GUFBD / *GUJS* (2022) 12(2): 395-403
DOI: 10.17714/gumusfenbil.1018374 Araştırma Makalesi / *Research Article*

Geometrik hesap tarzına göre Lebesgue dizi uzaylarının bazı geometrik özellikleri

Some geometric properties of Lebesgue sequence spaces according to geometric calculation style

Birsen SAĞIR*[1,a], İrem EYÜPOĞLU[1,b]
[1]*Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, 55200, Samsun*

• Geliş tarihi / *Received*: 03.11.2021 • Düzeltilerek geliş tarihi / *Received in revised form*: 23.12.2021 • Kabul tarihi / *Accepted*: 16.01.2022

Öz
Bu çalışmada, geometrik hesap tarzına göre Lebesgue dizi uzayı tanımlandı. İhtiyaç duyulan bazı eşitsizlikler geometrik hesap tarzına göre elde edildi. Bu eşitsizlikler yardımıyla geometrik hesap tarzına göre Lebesgue dizi uzayının konvekslik, kesin konvekslik gibi bazı geometrik özellikleri incelendi.

Anahtar kelimeler: Geometrik hesap tarzı, Kesin konvekslik, Konvekslik, Lebesgue dizi uzayları, Newtonyen olmayan hesap tarzı

Abstract
In this study the Lebesgue sequence space was defined according to geometric calculation style with the help of these inequalities, some geometric properties such as convexity and striclty convexity of Lebesgue sequence space were examined according to the geometric calculation style.

Keywords*: Geometric calculation style, Striclty convexity, Convexity, Lebesgue sequence spaces, Non-Newtonian calculation style*

*a Birsen SAĞIR; bduyar@omu.edu.tr, Tel: (0533) 365 86 84, orcid.org/0000-0001-5954-2005
b orcid.org/0000-0003-3008-2249

1. Giriş
1. Introduction

Rönesans döneminde Galileo dâhil birçok bilim adamı klasik hesap tarzı dışında yeni bir hesap tarzı olan Newtonyen olmayan hesap tarzını ortaya koymuşlardır. Klasik hesap tarzındaki her bir özelliğin, Newtonyen olmayan hesap tarzında bir benzeri vardır ve bu hesap tarzında araştırılabilecek sorunlara farklı bir bakış açısı sağlayan bir yöntemdir. 1967'den 1972'ye kadar olan dönemde Grossman ve Katz, klasik, geometrik, bigeometrik ve kuadratik hesap sınıflarından oluşan Newtonyen olmayan hesap tarzını tanıtmışlardır. Daha sonraları bu kavramları Grossman genişletmiştir. Newtonyen olmayan hesap tarzı fen bilimleri, ekonomi, finans, matematik gibi birçok alanda kullanılmıştır. Çarpımsal kompleks kalkülüste türev ve uygulamaları (Bashirov & Rıza 2011), geometrik dizi uzayları (Türkmen & Başar 2012), Newtonyen olmayan dizi uzayları üzerinde çalışmalar yapılmıştır (Çakmak & Başar 2012). Newtonyen olmayan kalkülüste bazı temel topolojik özellikleri elde edilmiştir (örneğin Duyar vd., 2015; Binbaşıoğlu vd., 2015; Duyar & Oğur 2017). Newtonyen olmayan kalkülüste Lebesgue ölçüsünü (Duyar & Sağır 2017), kapalı kümelerin Newtonyen olmayan ölçüsünü (Oğur & Demir 2019) ve Newtonyen olmayan kümelerin Lebesgue anlamında ölçüsünü incelemişlerdir (Oğur & Demir 2020). $L_w^p(G)$ ağırlıklı Lebesgue uzayının bazı geometrik özelliklerini (Oğur 2018) ve Newtonyen olmayan $l_p(N)$ dizi uzayının bazı geometrik özeliklerini ele alınmıştır (Güngör 2020).

Newtonyen olmayan hesap tarzının bir alanı olan geometrik hesap tarzı Newton ve Leibniz'in klasik hesap tarzına bir alternatiftir.

$$\begin{array}{lcl} \alpha:\mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ s & \rightarrow & \alpha(s)=e^s=t \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} \alpha^{-1}:\mathbb{R}^+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ t & \rightarrow & \alpha^{-1}(t)=\ln t=s \end{array}$$

olmak üzere, α doğal logaritma üreteci kullanılarak geometrik hesap tarzı (geometrik aritmetik) elde edilir (Gurefe vd., 2016).

