Düzce Üniversitesi
Bilim ve Teknoloji Dergisi

Araştırma Makalesi

Sonlu Aralıkta Tanımlı Dalga Denkleminin Çözümü Üzerine[1]

Ömer YAZAR [a,*]

[a] *Matematik-Bilgisayar Bölümü, Fen Bilimleri Enstitüsü, Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Eskişehir, TÜRKİYE*
Sorumlu yazarın e-posta adresi: omeryazar33@hotmail.com
DOI: 10.29130/dubited.1015037

Öz

Dalga denklemi, uygulamalı matematik ve fizik alanlarında sık karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemlerden bir tanesidir. Dalga denklemi hiperbolik tipte ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemdir. Dalga denklemi birçok doğa olayını modellemektedir. Örneğin yerçekimi dalgaları, ses dalgaları, ışık dalgaları ve yay hareketi gibi olaylar dalga denklemi ile ifade edilebilir. Bu çalışmada iki başlangıç koşuluna ek olarak iki adet karışık tipte sınır koşuluyla tanımlanmış potansiyel içeren dalga denkleminin sonlu aralıkta çözümün olabilmesi için gereken koşullar incelenmiştir. Fourier yöntemi yerine d'Alambert formülüne benzer bir integral denklemi elde edilip bu denklemin çözülebilmesi için gereken şartlar incelenmiş ve gösterilmiştir. Son olarak bu integral denklemi sonucu elde edilen çözüm ile Fourier yöntemiyle elde edilen çözüm karşılaştırılmıştır.

Anahtar Kelimeler: *Dalga denklemi, d'Alembert formülü, Fourier yöntemi.*

On From Solution of the Wave Equation Defined on the Finite Interval

Abstract

The wave equation is one of the partial differential equations frequently encountered in applied mathematics and physics. The wave equation is a second-order partial differential equation of the hyperbolic type. The wave equation models many natural phenomena. For example, phenomena such as gravitational waves, sound waves, light waves, and spring motion can be expressed by the wave equation.In this study, the conditions that are necessary to be solution for the wave equation in the finite interval which contains potential defined with mixed type boundary conditions in addition to two initial conditions are investigated. Instead of Fourier's method, an integral equation similar to d'Alembert's formula is obtained and the conditions required to solve this equation are examined and shown. In the end, the solution obtained as a result of this integral equation and the solution obtained with Fourier's method is compared

Keywords: *Waveequation, d'Alembertformula, Fourier'smethod.*

[1] ICAIAME 2021 konferansında sunulmuş olup, özet metin olarak basılmıştır.
Geliş: 26/10/2021, Düzeltme:21/12/2013, Kabul: 25/12/2021

I. GİRİŞ

Dalga denklemi, uygulamalı matematik ve fizik alanlarında sık karşılaşılan kısmi diferansiyel denklemlerden bir tanesidir. Dalga denklemi hiperbolik tipte ikinci mertebeden bir kısmi diferansiyel denklemdir. Dalga denklemi birçok doğa olayını modellemektedir. Örneğin yerçekimi dalgaları, ses dalgaları, ışık dalgaları ve hatta yay hareketi gibi olaylar dalga denklemi ile ifade edilebilir. Burada dalganın tipine ve ortama bağlı olarak "c" ışık hızı, ses hızı veya dalganın yayılma hızı gibi farklı kavramlara karşılık gelmektedir.
Bir boyutlu homojen olmayan dalga denklemi aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır [1,2,3].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{1}$$

$$u(x,0) = f(x) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \tag{3}$$

(2) ve (3) koşulları başlangıç koşulları olarak adlandırılır. Burada fiziksel olarak *u(x,t)* x noktasında t anındaki konumunu belirtir. *f(x)* başlangıç anındaki konumunu ve *g(x)* ise başlangıçtaki hızını temsil eder. Problem sonlu aralıkta tanımlandığında iki başlangıç koşuluna ek olarak aşağıdaki gibi iki adet karışık tipte sınır koşulu verilebilir. [4, 5].

