

TEKRARLAMALI GAUSS-SEIDEL YARDIMCI DEĞİŞKENLER ALGORİTMASI İLE TRANSFER FONKSİYONU PARAMETRELERİNİN YANSIZ TAHMİNİ

*Metin HATUN**

*Osman Hilmi KOÇAL**

Özet: Bu makalede, doğrusal zamanla değişmeyen ayrık-zamanlı sistemlerin transfer fonksiyonu parametrelerini yansız olarak tahmin etmek için, Gauss-Seidel iterasyonları ile yardımcı değişkenlerin birlikte kullanıldığı tekrarlamalı bir algoritma önerilmiştir. Ayrıca, önerilen algoritmanın stokastik yakınsama analizi yapılmış ve yardımcı değişkenlerin kullanılması durumunda ölçme gürültüsünün renkli gürültü olması durumunda bile normal denklemlerin optimum çözümünü veren yansız bir kestireç olduğu gösterilmiştir. Önerilen algoritma, yapılan bir simülasyon çalışmasıyla bir örnek ikinci derece sistemin transfer fonksiyonu parametrelerinin tahmin edilmesinde kullanılmış ve benzer algoritmalarla karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Elde edilen sonuçlara göre, önerilen algoritmanın işlem yükü ve yakınsama hızı açısından diğer algoritmalara iyi bir alternatif olduğu görülmüştür.

Anahtar Kelimeler: Sistem Belirleme, Parametre Tahmini, Gauss-Seidel, Yardımcı Değişkenler, Yansız Tahmin, Yakınsama Analizi.

Unbiased Estimation of Transfer Function Parameters with Recursive Gauss-Seidel Instrumental Variables Algorithm

Abstract: In this paper, a recursive algorithm based on the use of Gauss-Seidel iterations and instrumental variables together is introduced for unbiased estimation of transfer function parameters of linear time invariant discrete-time systems. Furthermore, a stochastic convergence analysis of the proposed algorithm is performed and it is shown that the proposed algorithm is an unbiased parameter estimator that gives optimum solution of normal equations even if the measurement noise is colored. The proposed algorithm is used for estimation of transfer function parameters of a sample second order system and compared with similar algorithms by a simulation study. According to the results obtained, it is shown that the proposed algorithm is a good alternative to the others by viewpoints of computational complexity and convergence rate.

Key Words: System Identification, Parameter Estimation, Gauss-Seidel, Instrumental Variables, Unbiased Estimation, Convergence Analysis.

1. GİRİŞ

Sistem belirleme işlemi, gerçek zamanda gerçekleşen bir çok adaptif işaret işleme ve adaptif kontrol uygulamasının temelini oluşturmaktadır (Widrow ve Stearns, 1985, Haykin, 2002, Goodwin ve Sin, 1984, Isermann ve diğ. 1992, Aström ve Wittenmark, 1995, Landau ve diğ. 1998). Özellikle parametrik sistem modellerinin deneysel veriler kullanılarak gerçek zamanda tahmin edilmesi işlemi ve bu işlem için kullanılan adaptif algoritmalar geçmişten günümüze artan bir ilgi çekmiştir (Ljung ve Söderström, 1983, Sinha ve Kuszta, 1983, Söderström ve Stoica, 1989, Johansson, 1993, Kalouptsidis ve Theodoridis, 1993, Walter ve Pronzato, 1998, Raol ve diğ. 2004, Ljung, 1999, 2006). Bu konuda yayınlanan literatüre ve bilimsel çalışmalara göre, kullanılan algoritmaların işlem karmaşıklığı ve tahmin edilen parametrelerin yakınsama özellikleri, tahmin edilen parametrelerin kullanıldıkları uygulama alanlarına göre algoritma seçiminde birer tercih nedeni olmaktadır. Örneğin adaptif işaret işleme uygulamalarında hız açısından çoğunlukla işlem karmaşıklığı az olan algoritmalar tercih edilirken, adaptif sistem belirleme ve kontrol uygulamalarında yakınsama özellikleri iyi olan algoritmalar daha çok tercih edilmektedir.

Adaptif sistem belirleme ve kontrol uygulamalarında yaygın olarak kullanılan RLS (Recursive Least Squares) algoritmasının yakınsama özellikleri oldukça iyi olmasına karşın, sistemin çıkış işaretine

* Uludağ Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Elektronik Mühendisliği Bölümü, 16059, Görükle, Bursa.

karışan ölçme gürültüsünün renkli gürültü olması durumunda yanlış parametre tahminleri elde edilmektedir (Sinha ve Kuszta, 1983, Söderström ve Stoica, 1989, Ljung, 1999). Bu dezavantajdan kurtulmanın ve yansız parametre tahminlerini elde etmenin bir yolu yardımcı değişkenlerden yararlanmaktır. Yardımcı değişkenlerin RLS algoritmasıyla birlikte kullanılması durumunda elde edilen tekrarlamalı algoritma literatürde RIV (Recursive Instrumental Variables) algoritması olarak bilinmektedir (Young, 1984, Söderström ve Stoica, 1981, 1983, 1989, 2002, Ljung, 1999). Yardımcı değişkenlerin kullanıldığı RIV algoritması hem RLS algoritmasının hızlı yakınsama özelliğine sahiptir, hem de ölçme gürültüsünün renkli gürültü olması durumunda yansız parametre tahminleri elde edilebilmektedir. Fakat RIV algoritmasının işlem karmaşıklığı RLS algoritmasıyla aynıdır.