Tanım 1.1 : $\{e^s : s\in\mathbb{R}\}$ kümesine geometrik aritmetikteki reel sayılar kümesi denir ve $\mathbb{R}_G\big(\text{veya }\mathbb{R}(G)\big)$ ile gösterilir. $\mathbb{R}_G^+=\{s\in\mathbb{R}(G): s>1\}$ ve $\mathbb{R}_G^-=\{s\in\mathbb{R}(G): s<1\}$ sırasıyla geometrik pozitif ve negatif reel sayıların kümesidir. $\mathbb{R}_G$ üzerinde tanımlanan

$$\begin{aligned} &\oplus: \mathbb{R}_G\times\mathbb{R}_G\rightarrow\mathbb{R}_G,\\ &(s,t)\rightarrow s\oplus t=\alpha\{\alpha^{-1}(s)+\alpha^{-1}(t)\}=s.t \end{aligned}$$

toplama işlemi ve

$$\begin{aligned} &\odot: \mathbb{R}_G\times\mathbb{R}_G\rightarrow\mathbb{R}_G,\\ &(s,t)\rightarrow\ s\odot t\ =\alpha\{\alpha^{-1}(s)\times\alpha^{-1}(t)\}=s^{\ln t} \end{aligned}$$

çarpma işlemlerine göre $(\mathbb{R}(G),\oplus,\odot)$ bir cisimdir.

$$\begin{aligned} &s\oplus t=\alpha\{\alpha^{-1}(s)+\alpha^{-1}(t)\}=e^{(\ln s+\ln t)}=s.t\\ &s\ominus t=\alpha\{\alpha^{-1}(s)-\alpha^{-1}(t)\}=e^{(\ln s-\ln t)}=\frac{s}{t}, t\neq 0\\ &s\odot t=\alpha\{\alpha^{-1}(s)\times\alpha^{-1}(t)\}=e^{(\ln s\times\ln t)}=s^{\ln t}\\ &s\oslash t=\alpha\{\alpha^{-1}(s)/\alpha^{-1}(t)\}=e^{(\ln s\div\ln t)}=s^{\frac{1}{\ln t}}, t\neq 1\\ &s<t\Leftrightarrow\alpha^{-1}(s)<\alpha^{-1}(t)\Leftrightarrow\ln s<\ln t \end{aligned}$$

işlemlerine sırasıyla geometrik toplam, geometrik fark, geometrik çarpım, geometrik bölüm ve geometrik sıralama denir (Boruah, 2017).
Geometrik aritmetikteki çarpma işlemine göre aşağıdaki lemma verilmiştir.

Önerme 1.1: $a,b\in\mathbb{R}_G$ olmak üzere aşağıdaki eşitsizlikler vardır (Boruah, 2017):
$i)\ a/b\odot c/d=b/a\odot d/c$
$ii)(a/b)\odot c=(a\odot c)/(b\odot c)$
$iii)a^{-1_G}=e^{(1/\log a)}$.

Tanım 1.2: $\mathbb{R}_G$ kümesindeki bir s sayısının geometrik karesi $s^{2_G} = s \odot s$ ile, geometrik karekökü de geometrik karesi s ye eşit olan w negatif olmayan sayı yani $w = \alpha\left\{\sqrt{\alpha^{-1}(s)}\right\} = e^{\sqrt{\ln s}} = \sqrt[G]{s} \Rightarrow w^{2G} = s$ ile, p. çarpımsal üssü ve q.çarpımsal kökü sırasıyla $s^{p_G} = s^{(p-1)_G} \odot s = e^{\ln^p s} = s^{\ln^{p-1} s}$ ve $\sqrt[q]{s}^{G} = \alpha\left\{\sqrt[q]{\alpha^{-1}(s)}\right\} = e^{(\ln s)^{1/q}}$ ile tanımlanır. (Gurefe vd., 2016)

