Trakya Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Dergisi
B Serisi, Cilt 3, No 1, 3(1), 17-28, 2002
ISSN 1302 647X

LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNDE KARŞILAŞILAN ÖZEL DURUMLARIN MATEMATİK ANALİZİ

Yılmaz YÜCEL*

ÖZET: Burada L.P. (Lineer Programlama) analitik-nümerik açıdan ele alınmış simpleks algoritmasında karşılaşılan özel durumlar matris-vektör işlemleri ile analiz edilmiştir.Bunlar:

1. Dejenerasyon , 2. Sınırsız çözümler, 3. Alternatif optimum çözümler olacaktır.

Anahtar sözcükler : Simpleks metodu, Dejenerasyon, Sınırsız çözümler, Alternatif çözümler

MATHEMATICAL ANALYSES OF SOME SPECIAL CASES FACED IN LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS

SUMMARY: This article introduces some important cases often encountered in the simplex method applications The means of explanations are numerical examples ilustrating different cases. The cases discussed inlude:

1. Degeneracy, 2. Unbounded solutions, 3. Alternative optimal solutions.

Keywords: Simplex Method, Degeneracy, Unbounded solutions, Alternative solutions.

GİRİŞ: Burada lineer programlama problemlerinde karşılaşılan özel durumların analizi yapılacaktır. Bunlar sırasıyla

1.Dejenerasyon
2.Sınırsız çözümler
3.Alternatif optimum çözümler olacaktır.

Nümerik örnek olarak Taha 'nın verdiği örnekler değişik bir notasyon ile ve daha detaylı olarak Walsh 'ın notasyonları ile analiz edilmeye çalışılacaktır[4,6].

1-Dejenerasyon :

Temele girecek vektörün

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho|y_{\rho k}>0}{Min} \left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right)$$

tek olduğu varsayılır. Eğer bu oran tek değilse

$$(\beta_\rho - \beta_l \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}}) = 0 \quad , \quad \rho \neq l \quad \text{için}$$

olacak böylece $\vec{P_0}$ yine

$$\vec{P_0} = \sum_{\substack{\rho \varepsilon I \\ \rho \neq l}} (\beta_\rho - \beta_l \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}}) \vec{a_\rho} + \frac{\beta_l}{y_{lk}} \vec{a_k}$$

m adet vektörün lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilmekte ancak vektörlerden birinin katsayısı sıfır olmaktadır. Böyle bir lineer programlama problemi için dejeneredir denir.

Dejenere bir çözüm

$$\vec{P_0} = \sum_{\rho \varepsilon I} \beta_\rho \vec{a_\rho} \quad , \quad (\beta_l = 0)$$

---

*Yrd. Doç. Dr. Trakya Ün. Müh.-Mim. Fak. Bilg. Müh. Böl. Edirne

olarak ifade edilebilir. Buna göre temel olmayan bir $\vec{a}_k$ vektörü temele sokulursa

$$x_k = \underset{\rho|y_{\rho k}>0}{Min} \left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right) = \frac{\beta_l}{y_{lk}} = \frac{0}{y_{lk}} = 0$$

olacağından $\vec{a}_l$ vektörü $(y_{lk} > 0)$ olduğu müddetçe mutlaka temeli terk edecektir. Mademki $x_k = 0$ dır. O halde Yeni çözümün temel değişkenleri aynı kalacaktır. Çünkü

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \frac{0}{y_{lk}} = 0 \quad \text{ve} \quad \beta_\rho' = \beta_\rho - \beta_l \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}} = \beta_\rho$$

olacaktır. Böylece amaç fonksiyonunun yeni değeri değişmeyecektir. Bunun yanında yeni çözümde yine dejenere olacaktır. Bu yüzden ardışık çözümlerin hepsinin de dejenere olma olasılığı vardır. Bu durumdaki lineer programlama çözümleri sonsuz iterasyon devam edebilir. Bu hale halkalanma (cycling) denir. Ancak bu her dejenere çözümün halkalanma göstereceği anlamına gelmez [4].