Son yıllarda, zaman ortalamalı normal denklemin Gauss-Seidel algoritmasıyla çözümü üzerine kurulu olan tekrarlamalı bir algoritma önerilmiştir (Koçal, 1998). Aynı algoritma farklı bir bakış açısıyla EDS (Euclidean Direction Search) adı ile de önerilmiş ve bazı adaptif işaret işleme uygulamalarında kullanılmıştır (Xu ve diğ. 1998, 1999, Bose ve Xu, 2002, Mabey ve diğ. 2004, Bose, 2004). Bu çalışmalarda Gauss-Seidel algoritması adaptif FIR (Finite Impulse Response) filtre katsayılarının adaptif olarak ayarlanmasında kullanılmıştır. Önerilen bu algoritmaların işlem yükü RLS algoritmasından daha az olup, yakınsama hızı RLS algoritmasına yakındır ve korelasyon matrisinin özdeğer yayılımının küçük olması durumunda RLS algoritmasına çok yakın sonuçlar vermektedir (Koçal, 1998, Bose, 2004). Bu makalenin amacı, daha önce adaptif işaret işleme uygulamalarında FIR filtre katsayılarını güncellemek için kullanılan Gauss-Seidel algoritmasını transfer fonksiyonu parametrelerini güncellemek için kullanmaktır.

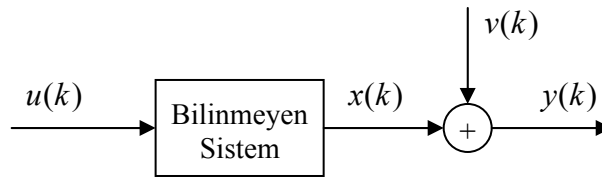
Bu makalede, Gauss-Seidel algoritması transfer fonksiyonu parametrelerinin tekrarlamalı olarak tahmin edilmesinde kullanılmış ve elde edilen parametre tahminlerinin stokastik yakınsama analizi yapılmıştır. Sistemin çıkış işaretine karışan renkli ölçme gürültüsünün istenmeyen etkisinden kurtulmak ve yansız parametre tahminlerini elde etmek için yardımcı değişkenlerden yararlanılmıştır. Yardımcı değişkenlerin Gauss-Seidel algoritmasıyla birlikte kullanıldığı yeni algoritma RGSIV (Recursive Gauss-Seidel Instrumental Variables) "Tekrarlamalı Gauss-Seidel Yardımcı Değişkenler" algoritması olarak adlandırılmıştır. Bu durumda, yansız parametre tahminlerinin elde edildiği yapılan stokastik yakınsama analiziyle analitik olarak gösterilmiştir. Elde edilen sonuçların doğruluğu, bir örnek ikinci derece sistem kullanılarak yapılan bir simülasyon çalışmasıyla gösterilmiştir ve RIV algoritmasıyla karşılaştırılmalı olarak incelenmiştir.

2. RGSIV ALGORİTMASI İLE SİSTEM BELİRLEME

Doğrusal zamanla değişmeyen tek girişli tek çıkışlı n . dereceden ayrık zamanlı bir sistemin transfer fonksiyonu z -domeninde aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}, \quad m \leq n \quad (1)$$

Açık çevrimde sistem belirleme işleminde, kullanılan sisteme ait giriş ve çıkış işaretleri ise aşağıdaki şekildeki gibi gösterilebilir.



Şekil 1:
Sistem belirleme işleminde kullanılan sistem modeli

Burada $u(k)$ sisteme uygulanan giriş işaretini, $x(k)$ ve $y(k)$ sırasıyla sistemin gürültüsüz ve gürültülü çıkış işaretini, $v(k)$ ise çıkış işaretine karışan ölçme gürültüsünü göstermektedir.

