrenciler ise yukarıdaki tanım yerine kavramı kendi cümleleri ile ifade etmişlerdir. Bu sınıf altında toplanan öğrencilerin cevaplarını temsil edebilecek bir öğrencinin ifadesi aşağıda verilmiştir:

Soru 1) Bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti kavramının formal tanımını yapınız. Eğer formal tanımı hatırlamıyorsanız kendi cümleleriniz ile ifade ediniz.  
 Bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti demek fonksiyon a noktasına yaklaşırken aldığı değer aralama gelmektedir o değere fonksiyona sağdan ve soldan yaklaşarak limitin mevcut olup olmadığını anlayabiliriz.

İfadelerinde tanım içerisindeki eşitsizlikleri yazan fakat “ $\exists, \forall$ ” niceleyicilerini kullanmayan öğrencilerin cevapları formal eksik sınıfına dâhil edilmiştir. İformal eksik sınıfına dâhil edilen öğrenciler ise cevaplarında “her” ve “en az bir” ya da bunlara denk olacak ifadeler kullanmadığından bu sınıfa dâhil edilmiştir. Bu sınıf altında yer alan öğrencilerin cevaplarını temsil eden bir öğrencinin ifadesi aşağıda verilmiştir:

Eğer bir fonksiyonun  $\delta$  komşuluğundaki değerleri  $c$  gibi bir noktaya gidiyorsa bu fonksiyonun limiti  $c$  dir denir.

Öğretmen adaylarından bir kısmı tanım içerisindeki niceleyicileri ve/veya değişkenlerin yerlerini yanlış kullanmışlardır. Bunun yanı sıra iki öğretmen adayı limit tanımı yerine ifadelerinde türev tanımını vermişlerdir. Bu katılımcıların cevapları formal yanlış sınıfı altında toplanmıştır. Bazı öğretmen adayları informal olarak verdikleri tanımlarda, fonksiyonun limit aranan noktadaki değerini limit değeri olarak ifade etmelerinden ötürü, informal yanlış sınıfına dâhil edilmişlerdir. Bu sınıftaki öğrencilerin ifadelerini temsil edebilecek bir öğrencinin ifadesi aşağıda verilmiştir.

Soru 1) Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti kavramının formal tanımını yapınız. Eğer formal tanımlı hatırlamıyorsanız kendi cümleleriniz ile ifade ediniz.

Bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti  $a$  fonksiyonun  $a$  noktasındaki değerine veya yakınlık değerini belirtir.

### 3.2. Limit Tanımı İçerisinde Yer Alan Değişkenlerin Kartezyen Düzlemdeki Temsillerini Belirleyebilme

Öğretmen adaylarına testin ikinci sorusu, limit tanımı içerisinde yer alan değişkenlerin kartezyen düzlemdeki temsillerini belirleyebilme amacı doğrultusunda yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının cevapları doğru veya yanlış olarak sınıflandırılmıştır. Tablo 3’de öğretmen adaylarının cevaplarının frekans ve yüzdelik dağılımları sunulmuştur.

**Tablo 3.** Öğrencilerin 2. soruya verdikleri cevapların dağılımı

D		Y	
f	%	f	%
68	60,71	44	39,29

Öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde yarıdan fazlasının  $\epsilon, \delta, a$  ve  $L$  değerlerini doğru bir şekilde eşleştirdikleri görülmüştür. Geri kalan öğretmen adaylarının

cevaplarında farklı yanlışlara rastlanmıştır. Bu yanlışlar;  $\epsilon$  ve  $\delta$  değişkenlerinin ait olduğu eksenlerin karıştırılması, a ve L değerlerinin bulunduğu eksenlerin karıştırılmasıdır.

### 3.3. Formal Olarak Verilen Limit Durumunu İnfomal Olarak İfade Edebilme

Öğretmen adaylarına testin sekizinci sorusunda, formal olarak verilen limit durumunu infomal olarak belirlemeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının cevapları doğru, yanlış ve boş olarak sınıflandırılmıştır. Tablo 4'de öğretmen adaylarının cevaplarının frekans ve yüzdelik dağılımları sunulmuştur.

**Tablo 4.** Öğrencilerin 8. soruya verdikleri cevapların dağılımı

D		Y		B	
f	%	F	%	f	%
101	90,18	9	8,04	2	1,79

Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu soruyu doğru olarak cevaplamışlardır. Soruyu yanlış cevaplayan öğretmen adaylarının tamamı,  $\delta$  değişkeninin yer aldığı eşitsizlik içerisindeki ifadeyi fonksiyonun cebirsel temsili olarak kabul eden maddeleri işaretlemişlerdir.

