Vektörden Küreye

VEKTOR TO SPHERE

ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

Hasan ŞAHİN[1*] **Uygar Yağız KENDİRCİ**[2]

[1,2]Düzce Bilim ve Sanat Merkezi, Düzce,Türkiye
[1,2]Düzce Science and Art Center, Düzce, Türkiye

*hasansahin13@gmail.com
ORCID: 0000-0002-5227-5300

uygarkendirci@gmail.com
ORCID: 0000-0002-4683-193X

MAKALE BİLGİSİ / ARTICLE INFORMATION

Geliş Tarihi / Date Received
25.11.2021

Kabul Tarihi / Date Accepted
17.08.2022

Yayın Tarihi / Date Published
Ağustos / August 2023

Yayın Sezonu / Pub Date Season
Ağustos - Ocak / August - January

ATIF / CITE as

Şahin, H., Kendirci, U.Y., (2023). "Vektörden Küreye" / "Vektor to Sphere". Bilar: Bilim Armonisi Dergisi, 6 (1): 4-10. doi: 10.37215/bilar.1028571

https://dergipark.org.tr/tr/pub/bilar

Vektörden Küreye

Vektor to Sphere

ANTALYA
İL MİLLÎ EĞİTİM MÜDÜRLÜĞÜ

ÖZET

Küre, üç boyutlu bir cisim olup, uzayda sabit bir noktadan eşit uzaklıktaki noktaların oluşturduğu bir cisimdir. Küre merkezinden üç boyutta (x,y,z) eşit uzaklıktaki (yarıçap r) yayılmış her bir nokta kürenin yüzeyinde yer almaktadır. Başka bir deyişle orijin noktasından x ve y koordinatlarından eşit uzaklıkta çizilen bir yayın z ekseni etrafında 360 derece döndürülmesi ile küre şekli elde edilir. Uzayda verilen 3 nokta A(a,b,c), B(p,r,s) ve P(x,y,z) noktaları olsun. Bu noktaların belli şartlarda birleştirilmesinden bir küre oluşturulur mu ve oluşturulan bu kürenin merkezi hacmi ve yüzey alanı ile ilgili bilgiler elde edilebilir mi? Vektörler ve küre arasında bir ilişki kurulabilir mi? sorularına çözüm bulmak için yapılan araştırma ve literatür taramalarında bu şekilde bir ilişkinin ispatı ve genel bir kural olmadığı gözlenerek bulunan boşluk yapılan işlemlerle ispatlanarak doldurulmaya çalışılmıştır. Bu çalışma ile elde edilen genel kurallar uzayda kurulan bir küre için genel küre denklemi ile bu küre arasında yarıçapa bağlı kalmadan yüzey alan hacim ve küre merkezi bulunması için sonuçlar vermiştir. Burada verilen noktalara bağlı k sabiti için elde edilir. Verilen kürenin dışındaki bir A(a,b,c) noktası, kürenin dışından alınan bir B(p,r,s) noktası ve küre yüzeyinde olduğu bilinen bir P(x,y,z) noktası için merkezi M(X,Y,Z) olan bir kürenin bu noktaları bulunur. Aynı zamanda kürenin yüzey alanı ve hacmi ifade edilir. Burada istediğimiz öncülleri sağlayan uzayda alınan üç nokta için genel küre formülleri elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Alan, çember, hacim, küre.

ABSTRACT

A sphere is a three-dimensional object made up of points equidistant from a fixed point in space. Each point spread equidistant (radius r) in three dimensions (x,y,z) from the center of the sphere is located on the surface of the sphere. In other words, a sphere shape is obtained by rotating an arc drawn at an equal distance from the origin point in x and y coordinates by 360 degrees around the z axis. Let the three points given in space be A(a,b,c), B(p,r,s) and P(x,y,z). Can a sphere be formed by connecting these points under certain conditions, and can information about the central volume and surface area of this sphere be obtained? Can a relationship be established between vectors and spheres? In the research and literature reviews carried out to find solutions to these questions, it was observed that there was no proof of such a relationship and there was no general rule, and the gap was tried to be filled by proving it with the procedures performed. The general rules obtained from this study gave results for finding the general sphere equation and the surface area, volume and sphere center of a sphere established in space, without depending on the radius. It is obtained for the constant k depending on the points given here. For a point A(a,b,c) outside the given sphere, a point B(p,r,s) taken from outside the sphere, and a point P(x,y,z) known to be on the surface of the sphere, the center M(X,Y, A sphere with Z) has these points.

At the same time, the surface area and volume of the sphere are expressed. Here, general sphere formulas have been obtained for three points in space that provide the premises we want.

Keywords: Area, circle, sphere, volume.