Gauss-Seidel algoritması, sistem belirleme işleminde $R\theta_{opt} = p$ ile verilen normal denklemin çözümünde kullanılmaktadır, burada θ_{opt} ile $m+n$ adet sistem parametresini içeren $(m+n) \times 1$ boyutlu

parametre vektörü, R ile $(m+n) \times (m+n)$ boyutlu korelasyon matrisi ve p ile $(m+n) \times 1$ boyutlu korelasyon vektörü gösterilmektedir. R matrisi ve p vektörü aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır.

$$R = E[\varphi(k)\varphi^T(k)], \quad p = E[\varphi(k)y(k)] \quad (2)$$

Burada E beklenen değer operatörüdür, $\varphi(k)$ ise sistemin giriş-çıkış işaretlerinden oluşan veri vektörüdür ve aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\varphi(k) = [-y(k-1) \quad \dots \quad -y(k-n) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-m)]^T \quad (3)$$

Gauss-Seidel algoritmasıyla tekrarlamalı parametre tahmin işleminin başlangıç noktası, zaman ortalamalı normal denklemin Gauss-Seidel algoritmasıyla çözümü üzerine kuruludur. Çünkü pratik uygulamalarda R matrisinin ve p vektörünün değerinin bilinmemesi durumunda tahmin edilmiş değerleri kullanarak bir yaklaşıklık yapılır. Bu yaklaşık tahmini değerler k adet veri grubu kullanıldığında aşağıdaki gibi yazılabilir,

$$R(k) \cong \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \varphi(n)\varphi^T(n), \quad p(k) \cong \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \varphi(n)y(n) \quad (4)$$

veya $1/k$ çarpanı göz önüne alınmadan giriş-çıkış veri örnekleri alındıkça iteratif olarak aşağıdaki gibi güncellenebilir.

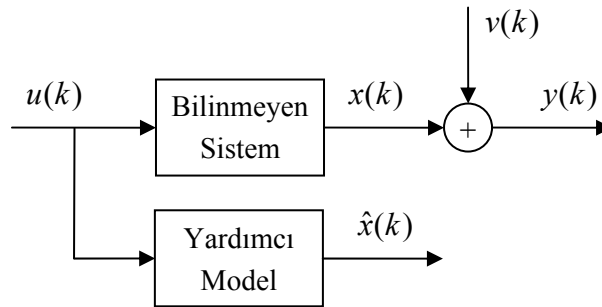
$$R(k) = R(k-1) + \varphi(k)\varphi^T(k), \quad p(k) = p(k-1) + \varphi(k)y(k) \quad (5)$$

$R(k)$ matrisi ve $p(k)$ vektörü iteratif olarak güncellendikten sonra bir adımlık Gauss-Seidel iterasyonu $R(k)\hat{\theta}(k) = p(k)$ olarak yazılan zaman ortalamalı normal denklemin çözümünde

$$\hat{\theta}_i(k+1) = \left[p_i(k) - \sum_{j=1}^{i-1} R_{ij}(k)\hat{\theta}_j(k+1) - \sum_{j=i+1}^{m+n} R_{ij}(k)\hat{\theta}_j(k) \right] / R_{ii}(k), \quad (i = 1, 2, \dots, m+n) \quad (6)$$

şeklinde kullanılır, yani iterasyon indisi ayrık zaman indisi olarak alınmıştır. Burada $R_{ij}(k)$ korelasyon matrisinin i . satırına ve j . sütununa denk düşen elemanını gösterir, $p_i(k)$ korelasyon vektörünün i . elemanını gösterir ve $\hat{\theta}_i(k)$ parametre vektörünün i . elemanını gösterir. Yukarıda (5) ve (6) ile verilen tekrarlamalı algoritma RGS (Recursive Gauss-Seidel) algoritması olarak adlandırılmıştır. RGS algoritmasının RLS algoritmasına göre en önemli farkı korelasyon matrisinin tersi yerine doğrudan kendisinin güncellenmesi, yani matris tersini güncellemek için kullanılan ilave bir iterasyona gerek kalmaması ve parametre tahminlerini güncellemek için anlık hata bilgisini doğrudan kullanmamasıdır. Ayrıca parametrelerin skaler olarak güncellendiğini de göz önüne aldığımızda, RLS algoritmasına göre işlem yükünün önemli ölçüde azaldığı görülmektedir (Koçal, 1998, Bose, 2004).

RGS algoritmasında yardımcı değişkenlerin kullanılmasıyla elde edilen tekrarlamalı algoritma RGSIV algoritması olarak adlandırılmıştır. Yardımcı değişkenlerin en yaygın kullanım biçimi aşağıdaki şekilde görüldüğü gibidir.



Şekil 2:
Sistem belirleme işleminde yardımcı değişkenlerin elde edilmesi

Burada kullanılan yardımcı model sabit katsayılı kararlı bir filtre veya parametreleri sistem parametreleriyle eşzamanlı olarak güncellenen bir adaptif filtre olabilmektedir. Bunların haricinde geciktirilmiş

giriş veya çıkış işaretleri de yardımcı değişken olarak kullanılabilir (Söderström ve Stoica, 1981, 1983, 1989, 2002, Ljung, 1999). Burada yardımcı değişkenleri elde etmek için sistemle aynı yapıya sahip bir adaptif filtre kullanıldığında, kullanılan yardımcı modele ait veri vektörü

$$z(k) = [-\hat{x}(k-1) \quad \dots \quad -\hat{x}(k-n) \quad u(k) \quad \dots \quad u(k-m)]^T \quad (7)$$

olarak yazılabilir ve bu vektörün elemanları $\hat{x}(k) = z^T(k)\hat{\theta}(k)$ şeklinde önceki adımda bulunan parametre değerleri kullanılarak hesaplanabilir. RGSIV algoritmasında hesaplanan bu değişkenler kullanıldığında $R(k)$ korelasyon matrisi ve $p(k)$ korelasyon vektörü

$$R(k) \cong \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k z(n)\varphi^T(n), \quad p(k) \cong \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k z(n)y(n) \quad (8)$$