Dejenerasyon geçici veya kalıcı olabilir. Aşağıdaki problem kalıcı dejenerasyona bir örnektir.

$$Z = Maxf\ (x) = 3x_1 + 9x_2$$

$$x_1 + 4x_2 + x_3 = 8$$

$$x_1 + 2x_2 + x_4 = 4$$

$$x_j \geq 0$$

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	3	9	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	8	1	4	1	0
0	x_4	4	1	2	9	1
	Z_j	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-	-3	-9	0	0

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	3	9	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4
9	x_2	2	1/4	1	1/4	0
0	x_4	0	1/2	0	-1/2	1
	Z_j	18	9/4	9	9/4	0
	$Z_j - c_j$	-	-3/4	0	9/4	0

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	3	9	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4
9	x_2	2	0	1	1/2	-1/2
3	x_1	0	1	0	-1	2
	Z_j	18	3	9	3/2	3/2
	$Z_j - c_j$	-	0	0	3/2	3/2

Bu problemin başlangıcında

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \vec{P}_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \vec{\beta} = \vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0 = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$|Z_k - c_k| = Max\{|Z_j - c_j|\} = |0-9| = 9$$

Buna göre temele girecek $\vec{a}_k$ vektörü ***G*** 'nin ikinci kolon vektörüdür. Çıkış kriteri ise

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho|y_{\rho k}>0}{Min}\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right)$$

olup β_ρ 'lar 8,4 ve $y_{\rho k}$ lar ise 4,2 olup $\frac{\beta_l}{y_{lk}} = 2$ ve bu oran tek değildir. $\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \frac{8}{4} = 2$ yani temelden çıkacak vektör olarak ***B*** 'nin 1 'inci kolon vektörünü alalım. Temelden çıkacak vektör için geçerli olan

$$\vec{a}_l = \frac{1}{y_{lk}}\vec{a}_k - \sum_{\substack{\rho \varepsilon I \\ \rho \neq l}} \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}}\vec{a}_\rho \quad \text{ifadesiyle} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\left\{\frac{4}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde de gösterebiliriz. $\vec{a}_k$ vektörünü temele sokup $\vec{a}_l$ vektörünü çıkardığımız zaman temel çözüm yine aynı kalacaktır.

$$\vec{P}_0 = \sum_{\substack{\rho \varepsilon I \\ \rho \neq l}} (\beta_\rho - \beta_l \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}})\vec{a}_\rho + \frac{\beta_l}{y_{lk}}\vec{a}_k \qquad \left\{(4 - 8\frac{4}{2})\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\} + \frac{8}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Görüldüğü gibi temelden çıkacak vektörlerden birinin katsayısı sıfırdır. Böylece dejenerasyondan söz edebiliriz.

Eğer $\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \frac{4}{2} = 2$ olarak seçseydik yine bir dejenerasyon ile karşılaşacaktık. Bunun sebebi bir sonraki tabloya geçerken $A' = A - \frac{B}{P}L$ olması olup burada

$$\begin{matrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{matrix}$$

$\uparrow$ Temele girecek vektore ait kolon

Pivot kolondan 4 'ü seçersek $(4 - 8\frac{2}{4}) = 0$ eğer 2 'yi seçersek $(8 - 4\frac{4}{2}) = 0$ olacaktır. Böylece

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho|y_{\rho k}>0}{Min}\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right) \text{ tek değilse } \rho \neq l \text{ için } \frac{\beta_l}{y_{lk}} = \frac{0}{y_{lk}} = 0 \quad \text{ve} \quad \beta_\rho' = \beta_\rho - \beta_l \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}} = \beta_\rho$$

olmaktadır.