$\mathbb{R}_G$ kümesindeki bir x sayısının geometrik- mutlak değeri

$$|x|_G = \begin{cases} x, & x > 1 \\ 1, & x = 1 \\ \frac{1}{x}, & x < 1 \end{cases} \quad \text{veya} \quad e^{|y|} = |e^y|_G = \begin{cases} e^y, & e^y > e^0 = 1 \\ 1, & e^y = e^0 \\ e^{-y}, & e^y < e^0 \end{cases}$$

ile tanımlanır ve $\sqrt{x^{2_G}}^{G} = \alpha(|\alpha^{-1}(x)|) = |x|_G = e^{|\ln x|}$ ile gösterilir.

Geometrik hesap tarzına göre mutlak değerin bazı özellikleri aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 1.2 : $s, t \in \mathbb{R}_G$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler doğrudur (Boruah, 2017):

1)$|s \odot t|_G = |s|_G \odot |t|_G$
2)$|s \oplus t|_G \leq |s|_G \oplus |t|_G$
3)$|s \oslash t|_G = |s|_G \oslash |t|_G$
4)$|s \ominus t|_G \geq |s|_G \ominus |t|_G$.

Tanım 1.3: $X, \mathbb{R}_G$ geometrik reel cismi üzerinde vektör uzayı ve $C \subset X$ olsun. Her $x, y \in C$ ve $\lambda \in (1, e)$ için $\lambda \odot x \oplus (e \ominus \lambda) \odot y \in C$ ise C kümesine geometrik konveks küme denir (Güngör, 2020).

Tanım 1.4: X geometrik Banach uzayı olsun. Eğer $x, y \in S_X = \{x \in X | \|x\|_G = e\}$ ve $x \neq y$ olmak üzere $\lambda \in (1, e)$ için $\|\lambda \odot x \oplus (e \ominus \lambda) \odot y\|_G < e$ ise X kümesine geometrik kesin konveks denir (Güngör, 2020).

2. Bulgular
2. Results

$\mathbb{R}_G$ terimli tüm dizilerin kümesi $s(G) = \{s = s_n | s: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_G\}$ ile gösterilir. $\alpha = \exp$ olduğundan $s(G) = \{e^{x_n}: x_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}\}$ ile elde edilir. $l_\infty(G), c(G), c_0(G)$ ve $l_p(G)$ dizi uzayları aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\begin{aligned} l_\infty(G) &= \left\{x = (x_k) \in s(G) :\ {}_G\sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k|_G < \infty\right\} \\ &= \left\{x = (e^{x_k}): x_k \in \mathbb{R},\ e^{\sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k|} < \infty\right\} \\ c_0(G) &= \left\{x = (x_k) \in s(G):\ {}_G\lim_{k\to\infty} x_k = 1\right\} \\ &= \left\{x = (e^{x_k}): x_k \in \mathbb{R},\ e^{\lim_{k\to\infty} x_k} = e^0\right\} \\ l_p(G) &= \left\{x = (x_k) \in s(G):\ {}_G\sum_{k=1}^{n} |x_k|_G^{p_G} < \infty\right\} \\ &= \left\{x = (e^{x_k}): x_k \in \mathbb{R},\ \ e^{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty}\right\} \end{aligned}$$

Bu uzaylar geometrik aritmetiğin $\oplus$, $\odot$ işlemlerine göre birer vektör uzayıdırlar.

Tanım 2.1 : $(x_k) \in s(G)$ olmak üzere

$$ {}_G\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \alpha\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{-1}(x_k)\right\} = \alpha\{\alpha^{-1}(x_1) + \alpha^{-1}(x_2) + \cdots + \alpha^{-1}(x_k) + \cdots\}$$

$$= e^{\{\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots\}} = \prod_{k=1}^{\infty} x_k$$

toplamı geometrik hesap tarzına göre geometrik reel sayı serisi denir (Gurefe vd., 2016).

Tanım 2.2 : $\|.\|_G : X \to \mathbb{R}^+(G)$ fonksiyonu aşağıda verilen özellikleri sağlıyorsa, $(X, \|.\|_G)$ uzayına geometrik normlu uzay denir.