şeklinde birikimli olarak veya $1/k$ çarpanı göz önüne alınmadan giriş-çıkış veri örnekleri alındıkça iteratif olarak aşağıdaki gibi güncellenebilir.

$$R(k) = R(k-1) + z(k)\varphi^T(k), \quad p(k) = p(k-1) + z(k)y(k) \quad (9)$$

$R(k)$ matrisi ve $p(k)$ vektörü iteratif olarak güncellendikten sonra parametre tahminleri bir adımlık Gauss-Seidel iterasyonu kullanılarak (6) eşitliğindeki gibi güncellenebilir.

3. RGSIV ALGORİTMASININ STOKASTİK YAKINSAMA ANALİZİ

Parametre tahminlerini tekrarlamalı veya çevrim-içi (on-line) olarak güncellemek için kullanılan RGS algoritmasını vektörel formda aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$\hat{\theta}(k+1) = -(R_L(k) + R_D(k))^{-1} R_U(k)\hat{\theta}(k) + (R_L(k) + R_D(k))^{-1} p(k) \quad (10)$$

Burada $R_L(k)$, $R_D(k)$ ve $R_U(k)$ sırasıyla korelasyon matrisinin alt üçgen, köşegen ve üst üçgen kısımlarını içeren kare matrisleri göstermektedir. Yakınsama analizinde, $R(k)$ korelasyon matrisinin ve $p(k)$ korelasyon vektörünün (4) ile verilen birikimli tahmini değerlerinin kullanıldığını varsayalım. Sistemin çıkış işaretini doğrusal bağımlı biçimde (linear regression form) $y(k) = \varphi^T(k)\theta_{opt} + v(k)$ olarak yazabiliriz. Çıkış işaretini $p(k)$ korelasyon vektörünün tahmini değerinde yerine yazdığımızda

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \varphi(n)y(n) = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \varphi(n)[\varphi^T(n)\theta_{opt} + v(n)] \\ &= R(k)\theta_{opt} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \varphi(n)v(n) \end{aligned} \quad (11)$$

elde edilir. Bu değer (9) ile verilen vektörel algoritmada yerine yazıldığında

$$\hat{\theta}(k+1) = -(R_L(k) + R_D(k))^{-1} R_U(k)\hat{\theta}(k) + (R_L(k) + R_D(k))^{-1} \left[R(k)\theta_{opt} + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \varphi(n)v(n) \right] \quad (12)$$

elde edilir. Bu denklemde korelasyon matrisi $R(k) = R_L(k) + R_D(k) + R_U(k)$ şeklinde yerine yazılarak denklem düzenlendiğinde

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(k+1) &= -(R_L(k) + R_D(k))^{-1} R_U(k)\hat{\theta}(k) \\ &\quad + \left[I + (R_L(k) + R_D(k))^{-1} R_U(k) \right] \theta_{opt} + (R_L(k) + R_D(k))^{-1} \left[\frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \varphi(n)v(n) \right] \end{aligned} \quad (13)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} E[\hat{\theta}(k+1)] &= E[\hat{\theta}(k)], \quad E[\varphi(k)v(k)] = \frac{1}{k} \sum_{n=1}^k \varphi(n)v(n) \\ E[(R_L(k) + R_D(k))^{-1}] &= (R_L + R_D)^{-1} \\ E[I + (R_L(k) + R_D(k))^{-1} R_U(k)] &= I + (R_L + R_D)^{-1} R_U \end{aligned} \quad (14)$$

kabulleri kullanılarak (13) ile verilen denklemin her iki tarafının beklenen değeri alındığında

$$[I + (R_L + R_D)^{-1} R_U] E[\hat{\theta}(k)] = [I + (R_L + R_D)^{-1} R_U] \theta_{opt} + (R_L + R_D)^{-1} E[\varphi(k)v(k)] \quad (15)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikten parametre tahminlerinin beklenen değeri

$$E[\hat{\theta}(k)] = \theta_{opt} + [I + (R_L + R_D)^{-1} R_U]^{-1} (R_L + R_D)^{-1} E[\varphi(k)v(k)] \quad (16)$$

olarak elde edilir. Burada $I + (R_L + R_D)^{-1} R_U = (R_L + R_D)^{-1} R$ matris eşitliği kullanıldığında