1. GİRİŞ

Eski çağlardan beri insanoğlu ürettiği her nesne ve yapıda matematikten yardım almış, geometrik şekiller kullanmıştır. Doğanın sahip olduğu bu karmaşık ve geometrik varyasyonlar geçmişten günümüze sanat üretimi için sonsuz bir ilham kaynağı olmuştur (Karataş 2016). Çevremizde geometri her yerde (güneş sisteminin yapısında, jeolojik oluşumlarda, bitkilerde, hayvanlarda, sanat ve mimaride, makinelerde ve insanoğlunun yarattığı tüm görünümlerde) vardır ve dünyayı daha iyi anlamamızı sağlar. Bunun yanında geometri, problem çözme ve uzamsal akıl yürütme becerileri ve matematiğin birçok alanında anahtar role sahiptir. Ölçümler ve hesaplamalar ile geometri yakından ilişkilidir. Örneğin geometrinin bütünden parçaya ayrılarak yapılanmalarında kesirler konusu kullanılır. Geometri bunun yanında günlük hayatta herkes tarafından sıkça kullanılmaktadır. Bilim adamları, sanatçılar, mimarlar, mühendisler, geometriyi kullanan meslek dallarındaki kişilerden sadece birkaçıdır (Van de Walle 2001). Sabit iki noktaya olan uzaklıkları oranı sabit olan noktaların geometrik yeri, bu sabit noktaları birleştiren doğru parçasını verilen orana göre içten ve dıştan bölen noktalar arasındaki uzaklığı çap kabul eden bir çemberdir (Kirişçi 2017). Apollonius çemberi (Apollonian çemberi) olarak bilinir. Bu önemli geometrik özellik, matematiksel fizik, optik ve elektrik alanlarında bazı problemlerin çözümünde kullanılır (Ay 2013).

Geometride, özellikle de düzlemsel geometride, üçgenlerin özel bir yeri vardır. Çünkü üçgenler, diğer çokgenlerin incelenmesinde kullanılan en önemli araçlardan biridir. Öklid düzlemindeki her bir üçgen için dört karakteristik çember elde edilir. Bunlardan biri üçgenin iç teğet çemberi, diğer üç tanesi ise dış teğet çemberleridir. Bu dış teğet çemberlerinin her biri üçgenin kenarlarından birine teğettir ve aynı zamanda bu çemberlerin her biri, kenarların kendisine olmasa da diğer iki kenarı ihtiva eden doğruların uzantısına da teğettir. Bu üç çemberin her birinin merkezleri, üçgenin iki dış açıortayları ile bir iç açısının açıortayının kesim noktasıdır.

a , b, g kenarlı bir ABC üçgeninin, sırasıyla yarıçapları r_a, r_b, r_g olan dış teğet çemberlerinin birçok özelliği araştırılmıştır (Bell 2006). Aynı zamanda Hansen'in çalışmalarında üçgenin dik açılı olması durumunda bu yarıçaplara ait sonuçlar verilmiştir (Hansen 2003).

2. KURAMSAL KAVRAMLAR

2.1. Heron Üçgeni: Kenar uzunlukları a, b, c tam sayıları ve alanı da tamsayı olan ABC üçgenine Heron üçgeni, (a, b, c) üçlüsüne de Heron üçlüsü denir (Kramer ve Luca 2000). Doğru parçaları genel olarak [AB] şeklinde gösterilecektir. [AB]; A ve B noktaları ile bu noktaları birleştiren düz bir doğru parçasını gösterir. Kenar uzunlukları ise küçük harflerle gösterilecektir. Örneğin bir ABC üçgeninin üç kenar uzunluğunu α, β, γ ile gösterirsek;

$\alpha = |BC| = |CB|$, $\beta = |AC| = |CA|$, $\gamma = |AB| = |BA|$ 'dir. Üçgenler için iyi bilinen durumları şöyle verebiliriz. Bir üçgenin açılarının derece cinsinden ölçümleri A, B, C; kenarlarının uzunlukları da α, β, y ise o zaman (genelliği bozmaksızın)

$0° < A \leq B \leq C < 180°$, $A + B + C = 180°$

ve (bu sıralamaya uyacak şekilde), $0 < \alpha \leq \beta \leq \gamma$ 'dır, ayrıca üçgen eşitsizliklerinden $\alpha < \beta + \gamma$, $\beta < \alpha + \gamma$ ve $\gamma < \alpha + \beta$ dır (Zelator 2008).

2.2. Sinüs Teoremi: Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c; iç açıları A, B, C ve çevrel çemberinin yarıçapı da R ise;

$\dfrac{a}{\operatorname{Sin} A} = \dfrac{b}{\operatorname{Sin} B} = \dfrac{c}{\operatorname{Sin} C} = 2R$ dir (Ayres 1954).

2.3. Kosinüs Teoremi: Bir ABC üçgeninin kenar uzunlukları a, b, c ve iç açıları da A, B, C ise;

$a^2 = b^2 + c^2 \square 2bc \operatorname{Cos} A,$

$b^2 = a^2 + c^2 \square 2ac \operatorname{Cos} B$

ve

$c^2 = a^2 + b^2 \square 2ac \operatorname{Cos} C$ dir (Ayres 1954).

2.4. İç Teğet Çember: İç teğet çemberin merkezi üçgenin üç iç açıortayının kesim noktasıdır. Doğal olarak bu çember çokgenin içindedir ve merkezi çokgenin tüm kenarlarına eşit uzaklıktadır. Bu uzaklığın ölçümü iç teğet çemberinin yarıçapını verir. Her üçgenin bir iç teğet çemberi vardır ve merkezi üç açıortayının kesim noktasıdır (Şahin 1997).

2.5. Dış Teğet Çember: İki açının dış açıortayı ile üçüncü açının iç açıortayının kesim noktasını merkez kabul eden ve üçgenin bir kenarına dıştan teğet olan çembere üçgenin dış teğet çemberi denir (Şahin 1997).