$(GN1)$ Her $s \in X$ için $\|s\|_G = 1 \Leftrightarrow s = \theta_G = 1$
$(GN2)$ Her $s \in X$ ve $\alpha \in \mathbb{R}(G)$ için $\|\alpha s\|_G = |\alpha|_G \odot \|s\|_G$
$(GN3)$ Her $s, t \in X$ için $\|s \oplus t\|_G \leq \|s\|_G \oplus \|t\|_G$

Teorem 2.3 (Geometrik Hesap tarzına göre $p \geq 1$ için Minkowski Eşitsizliği) : $p \geq 1$ ve

$k \in \{1,2,\dots,n\}$ için $x_k, y_k \in \mathbb{R}_G$ olsun. O zaman

$$\sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{n} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G}}^{\,G} \leq \sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{n} |x_k|_G^{p_G}}^{\,G} \oplus \sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{n} |y_k|_G^{p_G}}^{\,G}$$

dır (Gurefe vd., 2016).

İspat : $p \geq 1$ ve $k \in \{1,2,\dots,n\}$ olsun. $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x_k = e^{a_k}, y_k = e^{b_k}$ olacak şekilde $x_k, y_k \in \mathbb{R}_G$ olsun. O halde

$$\sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{n} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G}}^{\,G} = e^{\left[\ln {}_G\sum_{k=1}^{n} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{n} |x_k . y_k|^{\ln^{p-1}|x_k . y_k|}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{n} |e^{a_k}.e^{b_k}|^{\ln^{p-1}|e^{a_k}.e^{b_k}|}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{n} |e^{a_k+b_k}|^{\ln^{p-1}|e^{a_k+b_k}|}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{n} \left(e^{|a_k+b_k|}\right)^{|a_k+b_k|^{p-1}}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{n} e^{|a_k+b_k|^p}\right]^{(1/p)}}$$

$$= \mathrm{e}^{\left[\ln e^{\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\sum_{k=1}^{n} |a_k+b_k|^p\right]^{(1/p)}}$$

$$\leq e^{\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{(1/p)} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{(1/p)}} e^{\left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left(\ln\, e^{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p}\right)^{(1/p)}} e^{\left(\ln\, e^{\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p}\right)^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{n} e^{|a_k|^p}\right)^{(1/p)}} e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{n} e^{|b_k|^p}\right)^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{n} e^{|a_k| \ln^{p-1} e^{|a_k|}}\right)^{(1/p)}} e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{n} e^{|b_k| \ln^{p-1} e^{|b_k|}}\right)^{(1/p)}}$$

$$= \sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{p_G}}^{G} \oplus \sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{n} |y_k|^{p_G}}^{G}$$

elde edilir.

Teorem 2.4 (Geometrik Hesap Tarzına Göre $p \in (0,1)$ için Minkowski Eşitsizliği):

$p \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$, $x = (x_k), y = (y_k) \in s(G)$ olsun. O halde

$$\sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G}}^{G} \geq \sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_G^{p_G}}^{G} \oplus \sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|_G^{p_G}}^{G}$$

dır.

İspat : $p \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$ olsun. $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x_k = e^{a_k}, y_k = e^{b_k}$ olacak şekilde $x = (x_k), y = (y_k) \in s(G)$ olsun.

$$\sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G}}^{G} = e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} |x_k \oplus y_k|_G^{p_G}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} |x_k . y_k|_G^{p_G}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} |x_k . y_k|^{\ln^{p-1} |x_k . y_k|}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|a_k + b_k|^{\ln^{p-1} e^{|a_k + b_k|}}}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|a_k + b_k|^p}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\ln e^{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p}\right]^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left[\sum_{k=1}^{\infty} |a_k + b_k|^p\right]^{(1/p)}}$$

$$\geq e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{(1/p)} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{(1/p)}} e^{\left(\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p\right)^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left(\text{In } e^{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p}\right)^{(1/p)}} e^{\left(\text{In } e^{\sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^p}\right)^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|a_k|^p}\right)^{(1/p)}} e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|b_k|^p}\right)^{(1/p)}}$$

$$= e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|a_k| In^{p-1} e^{|a_k|}}\right)^{(1/p)}} e^{\left(\ln \prod_{k=1}^{\infty} e^{|b_k| In^{p-1} e^{|b_k|}}\right)^{(1/p)}}$$

$$= \sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|_G^{p_G}}^{\,G} \oplus \sqrt[p]{{}_G\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|_G^{p_G}}^{\,G}$$

eşitsizliği elde edilir.

