



Research Article / Araştırma Makalesi
GEOMETRICALLY NONLINEAR ANALYSIS of LAMINATED COMPOSITE
MINDLIN PLATE WITH MIXED FINITE ELEMENT METHOD

Akif KUTLU*, **Mehmet H. OMURTAG**

Istanbul Teknik Üniversitesi, İnşaat Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Maslak-İSTANBUL

Received/Geliş: 05.12.2012 Accepted/Kabul: 21.02.2013

ABSTRACT

The geometric nonlinear behavior of laminated composite plates in the scope of large deflection under static loading is analyzed by the method of mixed finite elements. Field equations are derived from the conjunction of Mindlin plate theory and von Kármán strain definitions. Nonlinear finite element equations are obtained through the Hellinger-Reissner principle. Later on incremental formulation is adopted to obtain the linearized form of finite element equations which are suitable for a mixed finite element solution. In the procedure of finite element solution Newton-Raphson method is used to obtain numerical results. The formulation which is presented for analysis of moderately thick plates can automatically overcome the shear locking problem which is faced in thin plate solution, in addition; the method provides the possibility of obtaining stress resultants directly from numerical procedure.

Keywords: Large deflection, Mindlin plate, laminated composite, mixed finite element.

TABAKALI KOMPOZİT MINDLIN PLAĞININ KARIŞIK SONLU ELEMAN YÖNTEMİ İLE GEOMETRİK DOĞRUSAL OLMAYAN ANALİZİ

ÖZET

Tabakalı kompozit plakların statik yükleme altında geometrik doğrusal olmayan davranışı büyük çökme tanımı kapsamında karışık sonlu eleman yöntemiyle analiz edilmiştir. Mindlin plak kuramı ve von Kármán şekil değiştirmeleri dikkate alınarak bünye denklemleri oluşturulmuştur ve Hellinger-Reissner prensibinden yararlanılarak doğrusal olmayan bir fonksiyonel elde edilmiştir. Daha sonra artımsal formülasyona göre fonksiyonel doğrusallaştırılmış buradan karışık sonlu eleman yapısına uygun eleman denklemleri elde edilmiştir. Sonlu eleman çözümüne geçildiğinde ise, Newton-Raphson ardışık yaklaşım tekniği ile sayısal çözüm elde edilmiştir. Nispeten kalın plaklar için sunulan formülasyon, ince plak çözümlerinde karşılaşılan kilitlenme problemini kendiliğinden aşmakta, yer değiştirme tipi büyüklüklerin yanında kuvvet tipi büyüklüklerin de doğrudan elde edilmesine olanak vermektedir.

Anahtar Sözcükler: Büyük çökme, Mindlin plağı, tabakalı kompozit, karışık sonlu eleman.

1. GİRİŞ

Kompozit malzemelerden üretilmiş taşıyıcı sistemler, yüksek dayanıma sahip olmaları ve düşük ağırlıkları ile birçok mühendislik yapısında tercih edilmektedir. Bunlar içerisinde kompozit plak taşıyıcı sistemler gemi, uçak, inşaat ve birçok mühendislik uygulamasında sıklıkla kullanılırlar.

*Corresponding Author/Sorumlu Yazar: e-mail/e-ileti: kutluak@itu.edu.tr, tel: (212) 285 60 10