İkinci simpleks tablosunda ise

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

olmaktadır. Burada $|Z_k - c_k| = Max\{|Z_j - c_j|\} = |9/4 - 3| = 3/4$ Buna göre temele sokulacak $\vec{a}_k$ vektörü **G** 'nin 1 'inci kolon vektörüdür. Çıkış kriteri $\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho|y_{\rho k}>0}{Min} (\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}})$ ya göre β_ρ 'lar 2,0 ve $y_{\rho k}$ lar ise 1/4 ve 1/2 olup

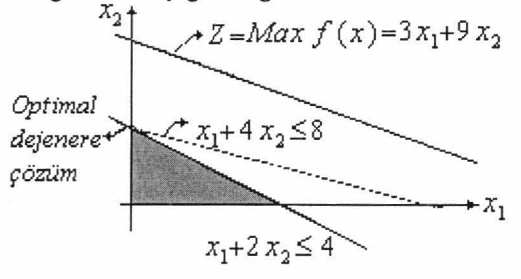
$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho|y_{\rho k}>0}{Min} (\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}) = \frac{0}{1/2} = 0$$

ve temelden çıkacak vektör **B** 'nin ikinci kolon vektörüdür. Böylece $\vec{a}_l$ ve $\vec{a}_k$ sırasıyla

$$\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{1/2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \left\{\frac{1/4}{1/2}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad \left\{(2-0\frac{1/4}{1/2})\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}\right\} + \frac{0}{1/2}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

olmaktadır. Temeldeki vektörlerden birinin katsayısı yine sıfır olmaktadır. Böylece 3 'üncü ve son tabloya temel değişkenlerden birinin aldığı değer yine sıfır olarak geçtiğinden çözüm dejenere optimal çözümdür diyebiliriz. Amaç fonksiyonunun değeri değişmemekte yine 18 olarak kalmaktadır.

Problemi grafik yoluyla çözdüğümüzde aşağıdaki gibi olmaktadır.



Şimdi de geçici dejenerasyona ait bir problem ele alalım.

$$Z = Maxf\ (x) = 2x_1 + x_2$$

$$4x_1 + 3x_2 + x_3 = 12$$

$$4x_1 + x_2 + x_4 = 8$$

$$4x_1 - x_2 + x_5 = 8$$

$$x_j \ge 0$$

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	2	1	0	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	12	4	3	1	0	0
0	x_4	8	4	1	0	1	0
0	x_5	8	4	-1	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-	-2	-1	0	0	0

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	2	1	0	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	4	0	2	1	-1	0
2	x_1	2	1	1/4	0	1/4	0
0	x_5	0	0	-2	0	-1	1
	Z_j	4	2	1/2	0	1/2	0
	$Z_j - c_j$	-	0	-1/2	0	1/2	0

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	2	1	0	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1	x_2	2	0	1	1/2	-1/2	0
2	x_1	3/2	1	0	-1/8	3/8	0
0	x_5	4	0	0	1	-2	1
	Z_j	5	2	1	1/4	1/4	0
	$Z_j - c_j$	-	0	0	1/4	1/4	0

Bu problemin başlangıç tablosunda

$$B = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \quad \vec{P}_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \vec{\beta} = \vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$|Z_k - c_k| = Max\{|Z_j - c_j|\} = |0-2| = 2$$

G 'nin birinci kolon vektörü temele sokulacak vektördür. $\dfrac{\beta_l}{y_{lk}} = \dfrac{8}{4} = 2$ olup bu oran tek değildir.

Biz burada temelden çıkacak vektör olarak B ' nin 2 'inci kolon vektörünü seçelim.

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} - \left\{ \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{4}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ olup $\vec{a}_k$ yı temele sokup $\vec{a}_l$ yi temelden çıkardığımız zaman temel çözüm yine aynı olacak fakat temeldeki vektörlerden birinin katsayısı sıfır olacak, dejenerasyonla karşılaşılacaktır.

$$\vec{P}_0 = \sum_{\substack{\rho \in I \\ \rho \neq l}} (\beta_\rho - \beta_l \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}})\vec{a}_\rho + \frac{\beta_l}{y_{lk}}\vec{a}_k \qquad \left\{ (12 - 8\frac{4}{4})\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + (8 - 8\frac{4}{4})\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + \frac{8}{4}\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