### 3.4. İnfomal Olarak Verilen Limit Durumunu Formal Olarak İfade Edebilme

Öğretmen adaylarından testin dördüncü sorusunda, infomal olarak verilen limit durumunun formal ifadesini belirlemeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının cevapları doğru, yanlış ve boş olarak sınıflandırılmıştır. Tablo 5'de öğretmen adaylarının cevaplarının frekans ve yüzdelik dağılımları sunulmuştur.

**Tablo 5.** Öğrencilerin 4. soruya verdikleri cevapların dağılımı

D		Y		B	
f	%	F	%	f	%
96	85,71	15	13,39	1	0,89

Öğretmen adaylarının büyük çoğunluğu soruyu doğru olarak cevaplandırmıştır. Bununla birlikte yanlış cevap veren öğretmen adaylarının  $\epsilon$  ve  $\delta$  değişkenlerinin veya a ve L değerlerinin yerlerini karıştırdıkları belirlenmiştir.

### 3.5. Limit Tanımı İçerisinde Yer Alan Eşitsizlikler Grafikselsel Olarak Verildiğinde Cebirsel Temsillerini Tanıyabilme

Öğretmen adaylarından testin üçüncü sorusunda, limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizlikler grafikselsel olarak verildiğinde cebirsel temsili belirlemeleri istenmiştir. Öğretmen adaylarının cevapları doğru, yanlış ve boş olarak sınıflandırılmıştır. Tablo 6'da öğretmen adaylarının cevaplarının frekans ve yüzdelik dağılımları sunulmuştur.

**Tablo 6.** Öğrencilerin 3. soruya verdikleri cevapların dağılımı

D		Y		B	
f	%	f	%	F	%
83	74,11	28	25,00	1	0,89

Öğretmen adaylarının cevapları incelendiğinde her dört adaydan birinin soruyu yanlış cevapladığı görülmektedir. Yanlış cevaplar incelendiğinde, eşitsizliklerin sınırlarını yanlış belirlemelerinin yanı sıra, bağımlı ve bağımsız değişkenlerin ait olduğu eşitsizlikleri karıştırdıkları ortaya çıkmıştır.

### 3.6. $\epsilon$ ve $\delta$ Değişkenlerinin Birbirlerine Bağlı Olarak Değerlerini Belirleyebilme

Öğretmen adaylarının  $\epsilon$  ve  $\delta$  değişkenlerinin birbirlerine bağlı olarak değerlerini belirleyip belirleyemediklerini ölçmek amacıyla testin beşinci, altıncı ve yedinci soruları sorulmuştur. Testin beşinci sorusunda öğretmen adaylarından verilen bir  $\epsilon$  değerine karşılık gelen  $\delta$  değerini cebirsel olarak hesaplamaları ve devamında buldukları  $\delta$  değerinin tekliliğine ilişkin yorum yapmaları istenmiştir. Öğretmen adaylarının soruya ve yoruma ilişkin cevaplarının dağılımı Tablo 7'de görülmektedir. Tabloda  $\delta$  değerini doğru bulan adayların cevapları,  $\delta$  değişkeninin tekliliğine ilişkin yaptıkları yorumlar açısından tek değil, tektir ve yorumsuz olmak üzere üç farklı kategoride sınıflanmıştır.

**Tablo 7.** Öğrencilerin 5. soruya verdikleri cevapların dağılımı

D		Y		B					
Tek Değildir		Tektir		Yorumsuz					
f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
27	24,11	35	31,25	13	16,07	16	14,29	16	14,29

Öğretmen adaylarının yaklaşık %72'si cebirsel işlemler yoluyla tanım içerisindeki eşitsizliği sağlayacak şekilde bir delta değeri bulabilmiştir. Bununla birlikte cebirsel işlemler yoluyla doğru bir değer bulan adayların büyük çoğunluğu, delta değerinin tekliliğini yorumlamada başarı sergileyememiştir. Soruya yanlış cevap veren adayların bir kısmının epsilon ve delta değerlerini birbirine bağlayamadıkları görülmüştür. Öğretmen adaylarının yaşadığı bu sıkıntıyı temsil eden bir cevap şu şekilde ortaya çıkmıştır.