Narin yapılarla kullanılması sıklıkla tercih edilen tabakalı kompozit plaklar bu özellikleri sebebiyle statik yüklenme altında dahi nispeten büyük yer değiştirmeye maruz kalabilmektedir. Dolayısıyla sağlıklı bir mühendislik tasarımının gerçekleştirilmesi geometrik doğrusal olmayan bu davranışın da göz önüne alınmasını gerekli kılar. Tabakalı kompozit plakların nispeten büyük yer değiştirme problemi literatürde oldukça geniş yer kaplar. Burada belli başlı çalışmalardan söz edilecektir. Plakların geometrik doğrusal olmayan davranışıyla ilgili genel ve ayrıntılı kuramsal açıklama yanında farklı problemleri kapsayan parametrik sayısal uygulamalar Chia [1] nın çalışmasında bulunabilir. Tabakalı kompozit plakların statik büyük çökme, geometrik doğrusal olmayan dinamik ve burkulma ötesi davranışlarının analitik çözümleri hakkında bir derleme [2] de sunulmuştur. Argyris ve Tenek [3] doğal mod yöntemini kullanarak tabakalı kompozit plakların geometrik doğrusal olan ve olmayan davranışını incelemiştir. Reddy ve Chao [4] Mindlin kuramına dayanarak yer değiştirme tabanlı bir sonlu eleman geliştirmiş ve çeşitli sınır koşulları, tabakalanma şekli ve yüklenme durumları için problemi incelemiştir. Tanrıöver ve Şenocak [5] klasik plak teorisi ve analitik yaklaşımla gerektiği yerde Galerkin yöntemini kullanarak çok çeşitli sınır koşulları için simetrik olması gerekmeyecek şekilde tabakalanmış plakları nispeten büyük yer değiştirme kapsamında incelemiştir. Shufrin ve diğerleri [6] düzlem içi ve dışı genel mesnetlenmiş ve düzlem dışı genel yüklenme etkisindeki ince tabakalı plakların büyük çökme analizi için yarı-analitik bir çözüm önermişlerdir. Literatürdeki çalışmalar incelendiğinde analitik ve sayısal birçok çözüm yanında sonlu elemanlar yönteminin oldukça geniş bir alan kapladığı görülmektedir. Karışık sonlu elemanlar yöntemi yer değiştirme tabanlı sonlu elemanlardan farklı olarak denge denklemlerinin yanı sıra bünye bağıntılarının da zayıflatılmış formda sağlatılması esasına dayanmaktadır. Elde edilen denklemler indirgeme yöntemiyle tekrar bir yer değiştirme tipinde formülasyon gibi ele alınabileceği gibi bu çalışmada sunulduğu üzere yer değiştirme yanında diğer alan değişkenleri de çözüm boyunca bilinmeyen olarak tutulabilirler. Bahsedilen yaklaşıma örnek olarak Aksoylar ve diğerleri [7] verilebilir. Burada klasik plak teorisi ve von Kármán doğrusal olmayan şekil değiştirmeleri kullanılarak tabakalı kompozit ve fonksiyonel derecelendirilmiş plakların dinamik yüklenme altındaki davranışı Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak incelenmiştir. Yine yakın zamanda yazarlar Kutlu ve Omurtag [8]'de elastik zeminle etkileşim halindeki izotrop Mindlin plağının statik yüklenme altındaki büyük çökme davranışını Hellinger-Reissner prensibini kullanarak incelemiştir.

Bu çalışmada nispeten kalın tabakalı kompozit plakların (Mindlin), nispeten büyük yer değiştirme ve dönme etkilerinin (von Kármán şekil değiştirmeleri) gözetilmesi durumunda statik analizi için karışık yapıda sonlu eleman (Hellinger-Reissner) formülasyonu sunulmuştur. Doğrusal olmayan sonlu eleman denklemleri artımsal formülasyon ile doğrusallaştırılmış ve Newton-Raphson ardışık yaklaşım tekniği ile sayısal çözüm gerçekleştirilmiştir. Geliştirilen eleman kayma kilitlenmesi problemini otomatik olarak çözmektedir. Karışık formülasyonun yapısı gereği bölge değişkenleri bağımsız enterpole edilmekte, bu da C^0 sürekliliğinin yeterli olmasını sağlamaktadır. Böylece deplasman tipi elemanlarda, formülasyonu karmaşıklaştıran elemanlar arası süreklilik ve uygunlukla ilgili durumlar kendiliğinden halledilmektedir. Geliştirilen eleman FORTRAN programlama dilinde kodlanmış ve sayısal sonuçlar elde edilmiştir. Literatürdeki sonuçlarla doğrulanan elemanın, kompozit plakların analizinde güvenle kullanılabileceği düşünülmektedir.

2. FORMÜLASYON

Ortotrop tabakaların bir araya gelmesiyle oluşan kompozit plak, eşdeğer tekil tabaka yaklaşımı ile ele alınmıştır [9]. Mindlin plak teorisi kabullerine göre kesit boyunca sabit kayma şekil değiştirmeleri olduğu varsayılarak üç boyutlu yapı elemanı düzlem dışı kayma etkilerini de gözeterek şekilde iki boyutlu modelle incelenebilmektedir. Plağın belli bir mertebeye kadar geometrik doğrusal olmayan davranış incelenecek ise kinematik bağıntıları geometrik doğrusal olmayan von Kármán denklemlerinden yararlanılır. Burada kuram kısmen büyük yerdeğiştirme ve

dönmeler için geçerlidir [10]. Hellinger-Reissner prensibi kullanılarak Mindlin plağı için doğrusal olmayan bir fonksiyonel elde edildi. Bu fonksiyonel yapısı itibariyle, üç doğrultuda ötelenmeleri, düzlem içi kesit dönmelerini, düzlem içi ve dışı kesme kuvvetlerini, membran kuvvetleri, düzlem içi eğilme momentleri ile burulma momentini içeren bir yapıda olup, bu hali ile karışık sonlu eleman formülasyonuna da uygundur. Fonksiyonel artımsal formülasyon kullanılarak sonlu eleman çözümü aşamasında Newton-Rapson yöntemiyle ardışık yaklaşım tekniği ile çözülebilir hale getirilmiştir.