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) - hu(0,t) = \varphi(t) \tag{6}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) + Hu(\pi,t) = \psi(t) \tag{7}$$

Fiziksel olarak homojen olmayan kısım $F(x,t)$ dışarıdan yapılan fiziksel bir kuvvet etkisini temsil etmektedir. Bu çalışmada homojen olmayan dalga denkleminin bir formu olan

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u \tag{8}$$

denkleminin sonlu aralıkta çözümü incelenecektir. Sonlu aralıkta tanımlı problem incelenirken problemin tanımlı olduğu bölge genişletilecektir. Bu genişleme tanım aralığının hem soluna hem de sağına doğru olacaktır. Aynı şekilde denkleminin çözümünün olması için gereken koşullar incelenecektir. Sonlu aralıkta problemin çözümü Fourier yöntemi ile verilmektedir. Bu yöntem ilk olarak d'Alembert tarafından dalga denklemini çözmek için önerilmiştir. Daha sonra Fourier tarafından geliştirilmiştir. Ostrogradski tarafından ise en genel durum için genelleştirilmiştir. Bu yöntem sadece dalga denkleminin çözümünde değil ısı ve laplace denklemi gibi kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde de kullanılmaktadır [2,3,4,6,7]. Fourier yöntemi sonucunda çözüm bir sonsuz toplam serisi şeklinde elde edilmektedir. Homogen olmayan durumda ise ele alınan kısmi diferansiyel denklem bir Sturm-Liouville problemine dönüşmektedir [5]. Sturm-Liouville problemi çok çalışılan bir konu olduğundan sonlu aralıkta homogen olmayan problemin çözümünde çoğunlukla Fourier yöntemi tercih edilmektedir. Sonlu aralık için d'Alambert formülü tipi çözümler tercih edilmemektedir. Cattaneo ve Fontana sonlu ağırlıklı şebekelerde tanımlı dalga denklemi problemi için d'Alembert tipi bir çözüm elde etmişlerdir [8]. Akça ve Resulov hazırladıkları yüksek lisans tezinde, homogen olan dalga denklemi için karakteristik denklemin köklerine bağlı olarak d'Alembert tipi ifadeler etmişlerdir [9].

II. BULGULAR VE TARTIŞMA

A. SONLU BİR ARALIKTA KARIŞIK PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde sınırlı bir aralıkta bir boyutlu dalga denklemi için karışık sınır değer problemi üzerinde duracağız. Genelliği bozmadan aralığı $[0,\pi]$ olarak alabiliriz.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u \tag{9}$$

$$u(x,0)=f(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)-hu(0,t)=\varphi(t) \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t)+Hu(\pi,t)=\psi(t) \tag{12}$$

Fonksiyonun özfonksiyonları cinsinden genişlemesine başvurmadan genişleme methoduyla (9)-(12) probleminin çözülebileceği gösterilecektir.Genişleme $x=0$ noktasının solunda ve $x=\pi$ noktasının sağında gerçekleştirilecektir.

$q(x)$ fonksiyonu $[0,\pi]$ aralığında sürekli olsun. Sürekliliği bozulmayacak şekilde $q(x)$ tüm reel eksene genişletilir ve (9)-(12) probleminin çözümünü aşağıdaki formda aranır.

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+t)+f(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} w(x,t,s)f(s)ds \tag{13}$$

Burada $f(t)$ fonksiyonu (11) –(12) sınır koşulları kullanılarak $[0,\pi]$ aralığının dışına genişletilmelidir. İlk olarak $\varphi(t)$ ve $\psi(t)$ fonksiyonlarının sağlaması gereken koşulların belirlenmesi gerekir.