2.6. Küre Denklemi: XYZ dik koordinat sisteminde, merkezi $O(0, 0, 0)$ ve yarıçapı r olan küre yüzeyinin denklemi, $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 'dir. Merkezi $M(a, b, c)$ ve yarıçapı r olan küre yüzeyinde $P(x, y, z)$noktası alalım. $|PM| = r$ olacağından iki nokta arasındaki uzaklık formülünden, küre yüzeyinin denklemi, $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ olur.

Bu denklemde parantezler açılır, gerekli düzenleme yapılırsa,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

$$-2a = D, \quad -2b = E, \quad -2c = F, \quad a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = G,$$

olmak üzere

$$x^2 + y^2 + z^2 + Dx + Ey + Fx + G = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denkleme de kürenin genel denklemi denir.

2.7.Çevre Açı: Bir çemberin iç bölgesinde, köşesi çember üzerinde bulunan açıya çevre açı denir.

2.8.Üç Boyutlu Analitik Uzayda Koordinat Sistemi: Uzaydaki bir *O* noktasından birbirine dik olan üç sayı ekseninin oluşturduğu sisteme, uzayda koordinat sistemi denir.

2.9.Üç Boyutlu Analitik Uzayda Dik Koordinat Sistemleri: *O* noktasına, başlangıç noktası (orijin) sayı eksenlerine de dik koordinat eksenleri denir. *Ox* eksenine birinci eksen veya x ekseni, *Oy* eksenine ikinci eksen ya da y ekseni, *Oz* eksenine de üçüncü eksen ya da z ekseni denir. Bu eksenlere koordinat eksenleri ve bunların ikişer ikişer oluşturdukları birbirine dik üç sisteme de koordinat sistemleri denir. *Ox*, *Oy* ve *Oz*eksenleri ile gösterilir. Koordinat sisteminin oluşturduğu uzaya, Üç boyutlu analitik uzay denir.

2.10. Yer Vektörü(konum vektörü): Üç boyutlu analitik uzayın bir *P*(*a, b, c*) noktasının yer vektörü olarak, $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{OP} = (a,b,c)$ şeklinde yazılır. Üç boyutlu analitik uzayda; nokta vektör eşlemesinde, *P* noktasının koordinatları vektörünün $\overrightarrow{OP}$ bileşenleridir.

2.11.Öklid Uzayı: Düzlemsel olarak ifade edilen üç boyutlu geometrinin temel özellikleri ile kavramlarının tanımlanması Öklid uzayı olarak ifade edilmektedir. Adını antik çağda yaşamış ünlü Yunan matematikçi Öklid'den alır. Öklid uzayı, üç boyutlu uzayda sabit bir merkezden eşit uzaklıkta bulunan noktaların oluşturduğu geometrik yapının tüm özelliklerini içerir. Bu sayede uzaydaki her bir nokta, üç boyutlu koordinatlarla (x, y, z) belirlenebilir.

2.12.Bir Noktanın Başlangıç Noktasına Olan Uzaklığı: Üç boyutlu analitik uzayda bir nokta P(x_1,y_1,z_1) olsun. Bu noktanın başlangıç noktasına olan uzaklığı | OP |'dir. Üç boyutlu analitik uzayda, P(x_1,y_1,z_1) noktasının, eksenlerin başlangıç noktasına olan uzaklığı $|OP| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ birimdir.

2.13. İki Noktanın Birbirine Olan Uzaklığı: Üç boyutlu analitik uzayda iki noktadan biri P(x_1,y_1,z_1) diğeri Q(x_1,y_1,z_1) olsun. Bu iki noktanın birbirine olan uzaklığı |PQ|'dir. 3 boyutlu analitik uzayda, bu iki nokta arasındaki mesafe $|PQ| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ şeklinde bulunur.

2.14.Üç Boyutlu Analitik Uzayda İç Çarpım ve Birim Vektörü: R^3 vektör uzayında $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$ ve $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$ iki vektör olsun. Bu iki vektörün iç çarpımı $\langle \vec{p}, \vec{q} \rangle = p_1q_1 + p_2q_2 + p_3q_3$ olarak tanımlanan yeni bir vektördür.

$\vec{p} = (p_1, p_2, p_3) \in \sim^3$ vektörünün uzunluğu (veya normu)

$$|\vec{p}| = \sqrt{\langle \vec{p}, \vec{p} \rangle} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + + p_3^2}$$

olarak tanımlanır. Eğer $|\vec{p}| = 1$ ise $\vec{p}$ vektörüne birim vektör denir (Brannan vd. 1999).

2. 15. İç Çarpım İşlemi ve Özellikleri: R^3 te verilen iki vektörü bir reel sayıya karşılık getiren $f : R^3 \times R^3 \to R$ $f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}.\vec{b}$ fonksiyonu aşağıdaki aksiyomları sağlıyorsa, *f* fonksiyonuna bir reel iç çarpım fonksiyonu (işlemi) denir. $f(\vec{a}, \vec{b})$ değerine de $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ vektörünün iç çarpımı denir.