2.1. Nispeten Kalın Tabakalı Kompozit Plağın Alan Denklemleri

2.1.1. Kinematik İlişkiler ve Bünye Bağlıları

Mindlin plak kuramında düzlem içi etkiler de dikkate alındığında yer değiştirmeler 3 ötelenme $U = \{u, v, w\}^T$ ve 2 kesit dönmesi $R = \{\varphi_x, \varphi_y\}^T$ bileşeni ile tarif edilirler [11]. Von Kármán ifadelerinde, yer değiştirmeler ve plak ortalama düzlemi şekil değiştirmeleri aşağıdaki gibi ilişkilendirilmiştir,

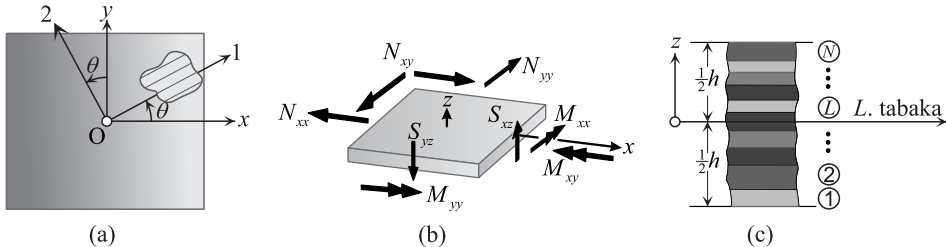
$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} + \frac{1}{2}(w_{,x})^2 & ; & \quad \varepsilon_{yy} = v_{,y} + \frac{1}{2}(w_{,y})^2 & ; & \quad \gamma_{xy} = u_{,y} + v_{,x} + w_{,x}w_{,y} & ; & \quad \gamma_{xz} = w_{,x} + \varphi_x \\ \kappa_{xx} &= \varphi_{x,x} & ; & \quad \kappa_{yy} = \varphi_{y,y} & ; & \quad \kappa_{xy} = \varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} & ; & \quad \gamma_{yz} = w_{,y} + \varphi_y \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ototrop davranış gösteren bir tabakada (L), malzeme koordinatlarında ($1,2,z$) gerilme ve şekil değiştirme ilişkileri

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{array} \right\}_L = \left[\begin{array}{ccc} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{array} \right]_L \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11}^* \\ \varepsilon_{22}^* \\ \gamma_{12}^* \end{array} \right\}_L ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{1z} \\ \sigma_{2z} \end{array} \right\}_L = \left[\begin{array}{cc} k_s Q_{77} & 0 \\ 0 & k_s Q_{88} \end{array} \right]_L \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{1z} \\ \gamma_{2z} \end{array} \right\}_L \quad (2)$$

şeklinde. $Q_{11} = E_1(1 - \nu_{12}\nu_{21})$, $Q_{22} = E_2(1 - \nu_{12}\nu_{21})$, $Q_{12} = \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21}) = \nu_{21}E_1(1 - \nu_{12}\nu_{21})$, $Q_{66} = G_{12}$, $Q_{77} = G_{13}$, $Q_{88} = G_{23}$ olarak malzeme koordinatlarında tanımlanmış malzeme sabitleri ile tanımlanırlar. Burada k_s kesme düzeltme katsayısıdır bu çalışma kapsamında $k_s = 5/6$ sabit değeri kullanılmıştır. Üst indiste (*) ile verilen terimler, plak kesiti içerisindeki bir z noktasındaki bileşenleri göstermektedir ve ortalama düzlemdeki karşılıklarından ayırt edilebilmeleri için kullanılmıştır. Bu şekil değiştirmeler örneğin plak koordinatlarında aşağıdaki gibi hesaplanırlar.

$$\varepsilon_{xx}^* = \varepsilon_{xx} + z\kappa_{xx} \quad ; \quad \varepsilon_{yy}^* = \varepsilon_{yy} + z\kappa_{yy} \quad ; \quad \gamma_{xy}^* = \gamma_{xy} + z\kappa_{xy} \quad (3)$$



Şekil 1. a) Plak global ve malzeme koordinatları, b)Kuvvet ve kuvvet çiftleri pozitif yönleri, c) Tabakalanma

Her tabaka için (2) de verilen gerilme şekil değiştirme ilişkilerinin global plak koordinatlarında elde edilmesi gerekmektedir. Plak x eksenini ile malzeme 1 eksenleri arasında bir θ pozitif açısı olması durumunda gerekli dönüşüm matrisleri, plak düzlem içi ve dışı bileşenler için sırasıyla

$$[\mathbf{T}]_{di} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} ; [\mathbf{T}]_{dd} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (4)$$