Soru 5)

$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$  bilinmektedir. Limit tanımı içerisinde  $\epsilon = 0.1$  olarak verilirse limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizlikleri gerçekleyen bir  $\delta$  değeri bulunuz. Sizce bu  $\delta$  değeri tek midir ?

$$\begin{aligned}
 |x-2| < 8 & \quad (2x-1)-3 < \epsilon \\
 -8 \leq x-2 < 8 & \quad 2x-4 < \epsilon \\
 -8+2 \leq x \leq 6+2 & \quad 2x < 4,1 \\
 & \quad x < \frac{4,1}{2}
 \end{aligned}$$



Bazı öğretmen adayları ise istenen delta değerini negatif olarak bulmuştur. Bu hataya yönelik bir öğretmen adayının cevabı şu şekildedir.

Soru 5)  
 $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$  bilinmektedir. Limit tanımı içerisinde  $\epsilon = 0.1$  olarak verilirse limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizlikleri gerçekleyen bir  $\delta$  değeri bulunuz. Sizce bu  $\delta$  değeri tek midir ?

$$|x-3| < \delta \text{ olursa } |2x-1-3| < 0,1 \quad +\delta + \delta = \frac{4}{20} - 3$$

$$-\delta < x-3 < \delta \quad -0,1 < 2x-4 < 0,1 \quad \delta = \frac{-4}{20} \approx -1$$

$$-\delta + 3 < x < \delta + 3 \quad \frac{3,9}{2} < x < \frac{4,1}{2}$$

Yanlış cevap veren öğretmen adaylarının geri kalan kısmı cevaplarında delta değeri olarak bağımsız değişkenin sınırlarından birini kabul etmişlerdir. Bu yönde yapılan hatalara örnek oluşturan bir cevap şu şekildedir.

Soru 5)  
 $\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$  bilinmektedir. Limit tanımı içerisinde  $\epsilon = 0.1$  olarak verilirse limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizlikleri gerçekleyen bir  $\delta$  değeri bulunuz. Sizce bu  $\delta$  değeri tek midir ?

$x = 2$  için  $\epsilon = 0,1$  kabulünde her bir  $\delta$  değeri vardır.

$$|2x-1-3| < \epsilon$$

$$2x-4 < 0,1$$

$$2x < 4,1$$

$$x < \frac{4,1}{2} \Rightarrow x < 2,05 \text{ için } \delta = 2,05 \text{ olabilir}$$

Testin altıncı sorusunda öğretmen adaylarından, bir limit durumunda verilen epsilon değerine karşılık gelen en büyük delta değerinin ne olacağı sorusuna denk olan ifadeleri belirlemeleri istendi. Altıncı sorunun seçeneklerinden birinci ve üçüncü sıradaki ifadeler doğru cevabı oluşturmaktadır. Öğretmen adayları arasından her iki ifadeyi seçenler doğru(D), bu ikisinden yalnız birini seçenler eksik(E), doğru seçeneklerin dışında seçim yapanlar yanlış(Y) ve bunların dışındakiler boş(B) olarak sınıflandırılmıştır. Öğretmen adaylarının cevaplarının dağılımı Tablo 8'de sunulmuştur.

**Tablo 8.** Öğrencilerin 6. soruya verdikleri cevapların dağılımı

D		Y		E		iii		B	
f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
77	68,75	8	7,14	10	8,93	15	13,39	2	1,79

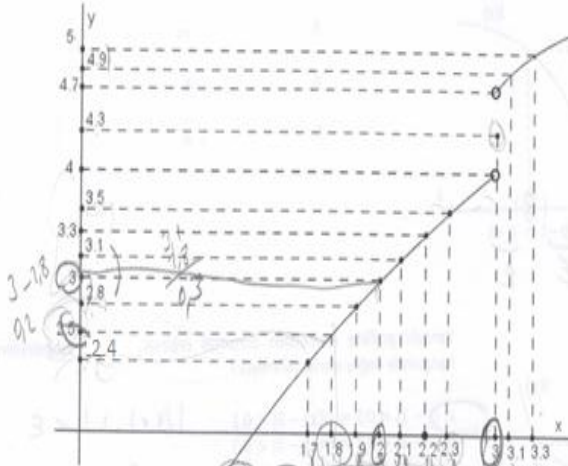
Öğretmen adaylarına  $\epsilon$  ve  $\delta$  değişkenlerinin birbirine bağlı değerlerini grafiksel veriden hareketle belirleyip belirleyemediklerini ölçmek amacıyla yedinci soru yöneltilmiştir. Öğretmen adaylarının cevapları her bir alt soru için doğru, yanlış ve boş olarak sınıflandırılmış olup, adayların cevaplarının dağılımı Tablo 9'da sunulmuştur.