İç çarpım fonksiyonların özelikleri,

a. Her $\vec{a}, \vec{b}, \in R^3$ için $f(a,b) = f(b,a)$dır. (Simetri özeliği)

b. Her $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^3$ve her $m, n \in R$ için $f(m\vec{a} + n\vec{b}, \vec{c}) = mf(\vec{a}, \vec{c}) + nf(\vec{b}, \vec{c})$dir (iki lineerlik özeliği).

c. $\vec{a} = \vec{0}$ise $f(\vec{a}, \vec{a}) = 0$ve $\vec{a} \neq \vec{0}$ise $f(\vec{a}, \vec{a}) > 0$dır. (pozitif tanımlılık özeliği)

Her $\vec{a}, \vec{b}, \in R^3$için $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$olmak üzere

$f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}.\vec{b} = < \vec{a}, \vec{b} > = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$şeklinde tanımlı vektör çarpımına, R^3 te bir reel Öklid iç çarpım fonksiyonu veya iç çarpım işlemi denir. $\vec{a} = (a_1 a_2 a_3)$ve$\vec{b} = (b_1 b_2 b_3)$vektörleri verildiğinde, $f(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a}.\vec{b} = < \vec{a}, \vec{b} > = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3$ değerine $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörlerinin Öklid iç çarpımı adı verilir.

2.16. Skaler Çarpım: a, b Є V olacak şekilde bir V vektörü ile bir skaler çarpma işlemi vardır. Bir *V* vektörü ile bir reel sayının (*k*) çarpma işleminin, aşağıdaki özelikleri vardır.

a. Her $\vec{a}, \vec{b} \in V$, ve her $k \in R$ için $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ vektörüdür.

b. Her $\vec{a}, \in V$, ve her $k_1, k_2 \in R$ için $(k_1 + k_2)\vec{a} = k_1\vec{a} + k_2\vec{a}$ vektörüdür.

c. Her $\vec{a}, \in V$, ve her $k_1, k_2 \in R$için $(k_1 k_2)\vec{a} = k_1(k_2\vec{a})$ vektörüdür.

d. Her $\vec{a}, \in V$ için$1.\vec{a} = \vec{a}$ vektörüdür.

2.17.Uzaydaki Vektörler Kümesinde Toplama İşlemi: Üç boyutlu analitik uzayda vektörlerin kümesi *V* ile gösteriliyor. *V* kümesi üzerinde tanımlı, toplama işleminin aşağıdaki özellikleri vardır.

a. *V* kümesi, toplama işlemine göre kapalıdır.

Her $\vec{a}, \vec{b} \in V$ için, $(\vec{a} + \vec{b}) \in V$ vektörüdür

b. *V* kümesinde, toplama işleminin değişme özelliği vardır.

Her $\vec{a}, \vec{b} \in V$ için, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ vektörüdür.

c. V kümesinde, toplama işleminin birleşme özelliği vardır.

Her $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ için, $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a}(\vec{b} + \vec{c})$ vektörüdür.

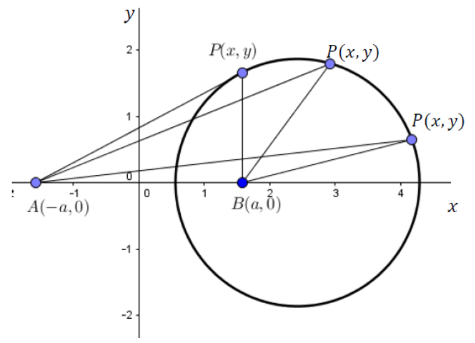
d. *V* kümesinde toplama işleminin birim (etkisiz) elemanı vardır.

Bu eleman $\vec{0} = (0,0,0)$ olarak tanımlanan sıfır vektörüdür. Her $\vec{a}, \in V$ için, $\vec{a} + \vec{O} = \vec{O} + \vec{a} = \vec{a}$ vektörüdür.

2.18. Uzayda İki Vektör Arasındaki Açı: $\vec{a},\vec{b} \in R^3$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ vektörleri verilsin. $\vec{a}$ ve $\vec{b}$ vektörleri arasındaki açı Θ ise $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|\cos\theta$ dir. Buradan $\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{\|\vec{a}\|.\|\vec{b}\|}$ dir. $\vec{a} = (a_1 a_2 a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1 b_2 b_3)$ olduğundan $\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$ şeklinde elde edilir.

2.19. Apollonius Teoremi: A ile aynı anda seçilen B düzlemde herhangi şekilde seçilen iki nokta olsun. P noktasında keyfi hareketli bir nokta olsun ve A ve B noktalarının P ye olan uzaklığının oranı sabit bir k sayısı olsun. Bu olası durum için $k \neq 1$ ise P noktalarının geometrik yeri birini içten diğerini dıştan kesen bir çemberdir. $k=1$ ise P noktalarının geometrik yeri A ve B ye eşit uzaklıktaki doğrudur (Haruki ve Rassias 1996).

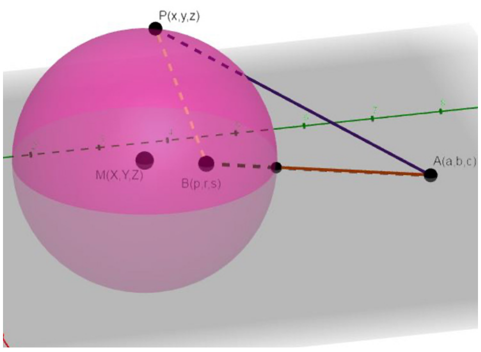
2.20. Apollonius çemberi: $a \neq 0$ ve $a \in R$ olacak şekilde $A(-a,0)$ ve $B(a,0)$ noktaları için $\frac{|PA|}{|PB|} = k(k \neq 1 \text{ ve } k > 0)$ koşulunu sağlayan $P(x,y)$ noktalarının geometrik yeri, merkezi A ve B noktalarının bulunduğu doğru üzerinde bulunan ve merkezi $A(-a,0)$ ile $B(a,0)$ noktalarından farklı olan bir çemberdir. Bu şekilde ifade edilen çembere "Apollonius çemberi" (Şekil 1) denir. $k=1$ ise $P(x,y)$ olacak şekilde seçilen noktalar için geometrik yer, orijinden geçen ve AB doğrusuna dik olan doğrudur. (Brannan vd. 2011).