şeklinde. Dönüştürülmüş elastisite matrisleri bu durumda $\bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{T}^{-T}$ olur. Gerilme bileşikleri kesit üzerinde gerilmelerin plak kalınlığı (h) boyunca integre edilmesi ile belirlenir. Düzlem içi kuvvet-kuvvet çifti bileşenleri birbirleriyle etkileşimli olarak aşağıdaki görüldüğü gibi şekil değiştirmeler ile ilişkidir;

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{N} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{B} \boldsymbol{\kappa} \quad ; \quad A_{ij} = \sum_{L=1}^N (\bar{Q}_{ij})_L (z_L - z_{L-1}) \quad ; \quad B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{L=1}^N (\bar{Q}_{ij})_L (z_L^2 - z_{L-1}^2) \\ \mathbf{M} &= \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} z dz = \mathbf{B} \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} \quad ; \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{L=1}^N (\bar{Q}_{ij})_L (z_L^3 - z_{L-1}^3) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Burada düzlem içi kuvvet büyüklükleri $\mathbf{N} = \{N_{xx} \quad N_{yy} \quad N_{xy}\}^T$ vektörü ile kuvvet çifti tipinde büyüklükler $\mathbf{M} = \{M_{xx} \quad M_{yy} \quad M_{xy}\}^T$ vektörü ile temsil edilmiştir. Düzlem dışı kesme kuvvetleri de $\left(\mathbf{S} = \{S_{xz} \quad S_{yz}\}^T\right)$ kesit boyunca sabit kayma gerilmelerinin integralleri alınarak hesaplanır.

$$\mathbf{S} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} dz = \mathbf{C} \boldsymbol{\gamma} \quad ; \quad C_{ij} = \sum_{L=1}^N (\bar{Q}_{ij})_L k_s (z_L - z_{L-1}) \quad (6)$$

Gerilme bileşikleri ile şekil değiştirmeler arasındaki ters ilişki, (5) ve (6) denklemlerinde hesaplanan elastisite matrislerinin terslerinin alınmasıyla kurulabilir. Elde edilen kompliyans matrisleri

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{B}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}' & \mathbf{B}' \\ \mathbf{B}' & \mathbf{D}' \end{bmatrix}^{-1} \quad ; \quad [\mathbf{C}'] = [\mathbf{C}]^{-1} \quad (7)$$

plak ortalama düzlemindeki şekil değiştirmelerin gerilme bileşikleri cinsinden yazılmasını sağlar.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}' \mathbf{N} + \mathbf{B}' \quad ; \quad \boldsymbol{\kappa} = \mathbf{B}' \mathbf{N} + \mathbf{D}' \mathbf{M} \quad ; \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{C}' \mathbf{S} \quad (8)$$

2.1.2. Denge Denklemleri

Düzlem dışı (q_z) yayılı yüklemeye maruz Mindlin plağında, geometrik doğrusal olmayan davranış gözletildiğinde denge denklemleri aşağıdaki hali ile elde edilir.

$$\left. \begin{aligned} N_{xx,x} + N_{xy,y} = 0 & \quad ; \quad q_z + (N_{xx}w_{,x} + N_{xy}w_{,y})_{,x} + (N_{xy}w_{,x} + N_{yy}w_{,y})_{,y} + S_{xz,x} + S_{yz,y} = 0 \\ N_{xy,x} + N_{yy,y} = 0 & \quad ; \quad M_{xx,x} + M_{xy,y} - S_{xz} = 0 \quad ; \quad M_{yy,y} + M_{xy,x} - S_{yz} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

2.2. Hellinger Reissner Fonksiyoneli

Hellinger-Reissner fonksiyonelinin birinci varyasyonu

$$\delta \Pi_{HR} = \int_V (\boldsymbol{\varepsilon}^u - \boldsymbol{\varepsilon}^\sigma)^T \delta \boldsymbol{\sigma}^s dV + \int_V \left((\boldsymbol{\sigma}^\sigma)^T \delta \boldsymbol{\varepsilon}^u - \mathbf{q}^T \delta \mathbf{u} \right) dV - \int_\Gamma \hat{\mathbf{t}}^T \delta \mathbf{u} d\Gamma = 0 \quad (10)$$

şeklinde tarif edilmiştir. Burada $\boldsymbol{\varepsilon}^u$, (1) ve (3) de verilen haliyle şekil değiştirmelerin yer değiştirmeler (\mathbf{u}) cinsinden tarifine, $\boldsymbol{\varepsilon}^\sigma$ ile (8) denklemindeki haliyle şekil değiştirmelerin iç gerilme bileşenleri ($\boldsymbol{\sigma}$) cinsinden tarifine karşılık gelmektedir. $\hat{\mathbf{t}}$ plak kenar tesirlerini temsil etmektedir. Tabakalı kompozit Mindlin plağı için, Geometrik doğrusal olmayan etkiler gözetenilerek elde edilen alan denklemleri (10) denkleminde yerleştirildiğinde,