$$E[\hat{\theta}(k)] = \theta_{opt} + (R_L + R_D) R^{-1} (R_L + R_D)^{-1} E[\varphi(k)v(k)] \quad (17)$$

sonucu elde edilir. Elde edilen bu sonuç RGS algoritması ile elde edilen parametre tahminlerinin optimum değerine yakınsaması için gerekli şartları göstermektedir. Bunun için öncelikle korelasyon matrisinin tersi alınabilmelidir. Bunun için korelasyon matrisi pozitif tanımlı olmalıdır. Sistemin sürekli olarak uyarılması durumunda bu şart sağlanmaktadır. Korelasyon matrisinin pozitif tanımlı olması durumunda RGS iterasyonlarının yakınsaması sağlanmış olmaktadır (Hatun ve Koçal, 2005). Pratik uygulamalarda başlangıçta korelasyon matrisinin pozitif tanımlılığını garantilemek amacıyla $R(0) = \delta I$ olarak alınabilir, burada I uygun boyutlu birim matris olup $\delta = 0.1, 0.01, 0.001$ gibi küçük pozitif değerler alabilir. Algoritmanın kararlılığı sağlandıktan sonra elde edilen parametre tahminlerinin optimum değerine yakınsaması için gerekli olan diğer şart ise giriş-çıkış örnekleri alındıkça $E[\varphi(k)v(k)]$ vektörünün sıfır vektöre yakınsamasıdır. Bu vektörü çıkış işaretini $y(k) = x(k) + v(k)$ şeklinde yazarak aşağıdaki gibi inceleyebiliriz.

$$E[\varphi(k)v(k)] = E \begin{bmatrix} -y(k-1) \\ \vdots \\ -y(k-n) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{bmatrix} v(k) = E \begin{bmatrix} -x(k-1) \\ \vdots \\ -x(k-n) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{bmatrix} v(k) + E \begin{bmatrix} -v(k-1) \\ \vdots \\ -v(k-n) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{bmatrix} v(k) \quad (18)$$

Burada $E[x(k)v(k)] = 0$ ve $E[u(k)v(k)] = 0$ olduğu göz önüne alındığında

$$E[\varphi(k)v(k)] = E \begin{bmatrix} -v(k-1) \\ \vdots \\ -v(k-n) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{bmatrix} v(k) = \begin{bmatrix} -r_v(1) \\ \vdots \\ -r_v(n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (19)$$

sonucu elde edilir. Bu durumda $E[\varphi(k)v(k)]$ vektörünün sıfır vektöre yakınsayabilmesi için $r_v(i) = E[v(k-i)v(k)]$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ olarak tanımlanan, bozucu girişe ait ilk n adet oto-korelasyon katsayısının sıfır olması gerekir. Bu sonuca göre RGS algoritmasıyla elde edilen parametre tahminlerinin optimum değerine yakınsayabilmesi için ölçme gürültüsünün beyaz gürültü olması gerekir. RGSIV algoritmasının yakınsama analizi de benzer şekilde yapıldığında (17) ile verilen sonuç

$$E[\hat{\theta}(k)] = \theta_{opt} + (R_L + R_D) R^{-1} (R_L + R_D)^{-1} E[z(k)v(k)] \quad (20)$$

olarak elde edilir. Bu sonuca göre yine algoritmanın kararlılığının sağlanabilmesi için (8) ve (9) ile verilen korelasyon matrisinin tersi alınabilir olmalıdır. Burada yardımcı değişkenleri elde etmek için sistemle aynı yapıya sahip bir adaptif filtre kullanıldığında bu şart çok rahat bir şekilde sağlanabilmektedir (Söderström ve Stoica, 1981, 1983, 1989, 2002, Ljung, 1999). Ayrıca, RGSIV algoritmasında gürültü ile ilişkisiz değişkenler kullanıldığı için giriş-çıkış örnekleri alındıkça zamanla $E[\hat{x}(k)v(k)] = 0$ olmakta ve $E[z(k)v(k)]$ vektörü

$$E[z(k)v(k)] = E \begin{bmatrix} -\hat{x}(k-1) \\ \vdots \\ -\hat{x}(k-n) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{bmatrix} v(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

şeklinde sıfır vektöre yakınsamaktadır. Bu sonuca göre RGSIV algoritması kullanıldığında (20) eşitliği gereği algoritmanın kararlılığı sağlandığı sürece, çıkış işaretine karışan ölçme gürültüsünün renkli gürültü olması durumunda bile doğru parametre tahminlerinin elde edildiği görülmektedir.