**Tablo 9.** Öğrencilerin 7. soruya verdikleri cevapların dağılımı

	D		Y		B	
	f	%	f	%	F	%
i.	52	46,43	35	31,25	25	22,32
ii.	28	25,00	48	42,86	36	32,14
iii.	27	24,11	49	43,75	36	32,14
iv.	21	18,75	35	31,25	56	50,00

Öğretmen adaylarının vermiş oldukları cevaplar her bir soru için tek tek analiz edilmiştir. Birinci soruda öğretmen adaylarının yarıya yakını doğru cevap verirken, yaklaşık üçte biri soruya yanlış cevap vermiştir. Öğretmen adaylarının yanlış cevapları incelendiğinde bir kısmının delta değeri olarak, epsilon değerinin belirlediği aralığın alt veya üst sınırına karşılık gelen bağımsız değişkenin değerini aldığı belirlenmiştir. Buna örnek teşkil edebilecek bir öğrenci cevabı aşağıda verilmiştir.

Soru 7)



Yukarıdaki grafikte verilen  $f$  fonksiyonu ve  $x_0=2$  ve  $x_1=3$  değerleri için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

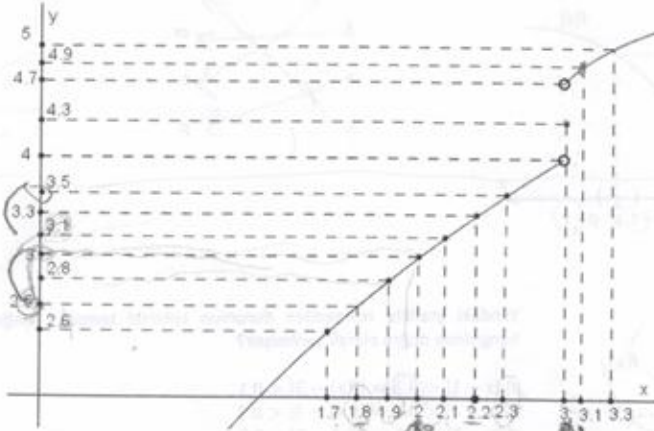
- $\epsilon=0.2$  olarak verilsin. Grafikten yararlanarak  $\delta$  değişkeni için bir değer bulun öyleki  $|x - x_0| < \delta$   
 $\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  şartı sağlansın.  $\delta = \dots 1.9$

Şekilden görüldüğü üzere aday fonksiyonun görüntü kümesinde yer alan 3 noktasının verilen epsilon komşuluğunun alt sınırına karşılık gelen 1.9 bağımsız değişken değerini

delta değeri olarak belirlemiştir. Bunun yanı sıra bazı adaylar grafiği verilen fonksiyon için cebirsel bir karşılık bulmaya çalışmışlardır.

Öğretmen adaylarının ikinci alt soruya vermiş oldukları cevaplar incelendiğinde ise, adayların yarıya yakınının soruyu yanlış cevapladığı ve geri kalanların büyük kısmının soruyu cevaplayamadığı görülmüştür. Soruyu yanlış cevaplayan adayların cevapları incelendiğinde yine bir kısmının bir önceki alt soruda olduğu gibi grafiği verilen fonksiyonu cebirsel olarak ifade etme arayışına girdikleri belirlenmiştir. Bunun yanı sıra adayların büyük kısmı istenen delta değeri için 0.3 yanıtını vermişlerdir. Öğretmen adaylarının niçin bu değeri bulduklarını belirleme amacıyla cevapları incelendiğinde şu sonuca varılmıştır. Adaylar 3 noktasının 0.5 komşuluğunun sınır değerlerine karşılık gelen bağımsız değişkenin değerlerini sırasıyla 2.3 ve 1.8 olarak belirleyip, devamında soruda delta değişkeninin en büyük değeri istendiğinden 2.3 değerini sınır değer kabul edip delta değerini 0.3 olarak belirlemiştir. Soruyu bu şekilde cevaplayan öğrencilerin cevabını temsil edebilecek bir adayın çözümü aşağıda verilmiştir.

Soru 7)



- $\epsilon=0.5$  olarak verilsin. Grafikten yararlanarak  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$  şartını sağlayan en büyük  $\delta$  değeri nedir?  $\delta = \dots$

Öğretmen adaylarının üçüncü alt soruya vermiş oldukları cevaplar incelendiğinde ise, adayların yarıya yakınının soruyu yanlış cevapladığı ve geri kalanların büyük kısmının soruyu cevaplayamadığı görülmüştür. Öğretmen adaylarının yanlış cevapları incelendiğinde bir kısmının istenen epsilon değeri olarak, fonksiyonun bağımsız değişkenin delta komşuluğundaki alt veya üst sınır değerini belirledikleri gözlemlenmiştir.