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{HR} = & \int_\Omega \left[u_{,x} + \frac{1}{2} (w_{,x})^2 - A'_{11} N_{xx} - A'_{12} N_{yy} - A'_{13} N_{xy} - B'_{11} M_{xx} - B'_{12} M_{yy} - B'_{13} M_{xy} \right] \delta N_{xx} d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[v_{,y} + \frac{1}{2} (w_{,y})^2 - A'_{21} N_{xx} - A'_{22} N_{yy} - A'_{23} N_{xy} - B'_{21} M_{xx} - B'_{22} M_{yy} - B'_{23} M_{xy} \right] \delta N_{yy} d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[u_{,y} + v_{,x} + w_{,x} w_{,y} - A'_{31} N_{xx} - A'_{32} N_{yy} - A'_{33} N_{xy} - B'_{31} M_{xx} - B'_{32} M_{yy} - B'_{33} M_{xy} \right] \delta N_{xy} d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[\varphi_{x,x} - B'_{11} N_{xx} - B'_{12} N_{yy} - B'_{13} N_{xy} - D'_{11} M_{xx} - D'_{12} M_{yy} - D'_{13} M_{xy} \right] \delta M_{xx} d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[\varphi_{y,y} - B'_{21} N_{xx} - B'_{22} N_{yy} - B'_{23} N_{xy} - D'_{21} M_{xx} - D'_{22} M_{yy} - D'_{23} M_{xy} \right] \delta M_{yy} d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[\varphi_{x,y} + \varphi_{y,x} - B'_{31} N_{xx} - B'_{32} N_{yy} - B'_{33} N_{xy} - D'_{31} M_{xx} - D'_{32} M_{yy} - D'_{33} M_{xy} \right] \delta M_{xy} d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[w_{,x} + \varphi_x - C'_{11} S_{xz} - C'_{12} S_{yz} \right] \delta S_{xz} d\Omega + \int_\Omega \left[w_{,y} + \varphi_y - C'_{21} S_{xz} - C'_{22} S_{yz} \right] \delta S_{yz} d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[N_{xx} \delta u_{,x} + N_{xy} \delta u_{,y} \right] d\Omega + \int_\Omega \left[N_{xy} \delta v_{,x} + N_{yy} \delta v_{,y} \right] d\Omega - \int_\Omega \delta w q_z d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[(N_{xx} w_{,x} + N_{xy} w_{,y} + S_{xz}) \delta w_{,x} + (N_{xy} w_{,x} + N_{yy} w_{,y} + S_{yz}) \delta w_{,y} \right] d\Omega \\ & + \int_\Omega \left[M_{xx} \delta \varphi_{x,x} + M_{xy} \delta \varphi_{x,y} + S_{xz} \delta \Omega_x \right] d\Omega + \int_\Omega \left[M_{xy} \delta \varphi_{y,x} + M_{yy} \delta \varphi_{y,y} + S_{yz} \delta \varphi_y \right] d\Omega \\ & + \int_\Gamma (\sigma_{ij} n_j - \hat{t}_i) \delta u_i d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

doğrusal olmayan denklemleri elde edilir.

2.3. Artımsal Formülasyon

Elde edilen doğrusal olmayan denklemler (11) sonlu eleman çözüm tekniğine uygun olarak doğrusallaştırılmalıdır. Artımsal formülasyon [12] kullanılarak ardışık yaklaşım yöntemine uygun olacak şekilde doğrusallaştırılmış denklemler elde edilmiştir. Bu yöntemle göre alan değişkenlerinin nihai değerleri ($\bar{\bar{\cdot}}$), değişkenin başlangıç değerine (\dots) bir artımının ($\overset{+}{\cdot}$) ilave edilmesiyle tanımlanır. Alan değişkenlerini \mathbf{X} vektörüyle tanımlarsak nihai değerler $\bar{\bar{\mathbf{X}}} = \mathbf{X} + \overset{+}{\mathbf{X}}$ şeklinde olur. Bu aşamada varyasyon özel tipte bir varyasyona $\bar{\delta}$ dönüştürülür ve sadece

artımlara uygulanır [13]. Artımsal formdaki alan değişkenleri doğrusal olmayan denklemde yerleştirilir ve üçüncü mertebeye terimler göz ardı edilirse doğrusallaştırılmış karışık sonlu eleman formülasyonu aşağıdaki yapıda elde edilir [8].

$$(\mathbf{K}^{++} + \mathbf{K}^{++nl}) \mathbf{X}^+ = \mathbf{F}^+ - \mathbf{K}^+ \quad (12)$$

Denklemdaki \mathbf{X} bilinmeyen vektörü ve \mathbf{F}^+ dış yük vektörü aşağıdaki yapıdadırlar.