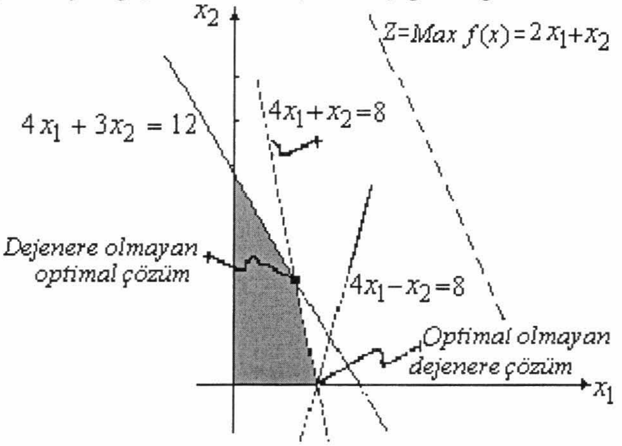
$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1/4 & 1/4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$|Z_k - c_k| = Max\{|Z_j - c_j|\} = |1/2 - 1| = 1/2$ olup ***G*** 'nin 2 'inci kolon vektörü temele girecektir.

$\dfrac{\beta_l}{y_{lk}} = \dfrac{4}{2} = 2$ ve böylece temelden çıkacak vektör ***B*** 'nin 1 'inci kolon vektörü olamaktadır.

$$\vec{P}_0 = \sum_{\substack{p \in I \\ p \neq l}} (\beta_p - \beta_l \frac{y_{pk}}{y_{lk}}) \vec{a}_p + \frac{\beta_l}{y_{lk}} \vec{a}_k \qquad \left\{ (2 - 4\frac{1/4}{2}) \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} + (0 - 4\frac{-2}{2}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} + \frac{4}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Böylece 3 'üncü ve son tabloya değişkenlerden hiçbiri sıfır değerini alarak geçmediğinden çözüm dejenere değildir. Dejenerasyon geçicidir. Grafik çözüm aşağıdaki gibidir.



Eşit oranlı satırlardaki her eleman bulunduğu satırın pivot kolon üzerindeki elemanına bölünerek oranlar hesaplanır. Bu oranlar her defasında eşit oranlı satırların aynı kolon üzerindeki elemanına ait olmak ve önce birim matristen başlamak üzere soldan sağa giderek sıra ile mukayese edilirler. Eşit olmayan iki orana rastlanıldığında mukayeseye son verilir ve eşit olmayanlar arasında en küçük değerli oranın bulunduğu satır pivot pivot elemanın bulunduğu satır olarak alınır[2,3].

Yozlaşma halinde iterasyonlar sonucunda tekrar başlangıç tablosuna dönülmesi halkalanma (cycling) pratikte ender olarak karşılaşılan bir durum olup bunu bir problem üzerinde görelim [1].

$$Z = Max\ f(x) = -\frac{3}{4}x_1 + 150x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 6x_4$$

$$-\frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 + x_5 \quad = 0$$

$$\frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 + x_6 \quad = 0$$

$$x_3 \quad + x_7 = 1$$

$$x_j \geq 0$$

Tablo I

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	0	**1/4**	-60	-1/25	9	1	0	0
0	x_6	0	1/2	90	-1/50	3	0	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0

Tablo II

-3/4	x_1	0	1	-240	-4/25	36	4	0	0
0	x_6	0	0	**30**	3/50	-15	-2	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_j	0	-3/4	180	-3/25	27	-3	0	0
	$Z_j - c_j$	-	0	30	7/50	-33	-3	0	0

Tablo III

-3/4	x_1	0	1	0	**8/25**	-84	-12	8	0
150	x_2	0	0	1	1/500	-1/2	-1/15	1/30	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_j	0	-3/4	0	3/50	-12	-1	-1	0
	$Z_j - c_j$	-	0	0	2/25	-18	-1	-1	0