Teorem 2.5: $l_p(G)$ uzayı, $\|x\|_{G_p} = \left({}_G\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\ {}_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G}$ şeklinde tanımlanan $\|.\|_G : l_p \rightarrow \mathbb{R}^+(G)$ fonksiyonu ile bir normlu uzaydır.

İspat: $x = (x_k)\,, y = (y_k) \in l_p(G),$ α ∈ $\mathbb{R}_G$ olmak üzere

$$(GN1)\ \|x\|_{G_p} = 1 \Leftrightarrow \left({}_G\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\ {}_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G} = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

$$(GN2)\ \|\alpha \odot x\|_{G_p} = \left({}_G\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha \odot x_k|\ {}_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G} = \left({}_G\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|\ {}_G^{p_G} \odot |x_k|_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G}$$
$$= |\alpha|_G \odot \|x\|_{G_p}$$

$$(GN3)\ \|x \oplus y\|_{G_p} = \left({}_G\sum_{k=1}^{\infty} |x_k \oplus y_k|\ {}_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G}$$
$$\leq \left({}_G\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|\ {}_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G} \oplus \left({}_G\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|\ {}_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G}$$
$$= \|x\|_{G_p} \oplus \|y\|_{G_p}$$

elde edilir.

Önerme 2.6:

a) $p \in (0,1)$ olsun. Eğer $a, b \geq 0$ ise

$$(a + b)^p \leq a^p + b^p \tag{1}$$

dir. Daha genel olarak $a_1, a_2, \dots, a_n$ negatif olmayan reel sayılar olmak üzere

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^p$$

dir (Yeh, 2006).

b) $p \geq 1$ olsun. Eğer $a, b > 0$ ise

$$(a + b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{2}$$

dır (Nesin, 2012).

Önerme 2.7: $0 < p < 1$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}_G$ için

$$(x \oplus y)^{p_G} \leq x^{p_G} \oplus y^{p_G} \tag{3}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $0 < p < 1$ için $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = e^a, y = e^b$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}_\mathrm{G}$ olsun. O halde (1) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(x \oplus y)^{p_G} &= (x.y)^{\ln^{p-1} x.y} \\
&= \left(e^a.e^b\right)^{\ln^{p-1} e^a.e^b} \\
&= \left(e^{a+b}\right)^{\ln^{p-1} e^{a+b}} \\
&= e^{(a+b)\ln^{p-1} e^{(a+b)}} = e^{(a+b)^p} \\
&\leq e^{a^p+b^p} = e^{a^p}.e^{b^p} \\
&= e^{a.a^{p-1}}.e^{b.b^{p-1}} = e^{a.(\ln e^a)^{p-1}}.e^{b(\ln e^b)^{p-1}} \\
&= e^{a.\ln^{p-1} e^a}.e^{b.\ln^{p-1} e^b} \\
&= x^{\ln^{p-1} x}.y^{\ln^{p-1} y} \\
&= x^{p_G}.y^{p_G} \\
&= x^{p_G} \oplus y^{p_G}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Önerme 2.8 : $p \geq 1$ olmak üzere $x, y \in \mathbb{R}_\mathrm{G}$ için

$$(x \oplus y)^{p_G} \leq (e^2)^{(p-1)_G} \odot (x^{p_G} \oplus y^{p_G}) \tag{4}$$

eşitsizliği vardır.