Şekil 1:Apollonius Çemberi

3. MATERYAL VE METOT

Teorem: Uzayda Seçilen Üç Nokta ile Küre Oluşturmak: Verilen üç nokta ile bir küre elde edilmek istenmektedir. Bu küre için özel şartlar bulunmaktadır.



Şekil 2: Vektörler Üzerinde Seçilen Üç Nokta

Uzayda verilen $A(a,b,c)$ noktası kürenin dışında, $B(p,r,s)$ noktası kürenin içinde (uzantısı merkezden geçecek şekilde) ve $P(x,y,z)$ noktası kürenin üzerinde üç nokta olarak verilsin.

$M(X,Y,Z)$ olan bir küre için

$$X=\left(p+\frac{k^2}{2k-1}(a-p)\right),\ Y=\left(r+\frac{k^2}{2k-1}(b-r)\right),\ Z=\left(s+\frac{k^2}{2k-1}(c-s)\right) \text{ ve}$$

Fçevre

şeklinde bulunmuştur. Aynı zamanda kürenin yüzey alanı:

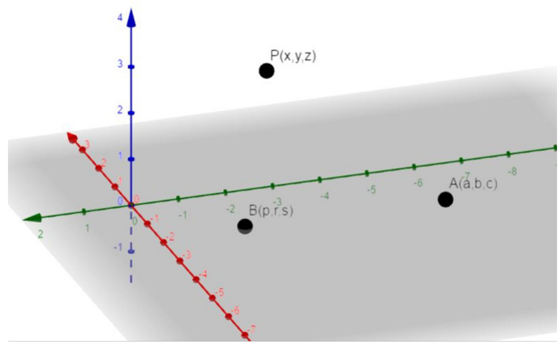
$$= 4\pi = \frac{\left|\vec{A}\right|^2 k(k-1) + \left|\vec{B}\right|\left(2k^3+4k^2-6k+2\right) + \left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}$$

ve hacmi:

$$= \frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{= \frac{\left|\vec{A}\right|^2 k(k-1) + \left|\vec{B}\right|\left(2k^3+4k^2-6k+2\right) + \left\langle \vec{A},\vec{B}\right\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}}\right)^3$$

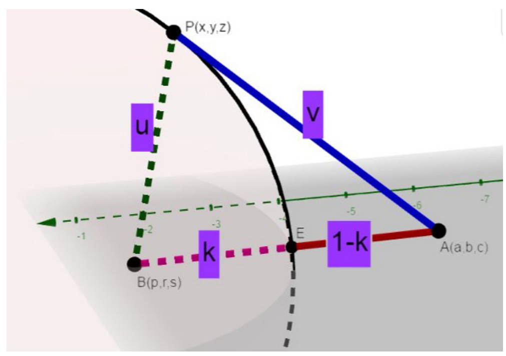
şeklinde ifade edilir. Burada istenilen öncülleri sağlayan uzayda alınan üç nokta için genel küre formülü; yarıçap, kürenin yüzey alanı ve kürenin hacmi elde edilmiştir.

İspat:



Şekil 3: Uzayda Üç Nokta

Uzayda verilen üç nokta $A(a,b,c)$, $B(p,r,s)$ ve $P(x,y,z)$ noktaları olsun.



Şekil 4: Apollonius Oran Özelliği

$[PB]=u$ ve $[PA]=v$ doğru parçaları olsun. O zaman Şekil 1'deki gibi verilen noktaları birleştirerek bir üçgen PAB üçgeni (Şekil 2)oluşturulmuş olur.

Apollonius çemberi özelliği kullanılırsa; $\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} = \frac{|\vec{k}|}{1-|\vec{k}|}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{(x-p)^2+(y-r)^2+(z-s)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2+p^2+r^2+s^2-2(xp+yr+zs)}$$

$$= \sqrt{\left|\vec{P}\right| + \left|\vec{B}\right| - 2\left\langle \vec{P},\vec{B}\right\rangle} \text{ ve}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2+a^2+b^2+c^2-2(xp+yr+zs)}$$

$$= \sqrt{\left|\vec{P}\right| + \left|\vec{A}\right| - 2\left\langle \vec{P},\vec{A}\right\rangle}$$

şeklinde bulunur. Burada iki nokta arasındaki vektör uzunluk formülü kullanılarak $[PB]=u$ ve $[PA]=v$ doğru parçalarının uzunlukları elde edilir. Şimdi verilen noktalar için değişen k sabiti bulunsun;

$$\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}=\frac{|\vec{k}|}{1-|\vec{k}|}\Rightarrow|\vec{u}|-|\vec{u}|.|\vec{k}|=|\vec{v}||\vec{k}|\Rightarrow|\vec{k}|(|\vec{u}|+|\vec{v}|)=|\vec{u}|$$

$$|\vec{k}|=\frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|+|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{|\vec{P}|+|\vec{B}|-2\langle\vec{P},\vec{B}\rangle}}{\sqrt{|\vec{P}|+|\vec{B}|-2\langle\vec{P},\vec{B}\rangle}\sqrt{|\vec{P}|+|\vec{A}|-2\langle\vec{P},\vec{A}\rangle}}$$

olarak bulunmuştur. $\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|}=\frac{|\vec{k}|}{1-|\vec{k}|}$ olduğundan u ve v yerine yerleştirilip küre denklemi elde etmeye çalışılmaktadır.