Tablo IV

-1/50	x_3	0	25/8	0	1	-525/2	-75/2	25	0
150	x_2	0	-1/60	1	0	**1/40**	1/120	-1/60	0
0	x_7	1	-25/8	0	0	525/2	75/2	-25	1
	Z_j	0	2/4	150	-1/50	8	2	-3	0
	$Z_j - c_j$	-	-1/4	0	0	3	2	-3	0

Tablo V

-1/50	x_3	0	-125/2	10500	1	0	**50**	-150	0
6	x_4	0	-1/4	40	0	1	1/3	-2/3	0
0	x_7	1	125/2	-10500	0	0	-50	150	0
	Z_j	0	-1/4	30	-1/50	6	1	-1	0
	$Z_j - c_j$	-	1/2	-120	0	0	1	-1	0

Tablo VI

0	x_5	0	-5/4	210	1/50	0	1	-3	0
6	x_4	0	1/6	-30	-1/150	1	0	**1/3**	0
0	x_7	1	1	0	0	0	0	0	1
	Z_j	0	1	-180	-1/25	6	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-	7/4	-330	-1/50	0	0	0	0

Tablo VII

0	x_5	0	**1/4**	-60	-1/25	9	1	0	0
0	x_6	0	1/2	-90	-1/50	3	0	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j^*$	-	3/4	-150	1/50	6	0	0	0

Görüldüğü gibi yedinci tabloda başlangıç tablosuna geri dönülmüştür.

Dejenerasyonu giderecek kuralları uygulayarak işlemlere devam edersek elde edeceğimiz sonuçlar aşağıdadır.

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	-3/4	150	-1/50	6	0	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
0	x_5	0	**1/4**	-60	-1/25	9	1	0	0
0	x_6	0	1/2	90	-1/50	3	0	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-	3/4	-150	1/50	-6	0	0	0

Tablo II

-3/4	x_1	0	1	-240	-4/25	36	4	0	0
0	x_6	0	0	**30**	3/5	-15	-2	1	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_j	0	-3/4	180	-3/25	27	-3	0	0
	$Z_j - c_j$	-	0	30	7/50	-33	-3	0	0

Tablo III

-3/4	x_1	0	1	0	8/25	-84	-12	8	0
150	x_2	0	0	1	**1/500**	-1/2	-1/15	1/30	0
0	x_7	1	0	0	1	0	0	0	1
	Z_j	0	-3/4	110	-1/50	8	5/3	-7/3	0
	$Z_j - c_j$	-	0	0	2/25	-18	-1	-1	0

Tablo IV

-3/4	x_1	0	1	-160	0	-4	-4/3	8/3	0
-1/50	x_3	0	0	500	1	-250	-100/3	50/3	0
0	x_7	1	0	-500	0	**250**	100/3	-50/3	1
	Z_j	0	-3/4	110	-1/50	8	5/3	-7/3	0
	$Z_j - c_j$	-	0	-40	0	2	5/3	-7/3	0

Tablo V

-3/4	x_1	2/125	1	-168	0	0	-4/5	12/5	2/125
-1/50	x_3	1	0	0	1	0	0	0	1
6	x_4	1/250	0	-2	0	1	**2/15**	-1/15	1/250
	Z_j	-1/125	-3/4	114	-1/50	6	7/5	-11/5	-1/125
	$Z_j - c_j$	-	0	36	0	0	7/5	-11/5	-1/125

Tablo VI

-3/4	x_1	1/25	1	-180	0	6	0	2	1/25
-1/50	x_3	1	0	0	1	0	0	0	1
0	x_5	3/100	0	-15	0	15/2	1	-1/2	3/100
	Z_j	-1/20	-3/4	135	-1/50	-9/2	0	-3/2	-1/20
	$Z_j - c_j$	-	0	-15	0	21/2	0	-3/2	-1/20

2-Sınırlanmamış Çözüm :

Temele girecek vektöre karşılık tenmelden çıkacak vektörü

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho|y_{\rho k}>0}{Min}\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right)$$

ile tayin ederken $y_{\rho j}$ ler içinde en az bir tanesinin pozitif olması gerekir. Şimdi $Z_j - c_j < 0$ olan herhangi bir temel dışı *j* vektörü için $y_{\rho j} < 0$ olduğu bir lineer programlama maksimizasyon probleminin ne anlama geldiğini açıklayalım.