$$\mathbf{X} = \{\mathbf{N} \quad \mathbf{M} \quad \mathbf{S} \quad \mathbf{U} \quad \mathbf{R}\}^T ; \quad \mathbf{F}^+ = \left\{ \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{F}_U^+ \quad \mathbf{0} \right\}^T \quad (13)$$

Karışık sonlu eleman denklem sisteminde doğrusal sistem matrisi, doğrusal olmayan sistem matrisi ve düzeltme vektörü sırasıyla aşağıda sunulduğu gibidir.

$$\mathbf{K}^{++} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{NN}^{++} & \mathbf{K}_{NM}^{++} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{NU}^{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{MN}^{++} & \mathbf{K}_{MM}^{++} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{MR}^{++} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{SS}^{++} & \mathbf{K}_{SU}^{++} & \mathbf{K}_{SR}^{++} \\ \mathbf{K}_{UN}^{++} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{US}^{++} & \mathbf{K}_{UU}^{++} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{RM}^{++} & \mathbf{K}_{RS}^{++} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{K}^{++nl} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{NU}^{++nl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{UN}^{++nl} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{UU}^{++nl} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{K}^+ = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_N^+ \\ \mathbf{K}_M^+ \\ \mathbf{K}_Q^+ \\ \mathbf{K}_U^+ \\ \mathbf{K}_R^+ \end{bmatrix} \quad (14)$$

2.4. Ardışık Yaklaşım

Doğrusallaştırılmış denklem sisteminin çözümü ardışık yaklaşım ile yapılmaktadır. Newton Raphson algoritmasına göre (12) denkleminin ardışık formu şu şekilde verilir,

$$(\mathbf{K}^{++} + \mathbf{K}^{++nl(i-1)}) \mathbf{X}^{(i)+} = \mathbf{F}^+ - \mathbf{K}^+ \mathbf{X}^{(i-1)+} ; \quad \bar{\mathbf{X}}^{(i)} = \mathbf{X}^{(i-1)+} + \mathbf{X}^{(i)+} \quad (15)$$

Denklemden görülen (i) her bir yaklaşım adımının numarasını simgelemektedir. Ardışık yaklaşım hesabına göre her adımda dış yük vektörü \mathbf{F}^+ ile düzeltme vektörü (iç kuvvet vektörü) \mathbf{K}^+ arasındaki fark azalır ve farkın belli bir değerin altına düşmesi durumunda ardışık çözüm durdurularak sonuçlar elde edilir [10].

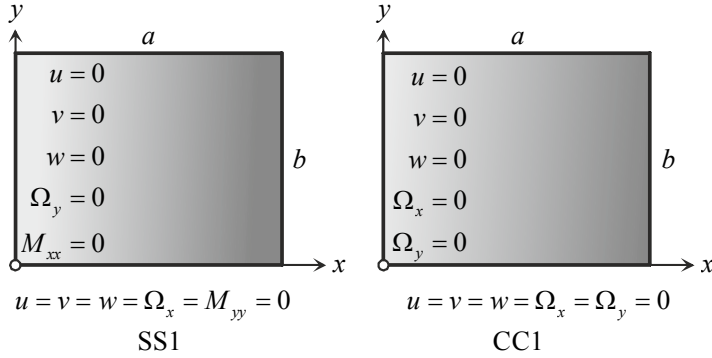
2.5. Sonlu Eleman Ayrıklaştırması

Plak bölgesi köşelerinde 4 düğüm noktalı izoparametrik dörtgen elemanlar kullanılarak ayrıklaştırılmıştır [14]. Bölge değişkenleri birbirinden bağımsız tarif edildiğinden C^0 tipinde süreklilik sonlu eleman formülasyonu için yeterlidir. 4 düğüm noktasının her birinde 13 alan değişkeni doğrusal olarak interpolate edilmiş ve integrasyon hesabı 2×2 Gauss şemasına göre yapılmıştır.

3. SAYISAL SONUÇLAR

Geliştirilen sonlu eleman formülasyonunun ve programının doğrulanması amacıyla çeşitli örnek çözümler yapılmış ve literatürdeki sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çeşitli sınır koşulları incelenmiştir. Daha aydınlatıcı olması adına her bir sınır koşulu isimlendirilmiş ve koşullara karşılık gelen kısıtlamalar ve dikdörtgen plak geometrisiyle ilgili özellikler Şekil 1'de ayrıntılı