(11) koşulundan

$$\varphi(+0)=f'(+0)-hf(+0) \tag{14}$$

(11) koşulundan ve (10) nun ikinci koşulundan

$$\varphi'(+0)=0 \tag{15}$$

Açık bir şekilde (12) koşulundan ve (10) nun ikinci koşulundan

$$\psi(+0) = f^{'}(\pi - 0) + Hf(\pi - 0) \tag{16}$$

$$\psi^{'}(+0) = 0 \tag{17}$$

(11) sınır koşulunu kullanarak $f(t)$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığından $(-\pi,0)$ aralığına genişletilir. $f(t), \varphi(t) \in C^2(0,\pi)$ olduğunu varsayalım. $f(t)$ fonksiyonunun $C^2(-\pi,\pi)$ sınıfına ait olacak şekilde genişlemesinin olması için gerekli ve yeterli şartın (14) ve (15) koşullarını sağlamasıdır. $f(t)$ fonksiyonu $(\pi,2\pi)$ aralığında genişletmek için (12) sınır koşulu kullanılır ve yukarıda görüldüğü gibi (16) ve (17) koşulları elde edilir. $f(t)$ fonksiyonunun $(\pi,2\pi)$ aralığına genişletildikten sonra $C^2(0,2\pi)$ sınıfına ait olması için (16) ve (17) koşulları gerekli olduğu kadar aynı zamanda yeterlidir.

(13) ifadesi (12) sınır koşulunda yazılırsa aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$\begin{aligned} & f^{'}(\pi+t) + f^{'}(\pi-t) + f(\pi+t)w(\pi,t,\pi+t) - w(\pi,t,\pi-t)f(\pi-t) \\ & + \int_{\pi-t}^{\pi+t} w_x(\pi,t,s)f(s)ds + H\left[f(\pi+t) + f(\pi-t) + \int_{\pi-t}^{\pi+t} w(\pi,t,s)f(s)ds \right] \\ & = 2\psi(t) \end{aligned} \tag{18}$$

$f(\pi+t)$ $(0 \le t \le \pi)$ fonksiyonunu belirlemek için bir integral-diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem bir kere integre edilirse, o zaman $f(\pi+t)$ için Volterra tipi bir integral denklemi elde edilir. (18) i yeniden yazıp İntegralin sol tarafında değişken değişimi yaparsak,

$$f(\pi+t) - f(\pi+0) + \int_0^t \left[\underbrace{H + w(\pi,s,\pi+s) + \int_0^t K_1(t,s)dt}_{K(t,s)} \right] f(\pi+s)ds \tag{19}$$

Şimdi şu integral denklemi düşünelim.

$$f(\pi+t) + \int_0^t K(t,s)f(\pi+s)ds = g(t) + C \tag{20}$$

C keyfi bir sabittir. (20) integral denkleminin her keyfi C için bir çözümü aynı şekilde (19) integral-diferansiyel denkleminde bir çözümüdür. Dolayısı ile $C = f(\pi-0)$ için (20) denkleminin bir çözümü vardır. Bu aynı zamanda (19) denkleminin de bir çözümüdür. (20) de $t=0$ ve $C = f(\pi-0)$ yazılırsa

$$f(\pi+0) = f(\pi-0) \tag{21}$$

elde edilir. Yani $f(t)$ genişletilmiş fonksiyonu $t=\pi$ noktasında süreklidir. (19) da $t=0$ yazılırsa ve (16), (21) den

$$f'(\pi+0)=f'(\pi-0) \tag{22}$$

elde edilir. Yani $f(t)$ fonksiyonunun birinci türevi $t=\pi$ noktasında süreklidir. Son olarak $f(t)$ fonksiyonunun ikinci türevini incelemek için (19) denklemi t'ye göre türetilirse $t=0$ yazılırsa ve (17), (12) ve (22) den

$$f''(\pi+0)-f''(\pi-0)=f(\pi)\left[\frac{dw(\pi,t,\pi-t)}{dt}-\frac{dw(\pi,t,\pi+t)}{dt}\right]_{t=0} \tag{23}$$

(23) ifadesinden fonksiyonun ikinci türevi $t=\pi$ noktasında süreklidir.

$$f''(\pi+0)=f''(\pi-0)$$

$f(t)$ fonksiyonu $(0,\pi)$ aralığından $(-\pi,0)$ ve $(\pi,2\pi)$ aralıklarına genişletilebilir. Bu genişleme $C^2(-\pi,2\pi)$ sınıfına aittir. (20) integral denklemi $f(t)$ fonksiyonunun tüm eksene genişletilmesine olanak sağlar. Örneğin $f(t)$ fonksiyonunun $(-2\pi,-\pi)$ aralığına genişlemesi için t değerinin $(0,2\pi)$ aralığında değiştiği kabul edilirse, Volterra denkleminin çözümü istenildiği kadar diferansiyellenebilir olduğu için genişleme $C^2(-2\pi,0)$ sınıfındadır. Sonuç olarak genişleme $C^2(-2\pi,2\pi)$ sınıfındadır. Bu şekilde adım adım ilerleyerek tüm eksene genişletilebilir ve bu genişleme $C^2(-\infty,\infty)$ sınıfındadır.