$\frac{\sqrt{(x-p)^2+(y-r)^2+(z-s)^2}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}=\frac{k}{1-k}$ her iki tarafın karesini alınırsa;

$\frac{(x-p)^2+(y-r)^2+(z-s)^2}{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=\frac{k^2}{k^2-2k+1}$ içler dışlar çarpımı yapılarak yok etme kullanılırsa;

$$\frac{x^2-2xp+p^2+y^2-2yr+r^2+z^2-2zs+s^2}{x^2-2xa+a^2+y^2-2yb+b^2+z^2-2cz+c^2}=\frac{k^2}{k^2-2k+1}\Rightarrow$$

$$x^2k^2-2xpk^2+p^2k^2+y^2k^2-2yrk^2+r^2k^2+z^2k^2-2zsk^2+s^2k^2-2x^2k+4xpk-2p^2k$$
$$-2y^2k+4yrk-2r^2k-2z^2k+4zsk-2s^2k+x^2-2xp+p^2+y^2-2yr+r^2+z^2-2zs+s^2$$
$$=x^2k^2-2xak^2+a^2k^2+y^2k^2-2ybk^2+z^2k^2-2zck^2+c^2k^2$$

şeklinde elde edilir. Taraf tarafa düzenleme işlemi yapılırsa;

$$x^2+2x\left(\frac{-pk^2+2pk-p+ak^2}{1-2k}\right)+y^2+2y\left(\frac{-rk^2+2rk-r+bk^2}{1-2k}\right)+z^2+2z\left(\frac{-sk^2+2sk-s+ck^2}{1-2k}\right)$$

$$=p+r+s-k\left(\frac{p^2+r^2+s^2-a^2-b^2-c^2}{1-2k}\right)$$ elde edilir. Buradan

$K=\left(\frac{-pk^2+2pk-p+ak^2}{1-2k}\right)$, $L=\left(\frac{-rk^2+2rk-r+bk^2}{1-2k}\right)$, $M=\left(\frac{-sk^2+2sk-s+ck^2}{1-2k}\right)$ olarak ifade edilerek eşitliğin iki tarafında K,L,M'nin karelerini eklenirse;

$$\left(x+\frac{-pk^2+2pk-p+ak^2}{1-2k}\right)^2+\left(y+\frac{-rk^2+2rk-r+bk^2}{1-2k}\right)^2+\left(z+\frac{-sk^2+2sk-s+ck^2}{1-2k}\right)^2$$

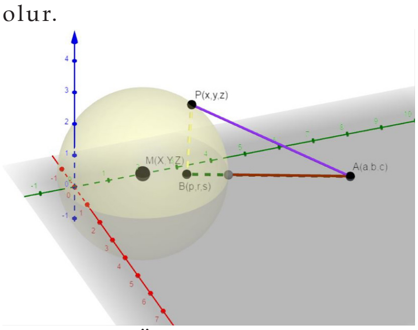
$$=\frac{(1-2k)^2[p^2+r^2+s^2]-k^2(1-2k)(p^2+r^2+s^2-a^2-b^2-c^2)+(-pk^2+2pk-p+ak^2)+(-rk^2+rk-r+bk^2)^2+(-sk^2+2sk-s+2ck^2)}{(1-2k)^2}$$

$$=\frac{(a^2+b^2+c^2)[k(k-1)^2]+(p^2+r^2+s^2)(2-6k+4k^2+2k^3)+2k^2(k-1)(ap+br+cs)}{(2k-1)^2}$$

elde edilir.Burada

$$\left(x-\left(p+\frac{k^2}{2k-1}(a-p)\right)\right)^2+\left(y-\left(r+\frac{k^2}{2k-1}(b-r)\right)\right)^2+\left(z-\left(s+\frac{k^2}{2k-1}(c-s)\right)\right)^2$$

$$=\frac{|\vec{A}|^2k(k-1)+|\vec{B}|(2k^3+4k^2-6k+2)+\langle\vec{A},\vec{B}\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}$$ genel küre denklemi yarıçapa bağlı kalmadan elde edilmiş olur.



Şekil 5: Üç Nokta ile Oluşan Küre

Böylece merkezi $M(X,Y,Z)$ olan bir küre için

$X=\left(p+\frac{k^2}{2k-1}(a-p)\right)$, $Y=\left(r+\frac{k^2}{2k-1}(b-r)\right)$, $Z=\left(s+\frac{k^2}{2k-1}(c-s)\right)$ ve yarıçapın karesi

$r^2=\frac{|\vec{A}|^2k(k-1)+|\vec{B}|(2k^3+4k^2-6k+2)+\langle\vec{A},\vec{B}\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}$ şeklinde bulunur.