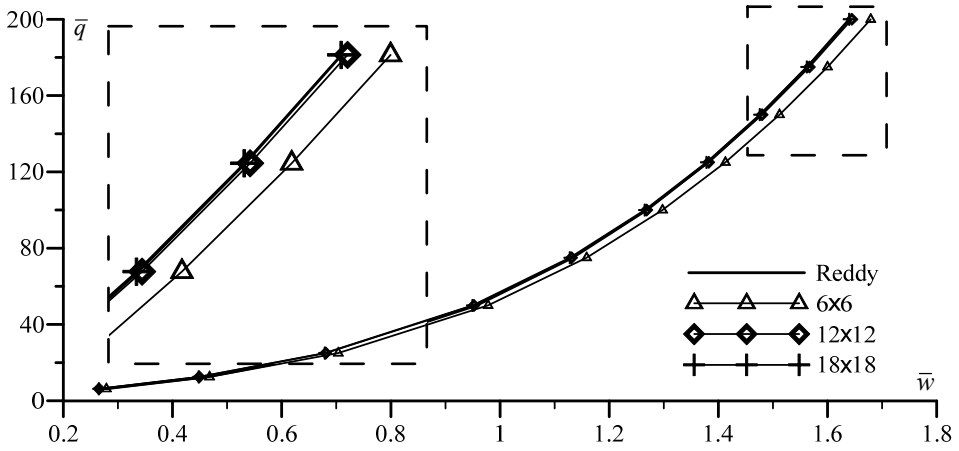
olarak verilmiştir. Burada mesnet koşulları SS1 ve CC1, klasik basit mesnetlenme ve ankastre mesnetlenme durumlarını işaret etmektedir.



Şekil 2. Mindlin plağında çeşitli sınır koşulları

3.1. İzotropik Kalın Plağın Statik Büyük Çökme Analizi

Düzgün yayılı yükleme altındaki izotropik kalın plak SS1 sınır koşulu altında incelenmiştir. Karışık sonlu eleman sonuçları [11] de sunulmuş olan yer değiştirme tabanlı sonlu eleman sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Seçilen plak geometrik büyüklükleri $a = b = 10\text{m}$ ve $h = 1\text{m}$ 'dir. Plak malzeme özellikleri $E = 7.8 \times 10^6 \text{N/m}^2$ ve $\nu = 0.3$ seçilmiştir. Kare plak 6×6 , 12×12 ve 18×18 eleman ağlarına bölünmüş ve sayısal sonuçtaki yakınsama incelenmiştir. Boyutsuzlaştırılmış yük parametrelerine ($\bar{q} = qa^4 / (Eh^4)$) karşı gelen plak orta noktasının boyutsuzlaştırılmış çökme değerleri ($\bar{w} = w / h$) Şekil 1'de sunulmuştur.



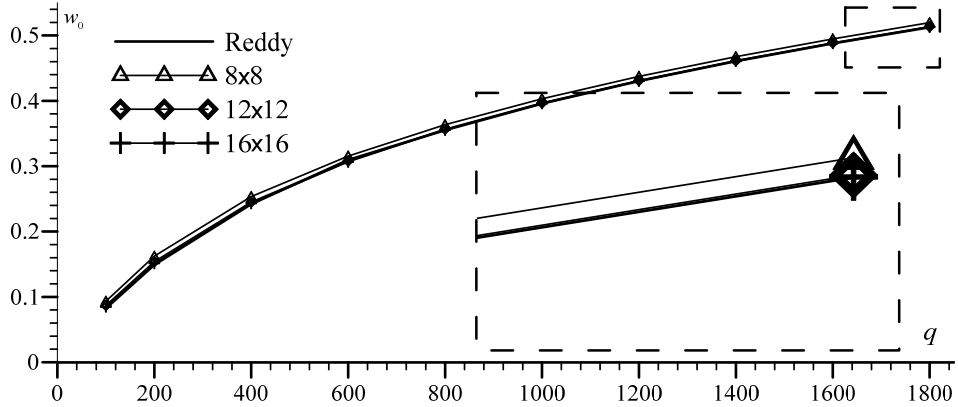
Şekil 3. İzotrop plağın SS1 sınır koşulunda orta nokta çökmesi

Şekil 3'den görüldüğü üzere geliştirilen eleman doğrusal olmayan analizde, sık olmayan bir eleman ağında bile (6×6) oldukça iyi sonuçlar vermiştir. Bütün yükleme bölgesinde yer

değiştirme tabanlı eleman ve karışık sonlu eleman büyük bir uyum içerisinde. Grafikten anlaşılacağı üzere, doğrusal olmayan problemde, plağa büyük yüklemeye yapıldığında, iyi sonuç elde edilebilmesi için ağ sıklığına dikkat edilmelidir.