B. DALGA DENKLEMİNEFOURİER AYRIŞIM METODUNUN UYGULANMASI

$$u_{xx}-u_{tt}=-q(x)u \tag{24}$$

$$u(x,0)=f(x) \tag{25}$$

$$u(x,0)=0 \tag{26}$$

$$\left[u_x-hu\right]_{x=0}=0 \tag{27}$$

$$\left[u_x+Hu\right]_{x=1}=0 \tag{28}$$

Bölümde ispatlandığı gibi, eğer $f(x)$ sürekli ikinci türeve sahip ve şu koşulları

$$f'(+0)-hf(+0)=0, \tag{29}$$

$$f'(1-0)-hf(1-0)=0, \tag{30}$$

sağlıyor ise yukarıdaki karışık sınır değer probleminin her t>0 için çözümü vardır. Bu çözümü $u_0(x,t)$ ile işaretleyelim. Belirli bir t değeri için $u_0(x,t)$ sınır koşullarını sağlar ve sürekli ikinci türeve sahiptir. Dolayısı ile $u_0(x,t)$ belirli t değerlerinde

$$y'' + [\lambda - q(x)]\,y = 0 \tag{31}$$

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(1) + Hy(1) = 0 \tag{32}$$

Sturm-Liouville operatörünün öz fonksiyonlarına göre mutlak ve düzgün yakınsak seri açılımına sahiptir. Yani

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t)\varphi_n(x) \tag{33}$$

$$c_n(t) = \int_0^1 u_0(x,t)\varphi_n(x)dx \tag{34}$$

ve $\varphi_n(x)$ (31) ,(32) probleminin öz fonksiyonlarıdır. $c_n(t)$ katsayılarını belirlemek için öncelikle $c_n(0)$ ve $c_n'(0)$ değerleri belirlenecektir. Bunun için(25) ve (26) başlangıç koşulları kullanılacaktır. (34) ifadesinde t=0 yazılırsa ve (25) dikkate alınırsa

$$c_n(0) = \int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx = a_n \tag{35}$$

elde edilir. (34) ifadesi t değişkenine göre türetilir ve $t = 0$ yazılırsa

$$c_n'(0) = \int_0^1 \frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}\varphi_n(x)dx = 0 \tag{36}$$

elde edilir. Tekrar (34) ifadesinin t değişkenine göre ikinci türevini aldığımızda ve ilk integrale iki kere kısmi integrasyon uygulanırsa

$$c_n''(t) = \int_0^1 u_0(x,t)\left[-\lambda_n\varphi_n(x)\right]dx = -\lambda_n c_n(t) \tag{37}$$

eldedilir. Dolayısı ile $c_n(t)$ nin belirlenmesi için şu Cauchy problemi elde edilir.

$$c_n''(t)+\lambda_n c_n(t)=0, \qquad c_n(0)=a_{n,} \qquad c_n'(0)=0\,.$$

Bu problemin çözümü

$$c_n(t)=a_n\cos\sqrt{\lambda_n}t \tag{38}$$

şeklindedir. Bu ifade(33) de yerine yazılırsa

$$u_0(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\sqrt{\lambda_n}t\varphi_n(x) \tag{39}$$

elde edilir. Eğer $f''(x)$ Lipschitz koşulunu $[0,1]$ aralığında $\alpha>0$ üstel değeri için sağlıyorsa, (39) serisi x değişkenine göre iki kere türetilebilir. Yani

$$\frac{\partial u_0}{\partial x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\cos\sqrt{\lambda_n}t\varphi_n''(x) \tag{40}$$