Tablo 9'dan görüldüğü üzere adaylar en çok son soruda zorlanmıştır. Öğretmen adaylarının yarısından fazlası soruya ilişkin bir yorum yapamazken geri kalan adayların yarısından çoğu soruyu yanlış cevaplamıştır. Yanlış cevap veren adaylar epsilon değeri olarak fonksiyonun değer kümesinden elemanları atadıkları gözlemlenmiştir.

#### 4. Sonuç ve Tartışma

Geleneksel olarak yürütülen analiz dersini alan öğretmen adaylarının limit kavramının formal tanımına yönelik geliştirdikleri anlamaları ortaya çıkarma amacıyla yürütülen bu araştırmanın sonucunda, adayların limit kavramının formal tanımına ilişkin yanlış anlamalar geliştirdikleri ve tanımı anlamada zorluklar yaşadıkları belirlenmiştir. Çalışmaya dâhil olan adayların büyük çoğunluğunun limit kavramının formal tanımını tam olarak ifade edemedikleri görülmektedir. Adayların büyük bölümü, tanımın informal ve formal karşılıklarını belirlemeyi isteyen dördüncü, altıncı ve sekizinci sorularda başarı gösterdikleri gözükmemektedir. Bu sorularda ortaya çıkan başarıya, soruların çoktan seçmeli yapıda olmasından ötürü şans faktörünün bir dereceye kadar etki ettiği düşünülebilir. Bununla birlikte tanım içerisindeki niceleyicilerin ve değişkenlerin analitik düzlemdeki temsillerini belirlemeyi isteyen ikinci soruda adayların gösterdiği başarı ve verilen epsilon değerine karşılık bir delta değişkeni bulmayı isteyen beşinci soruda adayların negatif değer ataması adayların formal tanımı tam olarak anlamadan ezberlediklerine işaret etmektedir. Bununla birlikte beşinci soruda cebirsel işlemler yoluyla istenen  $\delta$  değerini bulmada başarılı olan adayların oranı ile  $\delta$  değerinin tekliline ilişkin yorum yapmada başarı gösteren adayların oranı dikkate alındığında, adayların tanımı ezberlemenin yanı sıra tanım üzerinde yapılan işlemleri de ezberleme yoluna gittikleri görülmektedir. Özetle adaylar tanımın farklı ifadelerini tanıyabilmekte fakat tanım içerisindeki değişkenler üzerinde yorum yapamamaktadırlar. Elde edilen bu sonuç literatürde yer alan çalışmalar ile paralellik göstermektedir (Barak, 2007; Queseda ve diğ., 2008).

Eşitsizliklerin cebirsel ve grafiksel temsilleri arasında ilişki kurmayı gerektiren ikinci ve üçüncü sorularda adayların başarıları göz önüne alındığında, üçüncü soruyu doğru cevaplayan adayların ikinci soruyu doğru cevaplayan aday sayısından daha fazla olduğu görülmektedir. Dolayısıyla adayların bir kısmı grafiksel olarak verilen eşitsizliklerin cebirsel formunu tanıyabilirken, tanım içerisinde yer alan eşitsizliklerin düzlemdeki temsillerini belirleyememektedir. Bu durum bir üst paragrafta ortaya koyduğumuz, adayların formal tanımı tam olarak anlamak yerine ezberledikleri sonucunu desteklemektedir.

Adayların tanımın grafiksel boyutuna ilişkin soruların ikinci ve üçüncü sorularında gösterdikleri başarı ile yedinci soruda gösterdikleri başarı arasındaki fark göz önüne alındığında, adayların grafiksel bağlamda tanım üzerinde yorum ve muhakeme yapmada, tanımın grafiksel boyutta temsilini tanımaya nazaran oldukça geride oldukları gözükmemektedir. Dolayısıyla adaylar tanım içerisinde yer alan değişkenlerin ve eşitsizliklerin düzlemdeki temsillerini tanıyabilseler de, bu eşitsizlikler üzerinde grafiksel verilerden hareketle muhakeme ve yorum yapamamaktadır. Bunun sonucu olarak adayların

büyük bölümü grafiksel olarak sunulan bir limit durumunda, epsilon ve delta değişkenlerinden biri verildiğinde sadece grafiksel verilerden diğerini elde edememekte ve değişkenler üzerinde muhakeme yapamamaktadır. Bununla birlikte adayların bir kısmı verilen eşitsizlikleri sağlayan epsilon ve delta değişkenlerini bulmak için, grafiği verilen fonksiyonun cebirsel ifadesinin elde etme eğilimi gösterdikleri belirlenmiştir. Bu durum yine daha önce ifade ettiğimiz, adayların tanımın yanı sıra tanım üzerinde yapılan işlemleri de ezberleme yoluna gittikleri sonucunu destekler niteliktedir. Özetle adayların büyük bölümü bir limit durumuna ilişkin yalnız grafiksel bilgiden çıkarım yapamamaktadırlar.