Aynı zamanda kürenin yüzey alanı:

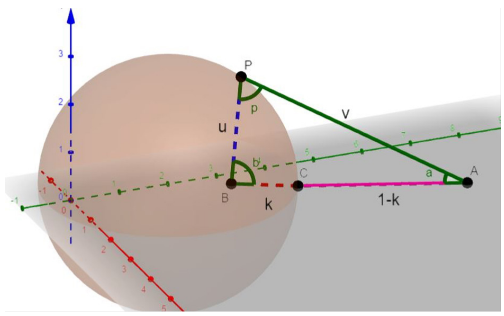
$$=4\pi\frac{|\vec{A}|^2k(k-1)+|\vec{B}|(2k^3+4k^2-6k+2)+\langle\vec{A},\vec{B}\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}$$

ve hacmi:

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{|\vec{A}|^2k(k-1)+|\vec{B}|(2k^3+4k^2-6k+2)+\langle\vec{A},\vec{B}\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}}\right)^3$$

şeklinde ifade edilir. Burada istenilen öncülleri sağlayan uzayda alınan üç nokta için genel küre formülü; yarıçap, kürenin yüzey alanı ve kürenin hacmi elde edilmiştir.

4. BULGULAR



Şekil 6: Üç Noktanın Açısal İlişkileri

Oluşan PAB üçgeninde sinüs teoremi uygulanırsa;

$$\frac{u}{\sin a}=\frac{v}{\sin b}=\frac{1}{\sin p}$$

$$\frac{\sqrt{|\vec{P}|+|\vec{B}|-2\langle\vec{P},\vec{B}\rangle}}{\sin a}=\frac{\sqrt{|\vec{P}|+|\vec{A}|-2\langle\vec{P},\vec{A}\rangle}}{\sin b}=\frac{1}{\sin p}$$ elde edilir.

Aynı zamanda cosinüs teoremi uygulanırsa;

$$u^2=v^2+1^2-2v\cos a$$

$$v^2=u^2+1^2-2u\cos b$$

$$1^2=u^2+v^2-2uv\cos p$$

bulunur. Buradan ikili taraf tarafa toplama işlemi yapılırsa yok etme metodu ile

$$u^2=v^2+1(u\cos b-v\cos a)$$

$$u^2=1^2+v(u\cos p-1\cos a)$$

$$v^2=1^2+u(v\cos p-1\cos b)$$

$$u\cos b+v\cos a=1$$

$$(a-p)^2+(b-r)^2+(c-s)^2=1$$

şeklinde elde edilir.

Örnek: Uzayda verilen üç nokta $A(1,2,-1)$ $B(2,0,-1)$ ve $P(-1,-2,0)$ noktaları olsun. Bu üç nokta ile verilen öncüller yardımı ile bir küre oluşturulur. Oluşan kürenin merkezi $M(X,Y,Z)$ ile küre yüzeyinde bulunan noktası arasındaki uzunluk bulunarak kullanılan yarıçapa bağlı olmayan küre denklemi karşılaştırılarak bulunan yarıçap ile elde edilen sonucun eşit olduğu gösterilmektedir. Bunun için öncelikle

$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1-2)^2 + (-2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-1-1)^2 + (-2-2)^2 + (0-(-1))^2} = \sqrt{21}$$

$$|\vec{k}| \cong 0.44$$

olarak bulunmuş buradan, merkezi *M(X,Y,Z)* olan bir küre elde etmek için

$$\text{X}=\left(2+\frac{0.44^2}{2.0,44-1}(1-2)\right) \cong 3{,}6,$$

$$\text{Y}=\left(0+\frac{0{,}44^2}{2.0,44-1}(2-0)\right) \cong -3{,}22,$$

$$Z=\left(0+\frac{0.44^2}{2*0.44-1}(-1-(-1))\right)=-1$$ sağlanmış ve yarı çapın değeri

$$r=\sqrt{\frac{(6*0.44*(0.44-1)+\sqrt{3}(2*0.44\text{^}3+4*0.44\text{^}2-6*0.44+2)+3*2*0.44*(0.44-1)]\backslash(2*0.44-1)\text{^}2)}{(2*0.44-1)^2}}$$

$\cong$10,1şeklinde bulunur.

Aynı zamanda kürenin yüzey alanı:

$$4\pi*\frac{(6*0.44*(0.44-1)+\sqrt{3}(2*0.44\text{^}3+4*0.44\text{^}2-6*0.44+2)+3*2*0.44*(0.44-1)]\backslash(2*0.44-1)\text{^}2)}{(2*0.44-1)^2}$$

ve hacmi:

$$\frac{4}{3}\pi\sqrt{\frac{(6*0.44*(0.44-1)+\sqrt{3}(2*0.44\text{^}3+4*0.44\text{^}2-6*0.44+2)+3*2*0.44*(0.44-1)]\backslash(2*0.44-1)\text{^}2)}{(2*0.44-1)^2}}$$

olarak bulunur.

5. SONUÇ VE TARTIŞMA

Yapılan çalışmalar doğrultusunda Üç boyutlu analitik uzayda yarıçapı bilinmeyen bir kürenin yeni ve genel bir denklemine ulaşılarak literatür taramasında elde edilmemiş, sonraki çalışmalara farklı bir bakış açışı katacak genel kurallar bulunmuştur. Üç boyutlu analitik uzayda incelenen küre için sonsuz olasılıklar içerisinde verilen üç nokta ile belirli özellikler elde edilerek genellenmiştir. Bunlar;

1. Apollonius Çemberi özelliği kullanılarak 3 boyutlu analitik uzayda verilen koşulları sağlayan ve üç nokta ile oluşan bir küre oluşturulmuştur.