İspat : $p \geq 1$ için $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = e^a, y = e^b$ olacak şekilde $x, y \in \mathbb{R}_\mathrm{G}$ olsun. O halde (2) eşitsizliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
(x \oplus y)^{p_G} &= (x.y)^{\ln^{p-1} x.y} \\
&= \left(e^a.e^b\right)^{\ln^{p-1} e^a.e^b} \\
&= \left(e^{a+b}\right)^{\ln^{p-1} e^{a+b}} \\
&= e^{(a+b)\ln^{p-1} e^{(a+b)}} = e^{(a+b)^p} \\
&\leq e^{2^{(p-1)}.(a^p+b^p)} \\
&= e^{2^{(p-1)}.\ln e^{(a^p+b^p)}} \\
&= e^{2^{(p-1)}.\ln e^{a^p}.e^{b^p}} \\
&= e^{2^{(p-1)}.\ln(x^{p_G} \oplus y^{p_G})} \\
&= \left(e^{2^{(p-1)}}\right) \odot (x^{p_G} \oplus y^{p_G}) \\
&= \left(e^{2.\ln^{p-2} e^2}\right) \odot (x^{p_G} \oplus y^{p_G}) \\
&= (e^2)^{(p-1)_G} \odot (x^{p_G} \oplus y^{p_G})
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 2.9 : $0 < p < \infty$ olmak üzere $l_p(G)$ uzayı geometrik hesap tarzına göre konvekstir.

İspat : $l_p(G)$ uzayının konveks olduğunu göstermek için

$x, y \in l_p(G)$ ve $t \in (0,1)$ için $t \odot x \oplus (1 \ominus t) \odot y \in l_p(G)$

olduğu gösterilmelidir. İki durumda incelenmiştir.

1. durum : $0 < p < 1$ için (3) eşitsizliği kullanılırsa

$$\sum_{Gk=1}^{\infty}|t\odot x_k\oplus(1\ominus t)\odot y_k|_G^{p_G}\leq\sum_{Gk=1}^{\infty}|t\odot x_k|_G^{p_G}\oplus\sum_{Gk=1}^{\infty}|(1\ominus t)\odot y_k|_G^{p_G}$$
$$=|t|_G^{p_G}\odot\sum_{Gk=1}^{\infty}|x_k|_G^{p_G}\oplus|1\ominus t|_G^{p_G}\odot\sum_{Gk=1}^{\infty}|y_k|_G^{p_G}$$
$$<\infty$$

elde edilir.

2. durum : $p\geq 1$ için (4) eşitsizliği kullanılırsa

$$\sum_{Gk=1}^{\infty}|t\odot x_k\oplus(1\ominus t)\odot y_k|_G^{p_G}\leq\sum_{Gk=1}^{\infty}\left((e^2)^{(p-1)_G}\odot\left(|t\odot x_k|_G^{p_G}\oplus|(1\ominus t)\odot y_k|_G^{p_G}\right)\right)$$
$$=(e^2)^{(p-1)_G}\odot\left(|t|_G^{p_G}\odot\sum_{Gk=1}^{\infty}|x_k|_G^{p_G}\oplus|1\ominus t|_G^{p_G}\odot\sum_{Gk=1}^{\infty}|y_k|_G^{p_G}\right)$$
$$<\infty$$

elde edilir.

Teorem 2.10 : $1<p<\infty$ olmak üzere $l_p(G)$ uzayı geometrik kesin konvekstir.

İspat: $x,y\in l_p(G)$, $x\neq y$ ve $\|x\|_{G_p}=\|y\|_{G_p}=1$ olsun. O halde $t\in(0,1)$ için $\|t\odot x\oplus(1\ominus t)\odot y\|_{G_p}<1$
olduğu gösterilmelidir.

$$\|t\odot x\oplus(1\ominus t)\odot y\|_{G_p}=\left(\sum_{Gk=1}^{\infty}|t\odot x_k\oplus(1\ominus t)\odot y_k|_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G}$$
$$<\left(\sum_{Gk=1}^{\infty}|t\odot x_k|_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G}\oplus\left(\sum_{Gk=1}^{\infty}|(1\ominus t)\odot y_k|_G^{p_G}\right)^{(1/p)_G}$$
$$=|t|_G\odot\|x\|_{G_p}^{p_G}\oplus|1\ominus t|_G\odot\|y\|_{G_p}^{p_G}$$
$$=1$$

elde edilir.

3. Sonuçlar
3. Conclusions

Bu çalışmada, geometrik hesap tarzına göre $l_p(G)$ uzayı tanıtılıp normlu uzay olduğu gösterilmiştir. Elde edilen gerekli eşitsizlikler yardımıyla $l_p(G)$ uzayının konveks ve kesin konveks olduğu elde edilmiştir.