3.2. Tabakalı Kompozit Kare Plakta Statik Büyük Çökme Analizi

Bu örnekte tabakalı plak formülasyonunun doğrulanması amaçlanmıştır. Dört kenarı ankastre (CC1) mesnetlenmiş kare plak düzgün yayılı yüklemeye altında incelenmiştir. Üç farklı sonlu eleman ağında (8×8 , 12×12 , 16×16) çözümler yapılmış ve [9] de verilen sonuçlar ile karşılaştırma yapılmıştır. Seçilen plak boyutları $a = b = 12\text{m}$, $h = 0.3\text{m}$ ve ortotrop malzemenin mühendislik sabitleri $E_1 = 40 \times 10^6 \text{N/m}^2$, $E_2 = 10^6 \text{N/m}^2$, $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$, $G_{23} = 0.5E_2$ ve $\nu_{12} = 0.25$ şeklindedir. Altı eşit kalınlıkta tabakadan oluşan kesitte, tabaka yerleşimi ($0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ / 90^\circ$) şeklindedir. Yüklemeye boyunca her yük adımı $\Delta q = 200 \text{N/m}^2$ seçilmiştir. Düzgün yayılı yük altında kare plağın orta noktasının çökmesi boyutlu büyüklüklerle Şekil 4.'de verilmiştir.



Şekil 4. Tabakalı kompozit kare plakta orta nokta çökmesi

Şekil 4' görüldüğü üzere sonuçlar büyük bir uyum içerisinde. 12×12 eleman ağı ile 16×16 eleman ağına ait sonuçlar neredeyse üst üste düşmüş ve yeterli yakınsaklık sağlanmıştır. Geliştirilen karışık sonlu eleman formülasyonunun, tabakalı kompozit plakların büyük çökme analizinde güvenle kullanılabilmesi söylenebilir.

4. SONUÇ

Bu çalışmada Hellinger-Reissner prensibine dayanarak tabakalı kompozit Mindlin plakları için doğrusal olmayan bir fonksiyonel elde edilmiştir. Elde edilen doğrusal olmayan denklem artımsal formülasyon kullanılarak doğrusallaştırılmış ve Newton-Raphson ardışık yaklaşım şeması ile statik yüklemeye altında nispeten büyük çökme problemi çözülmüştür. Fonksiyonelin yapısı gereği, sayısal hesaplar karışık sonlu eleman formülasyonu üstünden sürdürülmüştür. Elde edilen sayısal sonuçlar literatürdeki mevcut izotrop ve kompozit plak sonuçları ile doğrulanmıştır. Sık olmayan bir eleman ağında (6×6) bile formülasyonun doğrusal olmayan davranışı oldukça iyi yansıttığı görülmüştür.

REFERENCES / KAYNAKLAR

- [1] Chia C.-Y., “Nonlinear Analysis of Plates”, McGraw-Hill Inc., US, 1980.
- [2] Chia C.-Y., “Geometrically nonlinear behavior of composite plates: A review”, *Applied Mechanics Reviews*, 41, 439–451, 1988.
- [3] Argyris J., Tenek L., “Linear and geometrically nonlinear bending of isotropic and multilayered composite plates by the natural mode method”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 113, 207–251, 1994.
- [4] Reddy J.N., Chao W.C., “Non-linear bending of thick rectangular, laminated composite plates”, *Int. J. Non. Linear Mech.*, 16, 291–301, 1981.
- [5] Tanrıöver H., Şenocak E., “Large deflection analysis of unsymmetrically laminated composite plates: analytical-numerical type approach”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39, 1385–1392, 2004.
- [6] Shufrin I., Rabinovitch O., Eisenberger M., “A semi-analytical approach for the non-linear large deflection analysis of laminated rectangular plates under general out-of-plane loading”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 43, 328–340, 2008.
- [7] Aksoylar C., Ömercikoğlu A., Mecitoğlu Z., Omurtag M.H., “Nonlinear transient analysis of FGM and FML plates under blast loads by experimental and mixed FE methods”, *Compos. Struct.*, 94, 731–744, 2012.
- [8] Kutlu A., Omurtag M.H., “Large deflection bending analysis of elliptic plates on orthotropic elastic foundation with mixed finite element method”, *International Journal of Mechanical Sciences*, 65, 64–74, 2012.
- [9] Reddy J.N., “*Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells*”, CRC Press, 2004.
- [10] Reddy J.N., “*An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*”, Oxford University Press, USA, 2004.
- [11] Reddy J.N., “*Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells*”, CRC Press, 2006.
- [12] Başar Y., Krätzig W.B., “*Mechanik der Flächentragwerke: theorie, berechnungsmethoden, anwendungsbeispiele*”, Vieweg & Sohn, Wiesbaden, 1985.
- [13] Başar Y., Omurtag M.H., “Free-vibration analysis of thin/thick laminated structures by layer-wise shell models”, *Comput. Struct.*, 74, 409–427, 2000.
- [14] Carey G.F., Oden J.T., “*Finite Elements: A Second Course*”, Prentice Hall, 1983.