4. SİMÜLASYON SONUÇLARI

Bu kısımda, önerilen RGSIV algoritmasının yakınsama özelliği yapılan bir simülasyon çalışmasıyla RIV algoritmasıyla karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Simülasyon çalışmasında kullanılan örnek ikinci derece transfer fonksiyonu

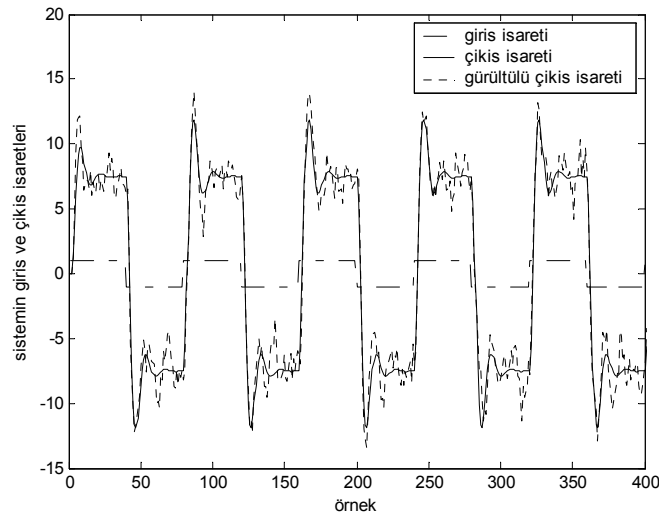
$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{z + 0.5}{z^2 - 1.5z + 0.7} \quad (22)$$

olarak seçilmiştir (Ljung, 2006). Burada kullanılan veri vektörü ve doğru parametre vektörü

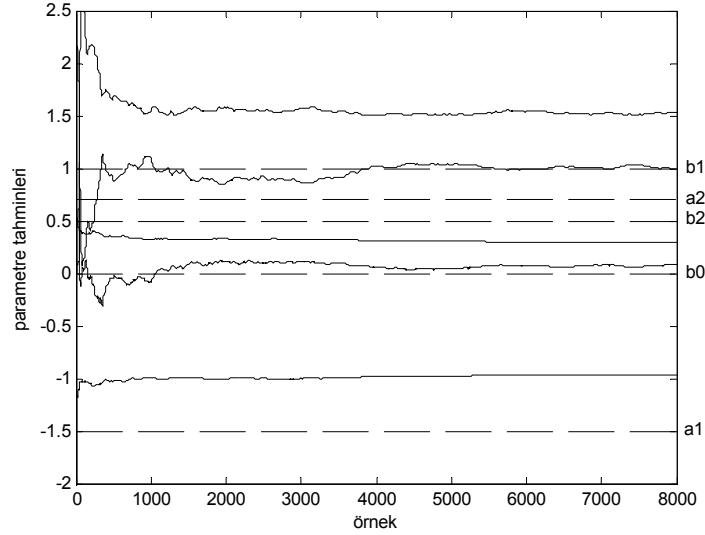
$$\varphi(k) = [-y(k-1) \quad -y(k-2) \quad u(k) \quad u(k-1) \quad u(k-2)]^T \quad (23)$$

$$\theta_{opt} = [a_1 \quad a_2 \quad b_0 \quad b_1 \quad b_2]^T = [-1.5 \quad 0.7 \quad 0.0 \quad 1.0 \quad 0.5]^T \quad (24)$$

olup sistemin çıkışına $v(k) = e(k) - e(k-1) + 0.2e(k-2)$ şeklinde elde edilen renkli gürültü eklenmiştir, burada $e(k)$ gürültüsü sıfır ortalamalı varyansı 1 olan normal dağılıma sahip rastgele gürültü dizisidir. Sisteme giriş işareti olarak genliği ∓ 1 ve periyodu 80 örnekleme periyoduna eşit olan bir kare dalga uygulanmıştır. Bu durumda sistemin gürültüsüz çıkış işareti ve $y(k) = \varphi^T(k)\theta_{opt} + v(k)$ eşitliği kullanılarak elde edilen gürültülü çıkış işareti Şekil 3'te görülmektedir. Bu durumda RGS algoritmasıyla yapılan simülasyon sonuçları Şekil 4'te görülmektedir. Burada kesikli düz çizgiler doğru parametre değerlerini göstermektedir. RGS algoritması kullanıldığında 8000 adım sonunda elde edilen parametre tahminlerinin $\hat{\theta}_{RGS}^T = [\hat{a}_1 \quad \hat{a}_2 \quad \hat{b}_0 \quad \hat{b}_1 \quad \hat{b}_2] = [-0.9656 \quad 0.2978 \quad 0.0849 \quad 0.9950 \quad 1.5275]$ değerlerine yakınsadığı görülmüştür. Bu değerler (24) ile verilen doğru değerlere uzaktır, yani yanlış parametre tahminleri elde edilmiştir.