Varsayalım ki ; $Z_k - c_k < 0 \beta_\rho (\beta_{\rho 1}, \beta_{\rho 2}, \ldots, \beta_{\rho m}$ için) $y_{\rho k}$ $(y_{\rho 1k}, y_{\rho 2k}, \ldots, y_{\rho mk})$ $\theta > 0$ ve temelden herhangi bir vektörün çıkarılması imkansız olacaktır. Yeni çözüm aşağıdaki gibi olup bir temel çözüm değildir.

$$\sum_{\rho \varepsilon I} (\beta_\rho - \theta y_{\rho k}) \vec{a}_\rho + \theta \vec{a}_k = \vec{P}_0$$

ve amaç fonksiyonunu hesaplarsak

$$\sum c_\rho (\beta_\rho - \theta y_{\rho k}) + c_k \theta \quad , \quad (c_k > 0 \text{ olmak üzere})$$

olur. Burada θ için sınırsız olrarak herhangi bir pozitif sayı seçerek $\vec{P}_0$ vektörünü elde edebiliriz. Yani halen mümkün bir çözüm elde edilebilir. O halde Z için bir üst sınır yoktur, $c_k > 0$ varsayarak herhangi bir değere kadar arttırabiliriz.

Böylece simpleks çözüm tekniğinin uygulanması sırasında herhangi bir kademede en az bir $j \varepsilon J^*$ için $\vec{y}_j < 0$ yani bütün $y_{\rho j}$ ler pozitif değilse sonlu sayıda maksimum (minimum) program yoktur. Bu durumda
madem ki amaç denkleminin bir üst (alt) sınırı olmayacaktır , o halde işlemlere son vermek gerekecektir. Pratikte bu tür modellerin kuruluşunda hata yapılmamışsa karşılaşılmaları sadece hayal olacaktır [5].

Şimdi aşağıdaki problemi çözelim.

$$Z = Maxf\ (x) = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 10$$

$$2x_1 - x_2 + x_4 = 40$$

$$x_j \geq 0$$

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	2	1	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	10	1	-1	1	0
0	x_4	40	2	-1	0	1
	Z_j	-	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	0	-2	-1	0	0

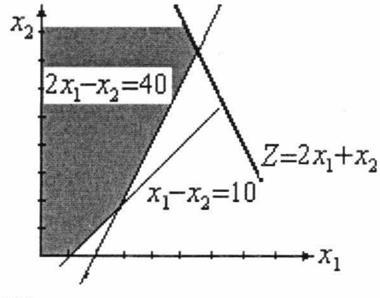
Burada temele sokulacak vektör olarak ilk bakışta ***G*** 'nin 1 'inci kolon vektörünü temele sokmamız gerekli görünmekle beraber ***G*** 'nin 2 'inci kolon vektörünü sokmamızda bir mahzur yoktur. Bu takdirde

$$\sum_{\rho \varepsilon I} (\beta_\rho - \theta\, y_{\rho k})\vec{a}_\rho + \theta\,\vec{a}_k = \vec{P}_0 \qquad [10-\theta(-1)]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + [40-\theta(-1)]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \theta\begin{bmatrix}-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10\\40\end{bmatrix}$$

olup $\theta > 0$ olmak şartıyla θ ya istediğimiz değeri verebiliriz. Böylece

$$\sum c_\rho(\beta_\rho - \theta y_{\rho k}) + c_k\theta \qquad 0[0-\theta(-1)] + 0[40-\theta(-1)] + 1\theta$$

amaç fonksiyonunun bir üst (alt) sınırı bulunmayacaktır. Bu , problemin grafik metodla çözümünde de görülebilir.