serisi düzgün yakınsaktır. Şimdi (39) ifadesinin t değişkenine göre türevinden elde edilen serinin mutlak yakınsaklığını göstereceğiz. α_n ile

$$\alpha_n=\int_0^1\left[f''(x)-q(x)f(x)\right]\varphi_n(x)dx$$

integralini işaretleyelim. Bu ifadeye iki kere kısmi integrasyon uygulanırsa, (29), (30) ve (32) göz önüne alındığında

$$\alpha_n=-\lambda_n\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx$$ elde edilir. Buradan da
$$=-\lambda_n a_n$$

$$a_n=\frac{-\alpha_n}{\lambda_n} \tag{41}$$

bulunur. (39)serisinin t değişkenine göre türevi alınırsa

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = -\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sqrt{\lambda_n} \sin \sqrt{\lambda_n} t . \varphi_n(x) \tag{42}$$

(41)ve Cauchy-Bunjakovski eşitsizliği kullanılarak $f''(x) - q(x) f(x) \in L^2[0,1]$ ve $\lambda_n = (n\pi)^2 + O(1/n)$ göz önüne alındığında

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sqrt{\lambda_n} a_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\alpha_n}{\sqrt{\lambda_n}} \right| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \tag{43}$$

elde edilir. Buradan (42) serisinin mutlak yakınsak olduğu görülür. Şimdi t'ye göre ikinci türevin yakınsaklığını inceleyelim. (33) ve (40) serilerinin yakınsaklığından

$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n \cos \sqrt{\lambda_n} t . \varphi_n(x)$ serisinin yakınsaklığı elde edilir. Şimdi

$$u(x,0) = 0 \quad u_t^{'}(x,0) = f(x) \tag{44}$$

olduğu durumu düşünelim. (24), (44), (27), (28) probleminin çözümünü $u_1(x,t)$ ile işaretlendirelim.

$$u_1(x,t) = \int_0^t u_0(x,\tau) d\tau \quad u_1(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(t) \varphi_n(x), \qquad \mathrm{d}_n(t) = \int_0^1 u_1(x,t) \varphi_n(x) dx$$

yazılırsa d_n için aşağıdaki Cauchy problemini elde ederiz.

$d_n''(t) + d_n(t) = 0 \;\; d_n(0) = 0 \;\; d_n'(0) = a_n = \int_0^1 f(x) \varphi_n(x) dx \;\; d_n(t) = \frac{a_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin \sqrt{\lambda_n} t$ elde edilir.

C. ÖRNEKLER

C.1. Örnek

D'Alembert formülü ile değişkenlere ayırma yöntemi arasındaki ilişki: Seri çözümünün D'Alembert formülü ile gösterimi

$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \left[\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) \right]$ Trigonometrik özdeşliğinden yararlanarak

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{an\pi}{2} t \sin \frac{n\pi}{2} x =$$

$$\frac{1}{2} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi(x-at)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{\pi^2 n^2} \sin \frac{n\pi}{2} \right) \sin \frac{n\pi(x+at)}{2} \right]$$

olarak yazalım. İlk başta tanımladığımız φ(x) fonksiyonunun (-∞,∞) aralığına $2l$ devirli tek fonksiyon olarak uzantısı söz konusu olduğundan eşitliğin sağ tarafının

$$\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]$$

toplamına eşit olduğunu görürüz. Bu ise problemin D’Alembert yöntemiyle elde edilen çözümüdür.

C.2. Örnek

D’Alembert formülü ile değişkenlere ayırma yöntemi arasındaki ilişki: D’Alembert formülünden seri çözümünün elde edilmesi