## **5. Öneriler**

Çalışmanın sonuçları geleneksel olarak gerçekleştirilen limit kavramının öğretiminin adayların kavramın formal tanımına ilişkin yeterli bir anlama geliştirmede yetersiz kaldığını göstermektedir. Buradan hareketle kavramın formal tanımının üzerinde öğretim süreçlerinde daha fazla vurgu yapılmasını ve öğrencilerde anlamlı öğrenmeye yardım edecek etkinliklerin uygulanmasını önermekteyiz. Bunun yanı sıra çalışmaya katılan adayların yalnızca grafiksel verilerden hareketle tanım içerisindeki eşitsizliklere ve değişkenlere yönelik çıkarım yapamamaları, geleneksel olarak yürütülen öğretim süreçlerinin limit kavramının formal tanımının grafiksel boyutuna ilişkin anlama geliştirmede yeterli olmadığına işaret etmektedir. Bu sonuçtan yola çıkarak limit kavramının formal tanımının öğretiminde cebirsel boyutun yanı sıra grafiksel boyutuna da ağırlık verilmesini önermekteyiz.

## Prospective Elementary Mathematics Teachers Understandings about the Formal Definition of Limit

### Extended Abstract

The concept of limit holds a central point among topics in analysis. The importance of this concept stems from the fact that the majority of the concepts included in calculus curriculum are defined on the basis of its definition. In addition to its importance on the construction of mathematical concepts, the concept of limit is regarded as a bridge in transition to advanced mathematical thinking. Because of its importance in both mathematics and mathematical thinking, the concept of limit has been a subject of study for many mathematics education researchers. These studies investigated various aspects of teaching and learning of limit concept. Among these, those focused on the formal definition of limit are much less compared to others and this is especially true for Turkish mathematics education literature.

The formal definition of limit consists of variables, quantifiers that bind those variables, and inequalities. On the other hand, it is the first experience for students to deal such a complex definition during their mathematics education. For these reasons, it is not reasonable to expect students fully understand the meaning of this notation-rich definition with ease. Therefore in this study we investigated the understandings of prospective elementary mathematics teachers after a calculus course in which traditional teaching method was used. The sample of the study consists of 112 prospective elementary mathematics teachers all of whom successfully completed the course. To assess the understandings of the participants a test that consists of open ended and multiple choice questions was used. In the construction of the test we took into account the previous studies and the suggestions of field experts. The findings of the study revealed several difficulties that students experience in understanding the formal definition of limit concept. In the light of the results some suggestions are made for improving learning and teaching of limit concept.

**Key Words:** Teaching and learning calculus, limit concept, formal definition

### Kaynaklar/References

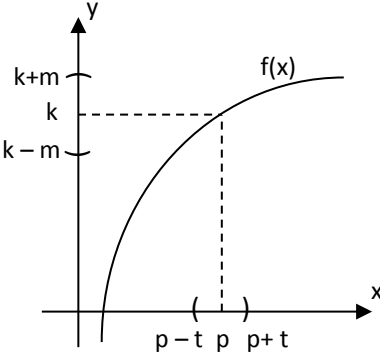
- Akbulut, K., & Işık, A. (2005). Limit Kavramının Anlaşılmasında Etkileşimli Öğretim Stratejisinin Etkinliğinin İncelenmesi ve Bu Süreçte Karşılaşılan Kavram Yanılgıları. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 497-512.
- Altun, N. (2009). *Limit Öğretimine Alternatif Bir Yaklaşım*. Ankara: Gazi Üniversitesi.
- Artigue, M. (2000). Teaching and Learning Calculus: What can be learned from education research and curricular changes in France? In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput

- (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (Vol. 8, pp. 1-15). United States of America: American mathematical society.
- Barak, B. (2007). *Limit Konusundaki Kavram Yanılıgılarının Belirlenmesi*. Balıkesir: Balıkesir Üniversitesi.
- Çolak, H. (2002). *Limit Öğretiminde İki Farklı Öğretim Durumunun Karşılaştırılması*. Ankara: Gazi Üniversitesi.
- Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Davis, R., & Vinner, S. (1986). The Notion of Limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, 5, 281-303.
- Ervynck, G. (1981). Conceptual difficulties for first year university students in the acquisition of the notion of limit of a function. *Proceedings of the Fifth Conference of the International Group for The Psychology of Mathematics Education*, (pp. 330-333).
- Fernandez, E. (2004). The Students' Take on The Epsilon-Delta Definition of a Limit. *Primus*, 14(1), 43-54.
- Gass, F. (1992). Limits via Graphing Technology. *Primus*, 2(1), 9-15.
- Kabaca, T. (2006). *Limit Kavramının Öğretiminde Bilgisayar Cebiri Sistemlerinin Etkisi*. Ankara: Gazi Üniversitesi.
- Quesada, A., Richard, L., & Wiggins, M. (2008). The Impact of the Graphical Approach on Students' Understanding of the Definition of Limit. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, 15(3), 95-102.
- Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, 18, 371-397.
- Swinyard, C., & Lockwood, E. (2007). *Research on Students' Reasoning about the Formal Definition of Limit: An Evolving Conceptual Analysis*. 2, 12, 2011 tarihinde Mathematical Association of America: <http://sigmaa.maa.org/rume/crume2007/papers/lockwood-swinyard.pdf> adresinden alındı.
- Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, limits, infinity and proof. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics*, 12, 151-169.
- Williams, R. S. (1991). Models of Limit Held by College Calculus Students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 219-236.
- Zimmermann, W. (1991). Visual thinking in calculus. In W. Zimmermann, & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in teaching and learning mathematics*, 127-138. Washington DC: MAA.
-

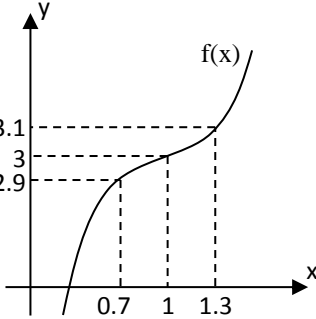
### Ek-1 Test

Soru 1) Bir fonksiyonun bir noktasındaki limiti kavramının formal tanımını yapınız. Eğer formal tanımı hatırlamıyorsanız kendi cümleleriniz ile ifade ediniz.

Soru 2)  $f(x)$  bir fonksiyon ve  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  olduğu bilinmektedir. Limit tanımı içerisinde yer alan  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $a$  ve  $L$  değişkenlerinin kartezyen düzlemdeki temsillerini verilen harfler ile eşleştiriniz.



$\varepsilon$	$k$
$\delta$	$m$
$a$	$t$
$L$	$p$



### Soru 3)

Yandaki grafikte resmedilen durumun cebirsel temsili aşağıdakilerden hangisinde doğru olarak verilmiştir?

- $|x - 1| < 0.3 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.1$
- $|x - 1| < 0.1 \Rightarrow |f(x) - 3| < 0.3$
- $|x - 3| < 0.1 \Rightarrow |f(x) - 1| < 0.3$
- $|x - 3| < 0.3 \Rightarrow |f(x) - 1| < 0.1$

Soru 4)  $f(x) := x^2 + 3$  olmak üzere  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 12$  olduğu bilinmektedir. Aşağıdaki ifadelerden hangisi bu fonksiyonun  $x = 3$  noktasındaki limitinin 12 olduğunu ifade eden formal tanımdır?

- $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  öyleki;  $|x - 3| < \delta$  oldukça  $|f(x) - 12| < \varepsilon$
- $\forall \delta > 0$  için  $\exists \varepsilon > 0$  öyleki;  $|x - 3| < \delta$  oldukça  $|f(x) - 12| < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  öyleki;  $|x - 12| < \delta$  oldukça  $|f(x) - 3| < \varepsilon$
- $\forall \delta > 0$  için  $\exists \varepsilon > 0$  öyleki;  $|x - 12| < \varepsilon$  oldukça  $|f(x) - 3| < \delta$



Soru 5)

$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$  bilinmektedir. Limit tanımı içerisinde  $\varepsilon = 0.1$  olarak verilirse limit tanımı içerisinde yer alan eşitsizlikleri gerçekleyen bir  $\delta$  değeri bulunuz. Sizce bu  $\delta$  değeri tek midir ?