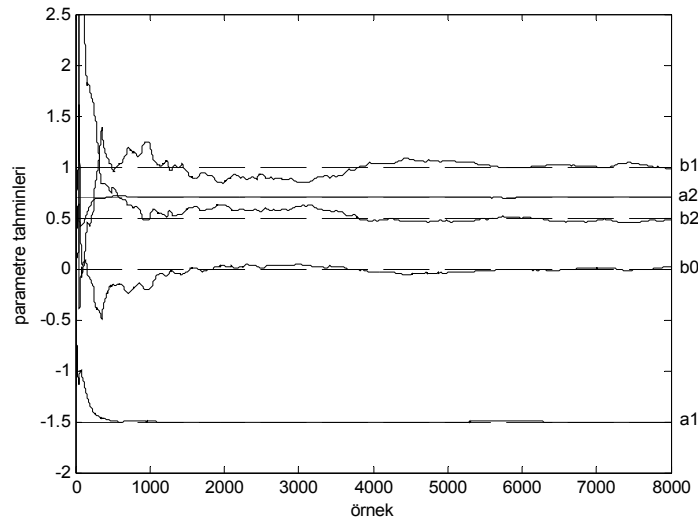
Şekil 3:
Simülasyonda kullanılan örnek sistemin giriş ve çıkış işaretleri



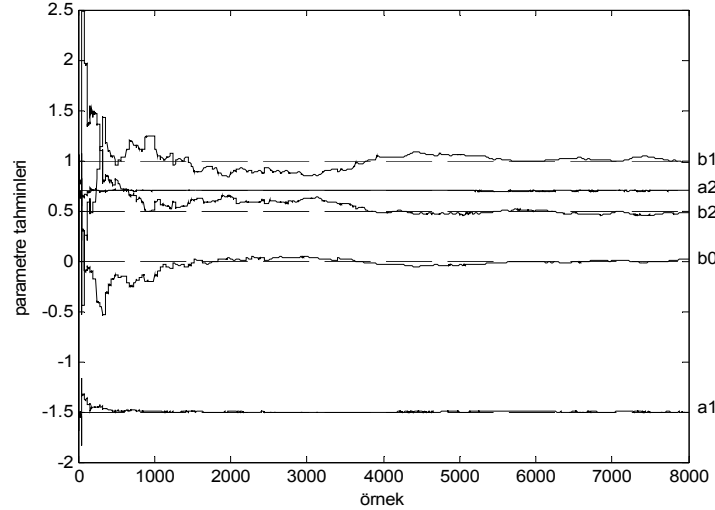
Şekil 4:
RGS algoritmasıyla hesaplanan parametre tahminleri

Daha sonra sırasıyla RGSIV ve RIV algoritmasıyla yapılan simülasyon sonucunda elde edilen parametre tahminleri Şekil 5 ve Şekil 6'da görülmektedir. Korelasyon matrisinin başlangıç değeri RGSIV algoritmasında $R(0) = 0.1I$, tersinin başlangıç değeri ise RIV algoritmasında $P(0) = 10I$ olarak alınmıştır. Elde edilen sonuçlara göre RGSIV algoritması kullanıldığında 8000 adım sonunda elde edilen parametre tahminlerinin $\hat{\theta}_{RGSIV}^T = [\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{b}_0 \hat{b}_1 \hat{b}_2] = [-1.5015 \ 0.6985 \ 0.0204 \ 0.9820 \ 0.4761]$ şeklinde (24) ile verilen doğru değerlerine yakınsadığı görülmüştür, yani yansız parametre tahminleri elde edilmiştir. RIV algoritması kullanıldığında ise yine 8000 adım sonunda elde edilen parametre tahminlerinin $\hat{\theta}_{RIV}^T = [\hat{a}_1 \hat{a}_2 \hat{b}_0 \hat{b}_1 \hat{b}_2] = [-1.5005 \ 0.6980 \ 0.0171 \ 0.9854 \ 0.4790]$ şeklinde doğru değerlere yakınsadığı görülmüştür.

Elde edilen simülasyon sonuçlarına bakıldığında önerilen RGSIV algoritmasının en küçük kareler tabanlı algoritmalara göre işlem yükünün az olmasının yanında RIV algoritmasına yakın sonuçlar verdiği görülmektedir. Algoritmanın yakınsama hızının korelasyon matrisinin özdeğer yayılımına bağlılığından dolayı, başlangıçta RIV algoritmasına göre daha yavaş yakınsamasına rağmen RIV algoritmasına oldukça yakın sonuçlar vermiştir. Sonuç olarak işlem yükü ve yakınsama hızı açısından bakıldığında RIV algoritmasına göre iyi bir alternatif olarak görülebilir.