Yukarıdaki örnekte seri çözümünden yola çıkarak $\psi(x)\equiv 0$ durumu için seri çözümünün D’Alembert formülü ile gösterimini verdik. Şimdi de $\psi(x)\neq 0$ durumunda D’Alembert formülünden yola çıkarak seri çözümünü elde edelim: D’Alembert formülünden yararlanmamız için hiperbolik problemi $(-\infty,\infty)\,\mathrm{x}(0,\infty)$ bölgesinde incelememiz gerekir. Fakat seri çözümünde elde ettiğimiz problemin $\varphi(x)\in c^2\left[0,l\right]$ ve $\psi(x)\in \mathrm{c}^1\left[0,l\right]$ giriş verileri yalnızca $(0,l)$ aralığında tanımlanmıştır. O halde bu fonksiyonları bir şekilde $(-\infty,\infty)$ aralığına devam ettirmemiz gerekir. $(0,l)$ aralığında verilmiş $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının $(-l,0)$ aralığına uzantısını tek fonksiyonlar olarak tanımlayalım:

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), x\in\left[0,l\right)\\ -\varphi(-x), \mathrm{x}\in\left(-1,0\right)\end{cases};\tilde{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), \mathrm{x}\in\left[0,1\right)\\ -\psi(-x), \mathrm{x}\in\left(-1,0\right)\end{cases}$$

Daha sonra da bunların 2l devirli fonksiyonlar olarak, $(-\infty,\infty)$ aralığına devamını tanımlayalım:

$$\begin{cases}\tilde{\varphi}(x)=\tilde{\varphi}(x+2l), x\in(-\infty,\infty)\\ \tilde{\varphi}(x)\equiv\varphi(x), x\in\left(0,1\right)\end{cases},\begin{cases}\tilde{\psi}(x)=\tilde{\psi}(x+2l), x\in\left(-\infty,\infty\right)\\ \psi(x)\equiv\tilde{\psi}(\mathrm{x}), \mathrm{x}\in\left(0,1\right)\end{cases}$$

$(-\infty,\infty)$ aralığında tanımlanmış $\tilde{\varphi}(x)$ ve $\tilde{\psi}(x)$ cauchy verilerinin belirlediği

hiperbolik probleminin D’Alembert yöntemiyle çözümü $(x,t)\in(-\infty,\infty)x(0,\infty)$ için

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(x-at)+\tilde{\varphi}(x+at)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(\xi)d\xi$$

fonksiyonu ile verilir. $\tilde{\varphi}(x)$ ve $\tilde{\psi}(x)$ fonksiyonları tek fonksiyonlar olduğundan dolayı

$$v(0,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(-at)+\tilde{\varphi}(at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{-at}^{at}\tilde{\psi}(\xi)d\xi=0$$

olur. Benzer şekilde $v(l,t)=0$ olduğunu gösterebiliriz. Gerçekten yukarıdaki denklemde $x=l$ yazarsak

$$v(l,t)=\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(l-at)+\tilde{\varphi}(l+at)\right]+\frac{1}{2}\int_{l-at}^{l+at}\tilde{\psi}(\xi)d\xi$$

olur. Burada $2l$ devirli tek fonksiyonun tanımından yararlanarak

$$\tilde{\varphi}(l-at)=-\tilde{\varphi}(-l+at)=-\tilde{\varphi}(2l-l+at)=-\tilde{\varphi}(l+at),$$

eşitliklerini yazabiliriz. Buradan $\tilde{\varphi}(l-at)+\tilde{\varphi}(l+at)=0$ sonucuna varabiliriz. $\tilde{\psi}(x)$ tek fonksiyon olduğundan sağ taraftaki integralin sıfır olduğu açıktır. $v(x,t)$ çözümü türdeş Dirichlet koşullarını da sağlıyor. O halde her iki problemin çözümünün tek olduğunu dikkate alırsak $u(x,t)\equiv \mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{t})$ sonucunu elde ederiz.Bunun da sonucu $(0,l)$ sonlu aralığında tanımlanmış problemin çözümünü $(-\infty,\infty)$ sonsuz aralığında tanımlanmış problemin çözümünden şeklen

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi,\ x\in(0,1),t>0$$

biçiminde buluruz.''şeklen '' sözünün buradaki anlamı şudur: $x\in(0,1)$ ve $t>0$ olmasına rağmen $x-at<0$ olabilir ve bu durumda problemin giriş verileri olan $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları tanımlı olmaz. Fakat burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonlarının yerine bunların Fourier serilerini yazarsak