2. Literatür taramasında elde edilmemiş ve incelenmemiş özelliklere sahip yeni bir küre denklemi elde edilmiştir. Bu küre denklemi

$$\left(x-\left(p+\frac{k^2}{2k-1}(a-p)\right)\right)^2+\left(y-\left(r+\frac{k^2}{2k-1}(b-r)\right)\right)^2+\left(z-\left(s+\frac{k^2}{2k-1}(c-s)\right)\right)^2$$
$$=\frac{\left|\vec{A}\right|^2 k(k-1)+\left|\vec{B}\right|\left(2k^3+4k^2-6k+2\right)+\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}$$

şeklinde denklem elde edilmiştir.

3. Yarıçapa bağlı kalmadan bu üç nokta ile kürenin merkezi $M(X,Y,Z)$ olan bir küre için

$$\text{X}=\left(p+\frac{k^2}{2k-1}(a-p)\right),\ \text{Y}=\left(r+\frac{k^2}{2k-1}(b-r)\right),\ \text{Z}=\left(s+\frac{k^2}{2k-1}(c-s)\right)$$

noktaları elde edilmiştir.

4. Yine kürenin yarıçapını veren formül

$$r=\sqrt{\frac{\left|\vec{A}\right|^2 k(k-1)+\left|\vec{B}\right|\left(2k^3+4k^2-6k+2\right)+\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}}$$

şeklinde elde edilmiştir.

5. 3 boyutlu analitik uzayda oluşturduğumuz kürenin hacmini bulmak için;

$$V=\frac{4}{3}\pi\left(\sqrt{\frac{\left|\vec{A}\right|^2 k(k-1)+\left|\vec{B}\right|\left(2k^3+4k^2-6k+2\right)+\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}}\right)^3$$

6. Kürenin yüzey alanı;

$$=4\pi\frac{\left|\vec{A}\right|^2 k(k-1)+\left|\vec{B}\right|\left(2k^3+4k^2-6k+2\right)+\left\langle\vec{A},\vec{B}\right\rangle 2k(k-1)}{(2k-1)^2}$$

şeklinde elde edilmiştir.

7. Oluşturulan PAB üçgeninde $[PB]=u$ ve $[PA]=v$ doğru parçaları için $u\cos b+v\cos a=1$ elde edilir.

Küre için yarıçapa bağlı kalmayan ve uzayda vektörler yardımı ile elde edilen bu yeni formül ile merkez ve yarıçap aynı zamanda kürenin diğer özellikleri elde edilebilmektedir. Bu çalışma kullanılarak üç boyutlu küresel cisimler (paraboloid gibi) için yeni özellikler ve yeni genel denklemler elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Ay, M. (2013). "Küre Yüzeyi Üzerinde Apollonius Eğrileri". Yüksek Lisans Tezi, Celal Bayar Üniversitesi. Aydın-Türkiye.

Ayres, F. (1954). Schaum's Outline Of Theory And Problems Of Plane And Spherical Trigonometry; Mcgraw-Hill New York-ABD.

Bell, A. (2006). "Hansen's Right Triangle Theorem: Its Converse And A Generalization", Forum Geometricorum, 6: 335-342.

Brannan, D., Esplen, F. ve Gray, J. (2011). Geometry: Cambridge University Press. Cambridge-Birleşik Krallık.

Brannan, D., Esplen, F. ve Gray, J. (1999). Geometry: Cambridge University Press. Cambridge-Birleşik Krallık.

Hansen, D. W. (2003). "On İnscribed And Escribed Circles Of Right Triangles, Circum Scribed Triangles And TheFour-Square, Three-Square Problem". The Mathematics Teacher, 96 (5): 358-364. doi: Https://Doi.Org/10.5951/Mt.96.5.0358.

Haruki, H.,Rassias, T. M. (1996). "A New Characteristic Of Möbiustrans for mations by use Of Apollonius Points Of Triangles". Journal Of Mathematical Analysis And Applications, 197: 14-22.

Karataş, H. G. (2016). "Dik Üçgenler İle Pythagorean Üçgenleri İçindeki Pythagorean Üçgenlerinin Bazı Özellikleri ve Öğretimi Üzerine Bir Araştırma". Yüksek Lisans Tezi, Necmettin Erbakan Üniversitesi. Konya-Türkiye.

Kirişçi, S. Ö. (2017). "Bazı Çokgenlerin Apollonius Noktaları Yardımıyla Möbius Dönüşümlerinin Karakterizasyonları". Yüksek Lisans Tezi, Aydın Kocatepe Üniversitesi. Aydın-Türkiye.

Kramer, A.V., Luca, F. (2000) "Some Remarks on Heron Triangles." Acta Academiae Paedagogicae Agriensis, SectioMathematicae, 27, 25–38,ISSN 1787-6117.

Şahin, R. (1997). Geometri 1 – 2: Sürat Yayınları. İstanbul-Türkiye.

Van De Walle, J. A. (2001). Elementary And Middle School Mathematics. Teaching Developmentally: Longman. New York-ABD.

Zelator, K. (2008). "Certain Properties Of Pythagorean Triangles Involving TheInterior Diameter 2ϱ , And The Exterior

Diameters 2ϱα, 2ϱβ, 2ϱγ; Part II: TheLegs Case"doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.0803.3605