Şekil 5:
RGSIV algoritmasıyla hesaplanan parametre tahminleri



Şekil 6:
RIV algoritmasıyla hesaplanan parametre tahminleri

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada, Gauss-Seidel algoritması ayrık zamanlı doğrusal sistemlerin transfer fonksiyonu parametrelerinin adaptif olarak güncellenmesinde kullanılmıştır ve hesaplanan parametre tahminlerinin stokastik yakınsama analizi yapılmıştır. Elde edilen sonuca göre Gauss-Seidel algoritmasıyla doğru parametre tahminlerinin elde edilebilmesi için ölçme gürültüsünün beyaz gürültü olması gerektiği gösterilmiştir. Ayrıca Gauss-Seidel algoritmasının yardımcı değişkenlerle birlikte kullanılmasıyla elde edilen RGSIV algoritması önerilmiş ve yapılan stokastik yakınsama analizine göre algoritmanın kararlı olduğu sürece normal denklemin optimum çözümünü veren yansız bir kestireç olduğu analitik olarak gösterilmiştir. Elde edilen analiz sonuçları yapılan bir simülasyon çalışmasıyla doğrulanmış ve literatürde yaygın olarak kullanılan eşdeğer RIV algoritmasıyla yakınsama hızı açısından karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlara göre önerilen RGSIV algoritmasının hem işlem yükü açısından avantajlı olduğu hem de yakınsama hızı açısından RIV algoritmasına yakın sonuçlar verdiği görülmüştür.

6. KAYNAKLAR

1. Aström, K. J. and Wittenmark B. (1995) *Adaptive Control*, 2nd Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs.
2. Bose, T. and Xu, G. F. (2002) The Euclidean direction search algorithm for adaptive filtering, *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences*, E85-A(3), 532-539.
3. Bose, T. (2004) *Digital Signal and Image Processing*, John Wiley, New Jersey.
4. Goodwin, G. C. and Sin, K. S. (1984) *Adaptive Filtering, Prediction and Control*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
5. Hatun, M. ve Koçal, O. H. (2005) Adaptif filtrelerde Gauss-Seidel algoritmasının stokastik yakınsama analizi, *Uludağ Üniversitesi Mühendislik-Mimarlık Fakültesi Dergisi*, 10(2), 87-92.
6. Haykin, S. (2002) *Adaptive Filter Theory*, 4th Ed., Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
7. Isermann, R., Lachman, K. H., Matko, D. (1992) *Adaptive Control Systems*, Prentice-Hall, New York.
8. Johansson, R. (1993) *System Modeling and Identification*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
9. Kalouptsidis, S. and Theodoridis, S. (editors) (1993) *Adaptive System Identification and Signal Processing Algorithms*, Prentice-Hall, New York.
10. Koçal, O. H. (1998) A new approach to least squares adaptive filtering, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, Monterey, California, 261-264.
11. Landau, I. D., Lozano, R. M'Saad, M. (1998) *Adaptive Control*, Springer-Verlag, London.
12. Ljung, L. and Söderström, T. (1983) *Theory and Practice of Recursive Identification*, The MIT Press, Cambridge.
13. Ljung, L. (1999) *System Identification: Theory for the User*, 2nd Ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

14. Ljung, L. (2006) *System Identification Toolbox User's Guide: For Use with MATLAB*, Version 6.2, The MathWorks, Inc.
15. Mabey, G.W., Gunther, J., Bose, T. (2004) An Euclidean direction based algorithm for blind source separation using a natural gradient, *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*, 5, 561-564.
16. Raol, R. J., Girija, G., Singh, J. (2004) *Modelling and Parameter Estimation of Dynamic Systems*, IEE Books, London.
17. Sinha, N. K. and Kusza, B. (1983) *Modeling and Identification of Dynamic Systems*, Van Nostrand and Reinhold, New York.
18. Söderström, T. and Stoica, P. (1981) Comparison of some instrumental variable methods: consistency and accuracy aspects, *Automatica*, 17(1), 101-115.
19. Söderström, T. and Stoica, P. (1983) *Instrumental Variable Methods for System Identification*, Springer-Verlag, Berlin.
20. Söderström, T. and Stoica, P. (1989) *System Identification*, Prentice-Hall, New York.
21. Söderström, T. and Stoica, P. (2002) Instrumental Variable Methods for System Identification, *Circuits, Systems, and Signal Processing*, 22(1), 1-9.
22. Walter, E. and Pronzato, L. (1998) *Identification of Parametric Models From Experimental Data*, Springer, Berlin.
23. Widrow, B. and Stearns, S. D. (1985) *Adaptive Signal Processing*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey.
24. Xu, G. F., Bose, T., Schroeder, J. (1998) Channel equalization using an Euclidean direction search based adaptive algorithm, *IEEE Global Telecommunication Conference*, 6, 3063-3068.
25. Xu, G. F., Bose, T., Schroeder, J. (1999) The Euclidean direction search algorithm for adaptive filtering, *IEEE International Symposium on Circuits and Systems*, 3, 146-149.
26. Xu, G. F., Bose, T., Kober, W., Thomas, J. (1999) A fast adaptive algorithm for image restoration, *IEEE Transaction on Circuits and Systems-I*, 46(1), 216-220.
27. Young, P. C. (1984) *Recursive Estimation and Time-Series Analysis: An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin.

Makale 13.02.2007 tarihinde alınmış, 14.08.2007 tarihinde kabul edilmiştir. İletişim Yazarı: M. Hatun (metinh@uludag.edu.tr).