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\left[\sin\frac{\pi n}{l}(x+at)+\sin\frac{\pi n}{l}(x-at)\right]$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}\xi\right]d\xi$$

ve sağ taraftaki birinci toplamda

$$\frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right]=\sin\alpha\cos\beta$$

formülünü dikkate alırsak bu engel ortadan kalkmış olur. Sağ taraftaki 2. toplamda da integralleme işlemi yaparsak(yakınsak serinin terimlerinin integrallenmesinden elde edilen seri de yakınsaktır) $u(x,t)$ çözümünü

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{\pi n}{l}x\cos\frac{a\pi n}{l}t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{a\pi n}\psi_n\sin\frac{\pi n}{l}x\sin\frac{a\pi n}{l}t$$

serisi şeklinde buluruz. Sağ taraftaki toplamları birleştirirsek problemin

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n \cos\frac{a\pi n}{l}t+\frac{l}{a\pi n}\psi_n \sin\frac{a\pi n}{l}t\right]\sin\frac{\pi n}{l}x$$

seri çözümünü elde ederiz.

III. SONUÇ VE ÖNERİLER

Karışık sınır koşulu (11) ve (10) verildiğinde $\varphi(+0)= f^{'}(+0)-hf(+0)$ ve $\varphi^{'}(+0)=0$ koşullarının sağlanması gerekmektedir. Böylece tüm eksene yapılan genişleme sonucunda d'Alembert formülü uygulandığında denklemin başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözüm elde edilmiş olur. Potansiyel içeren dalga denklemi sonlu aralıkta incelendiğinde (11) ve (12) karışık sınır koşulları altında çözümün elde edilebilmesi için

$$\varphi(+0)= f\,'(+0)-hf(0)$$

$$\psi(+0)= f\,'(\pi-0)+Hf(\pi-0),$$

$$\psi\,'(+0)=0$$

koşullarındaki genişlemeler sonucu d'Alembert formülü uygulanabilmektedir ve elde edilen çözümler C^2 fonksiyon sınıfına ait olmaktadır.Bu çalışmada birinci dereceden tek boyutta dalga denklemi için sınırlı aralıkta karışık problemin çözümünü ve dalga denkleminin çözümünde zaman ve konumun değişkenlerine ayrılarak (Fouriermethodu) çözülebildiğini inceleyebilirsiniz.

V. KAYNAKLAR

[1] A. Neşe Dernek, *Kısmi Türevli Denklemler ve Çözümlü Problemler*, 2. baskı, Ankara, Türkiye: Nobel Yayıncılık, 2009,böl.5.

[2] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, vol.19, Rhode Island, USA: American Mathematical Society,2010.

[3] R. McOwen, *Partial Diferential Equations Methodsand Applications*, New Jersey: Prentice Hall,1995.

[4] W.A.Strauss,*PartialDifferentialEquations*,2nd ed., New York: John Wiley& Sons,1992.

[5] B. M. Levitan ve S. Sargsjan, *Introduction to Spectral Theory: SelfadjointOrdinary Diferantial Operators*, vol. 39, Rhode Island, USA: American Matematical Society,1975.

[6] D. Zwillinger, *Handbook of DiferentialEquations*, 3rd ed , Academik Pres, Boston,USA,1997.

[7] U. T. Myint, *PartialDifferentialEquations of Mathematical Physics*, New York,USA: AmericanElseiver Publishing Company,1973.

[8] C.Cattaneoand L. Fontana,’’D'Alembertformula on finiteone-dimensionalnetworks’’, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol.284, no. 2, pp. 403-424, 2003.

[9] P. S. Akça, ‘Basamağa göre homojen hiperbolik denklem için Cauchy Probleminin d’Alembert türlü çözümü,’ Yüksek lisans tezi, Matematik Bilgisayar, Fen Bilimleri Enstitüsü, Beykent Üniversitesi, İstanbul, Türkiye, 2017.

[10] R. Bonsonand G. Costa ,*DifferentialEquations*, Ed. H.Hilmi Hacısalihoğlu, Ankara: Nobel Yayıncılık, 2013, ss. 308.