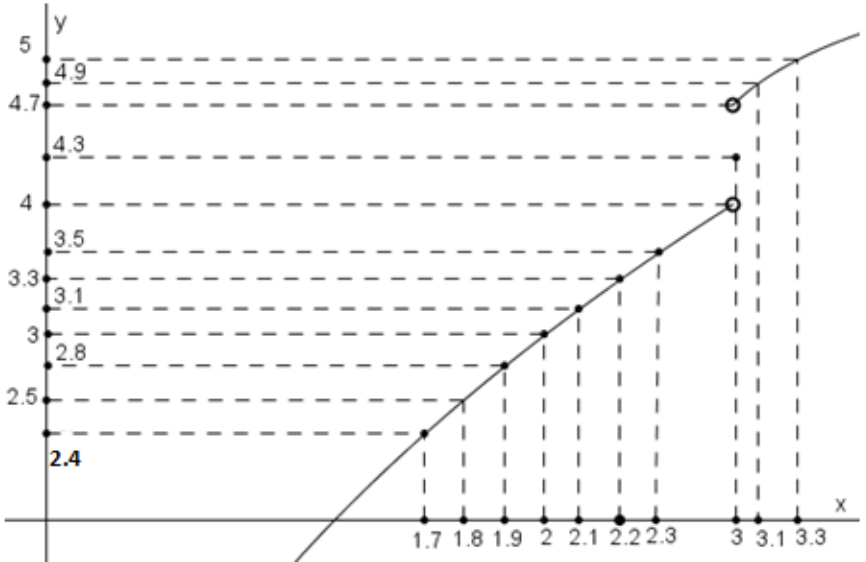
Soru 6)

$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 1) = 3$  bilinmektedir. Eğer  $\varepsilon = 0.1$  olarak verilirse,  $\delta$ 'nın alabileceği en büyük değer nedir?

Yukarıdaki ifadeye denk olan ifadeleri işaretleyiniz?

- $x$  değişkeni 2 değerine en fazla ne kadar uzak olabilir öyleki  $2x-1$  değerinin 3 değerine olan uzaklığı 0.1 değerinden küçük olsun.
- $x$  değişkeni 3 değerine en fazla ne kadar uzak olabilir öyleki  $2x-1$  değerinin 2 değerine olan uzaklığı 0.1 değerinden büyük olsun.
- $|x-2| < \delta$  oldukça  $|2x-4| < 0.1$  şartını doğrulayan en büyük  $\delta$  değeri kaçtır?
- $|x-3| < \delta$  oldukça  $|2x-3| < 0.1$  şartını doğrulayan en büyük  $\delta$  değeri kaçtır?

Soru 7)



Yukarıda grafiği verilen  $f$  fonksiyonu ve  $x_0=2$  ve  $x_1=3$  değerleri için aşağıdaki soruları cevaplayınız.

- i.  $\varepsilon=0.2$  olarak verilsin. Grafikten yararlanarak  $\delta$  değışkeni için bir değer bulun öyleki  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  şartı sağlansın.  $\delta = \dots\dots\dots$
- ii.  $\varepsilon=0.5$  olarak verilsin. Grafikten yararlanarak  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  şartını sağlayan en büyük  $\delta$  değeri nedir ?  $\delta = \dots\dots\dots$
- iii.  $\delta = 0.3$  olarak verilsin. Grafikten yararlanarak  $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$  şartını sağlayan en küçük  $\varepsilon$  değeri nedir ?  $\varepsilon = \dots\dots\dots$
- iv. Grafikten yararlanarak öyle  $\varepsilon$  değeri bulunuzki,  $|x - x_1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$  ( $x_1$ ' e dikkat edin) şartını sağlayan hiç bir  $\delta$  değeri olmasın ?  $\varepsilon = \dots\dots\dots$

Soru 8)

$\forall \varepsilon > 0$  için  $\exists \delta > 0$  öyleki;  $|x - 4| < \delta$  oldukça  $|-x^2 + 2x + 8| < \varepsilon$ . Bu ifadenin dengi aşağıdakilerden hangisidir?

- a)  $f(x) := x - 4$  olmak üzere  $f(x)$  fonksiyonun  $x = -8$  değeriindeki limiti 4'tür.
- b)  $f(x) := -x^2 + 2x$  olmak üzere  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = 4$  değeriindeki limiti -8' dir.
- c)  $f(x) := -x^2 + 2x$  olmak üzere  $f(x)$  fonksiyonunun  $x = -8$  değeriindeki limiti 4' tür.
- d)  $f(x) := x - 4$  olmak üzere  $f(x)$  fonksiyonun  $x = 4$  değeriindeki limiti -8'dir.