Teşekkür / Katkı belirtme
Acknowledgement

Bu çalışma, PYO.FEN.1904.17.014 nolu Bilimsel Araştırma Projesi olarak Ondokuz Mayıs Üniversitesi tarafından desteklenmiştir. Makalenin inceleme ve değerlendirme aşamasında yapmış oldukları katkılardan dolayı derginin editör ve hakemlerine teşekkür ediyorum.

Yazar katkısı
Author contribution

Tüm yazarlar makalenin tüm bölümlerine katkıda bulunmuştur.

Etik beyanı
Declaration of ethical code

Bu çalışmada kullanılan materyal ve yöntemlerin etik kurul izni ve / veya yasal-özel izin gerektirmediğini beyan etmektedir.

Çıkar çatışması beyanı
Conflicts of interest

Yazarlar herhangi bir çıkar çatışması olmadığını beyan eder.

Kaynaklar
References

Bashirov, A.E., & Rıza, M. (2011). On complex multiplicative differentiation. *TWMS Journal of Applied and Engineering Mathematics, 1(1),* 75-85.

Binbaşıoğlu, D., Demiriz, S. & Türkoğlu, D. (2015). Fixed points of non-newtonian contraction mappings on non-newtonian metric spaces. *Journal of Fixed Point Theory and Applications, 17(5),* 1-12. https://doi.org/10.1007/s11784-015-0271-y.

Boruah, K. (2017). On some basic properties of geometric real sequences. *International Journal of Mathematics Trends and Tecnology*. *46(2),* 111-117. https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V46P519.

Çakmak, A.F., & Başar, F. (2012). Some new results on sequence spaces with respect to non-newtonian calculus. *Journal of Inequalities and Applications*. *228,* 1-12. https://doi.org/10.1186/1029-242X-2012-228.

Duyar, C., Sağır, B. & Oğur, O. (2015). Some basic topological properties on non-newtonian real line. *British Journal of Mathematics and Computer Science*. *9(4),* 295-302. https://doi.org/10.9734/BJMCS/2015/17941.

Duyar, C., & Sağır, B. (2017). Non-Newtonian comment of Lebesgue measure in real numbers. *Journal of Mathematics,* Article ID 6507013, 1-4. https://doi.org/10.1155/2017/6507013.

Duyar, C., & Oğur, O. (2017). A note on topology of non-Newtonian real numbers. *Journal of Mathematics, 13(6),* 11-14.

Grossmann, M., Katz, R. (1972). *Non-newtonian calculus*. (First edition). Massachussests: Lee Press.

Güngör, N. (2020). Some geometric properties of the non-Newtonian sequence spaces $l_p(N)$. *Mathematica Slovaca. 70(3)* ,689-696. https://doi.org/10.1515/ms-2017-0382.

Gurefe, Y., Kadak, U., Mısırlı, E., & Kurdi, A. (2016). A new look at the classical sequence spaces by using multiplicative calculus. *U.P.B. Bull. Series A. 78*(2), 9-20.

Nesin, A. (2012). *Analiz 2*. Türkiye: Nesin Yayıncılık.

Oğur, O. (2018). Some geometric properties of weighted Lebesgue spaces $L_w^p(G)$.*Facta Universitatis (NISˇ) Series Mathematics and Informatics, 33*(4), 523–530.

Oğur, O., & Demir, S. (2019). On non-Newtonian measure for $\alpha -$ closed sets. *New Trends in Mathematical Sciences, 7*(2), 202-207. https://doi.org/10.20852/ntmsci.2019.358.

Oğur, O., & Demir, S. (2020). Newtonyen olmayan Lebesgue ölçüsü. *Gümüşhane Üniversitesi Fen Bilimleri Dergisi, 10*(1), 134-139. https://doi.org/10.17714/gumusfenbil.598468.

Türkmen, C., & Başar, F. (2012). Some basic results on the sets of sequences with geometric calculus. *Commun Faculty Scientific University Ankara Series*. *61*(2), 17-34. https://doi.org/10.1501/commual-000000677.

Yeh, J. (2006). *Reel analysis: Theory of measure and integration* (Second edition). Singapore: World Scientific Publishing.