3-Alternatif Optimum çözümler :

Amaç fonksiyonu uygun bölgeyi belirleyen kısıtlardan birine paralel olabilir. Bu takdirde optimal nokta iki tane olacaktır. Ayrıca bu iki noktayı birleştiren doğru üzerindeki bütün noktalar aynı optimal çözümü verecek, yani amaç fonksiyonunun hep aynı değeri aldığı sonsuz tane çözüm vektörü bulunacaktır. Bunu aşağıda ele aldığımız problemde görelim

$$Z = Maxf\ (x) = 4x_1 + 14x_2$$

$$2x_1 + 7x_2 + x_3 = 21$$

$$7x_1 + 2x_2 + x_4 = 21$$

$$x_j \geq 0$$

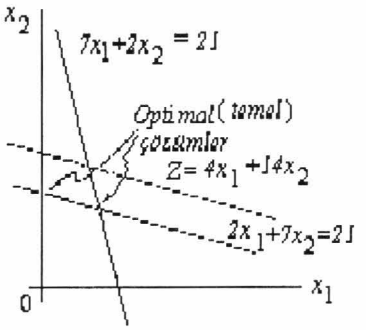
$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	4	14	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	21	2	7	1	0
0	x_4	21	7	2	0	1
	Z_j	-	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	0	-4	-14	0	0

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	4	14	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4
14	x_2	3	2/7	1	1/7	0
0	x_4	15	45/7	0	-2/7	1
	Z_j	42	4	14	2	0
	$Z_j - c_j$	-	0	0	2	0

sonucu elde edilir. Optimum çözüm tablosu incelendiğinde temel olmayan x_1 değişkeninin $Z_j - c_j = 0$ değerini aldığı görülür. Bu durum alternatif bir çözümün varlığına delalet eder Şimdi $Z_1 - c_1 = 0$ ' ı negatif bir değermiş gibi varsayalım ve x_1' i temele sokalım. Gerekli işlemler yapıldıktan sonucunda optimal çözümün değişmediği görülür.

$\vec{C}_B$	$\vec{X}_B$	c_j	4	14	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4
14	x_2	7/3	0	1	7/45	-2/45
4	x_1	7/3	1	0	-2/45	7/45
	Z_j	42	4	14	2	0
	$Z_j - c_j$	-	0	0	2	0

Grafiğini çizersek



Burada iki alternatif çözüm vardır. Bunlar $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ ve $x_1 = x_2 = 7/3$dür. Benzer şekilde iki temel çözümün ağırlıklı ortalaması olarak sonsuz sayıda alternetif çözüm elde edilebilir.

Burada $\vec{x}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 7/3 \\ 7/3 \end{bmatrix}$ alalım. $\vec{C} = \begin{bmatrix} 4 & 14 \end{bmatrix}$ olmak üzere $c_1 \vec{x}_1 = c_2 \vec{x}_2 = 42$ değeri elde edilir.

ayrıca $0 \leq \lambda \leq 1$ olmak üzere $\vec{x} = \lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2$ eşitliğini sağlayan her $\vec{x}$ vektörü de aynı Z=42 değerini verecektir. $\lambda = 0.4$ değeri için $\vec{x} = \lambda \vec{x}_1 + (1-\lambda)\vec{x}_2 = \begin{bmatrix} 1.4 \\ 2.6 \end{bmatrix}$ ve $\vec{C}\vec{x} = 42$ olacaktır. λ ya sonsuz sayıda değer verilebileceğinden sonsuz sayıda $\vec{x}$ vektörleri optimal sonucu sağlayacaktır.

KAYNAKLAR

1-Beale E.M.L "Cycling in the Dual Simplex Algorithm" Naval Logistic Quarterly, 2 (4) pp. 269-276, December 1995.

2-Bazarra M. –Jarvis J.J.– Sherali H.D. Linear programming And Network Flows John Wiley & Sons 1990.

3-Gass S. I. Linear Programming Methods & Applications 4'th Ed. 1975 McGraw Hill-Kogakusha Tokyo.

4-Taha H. A. Operations Researh An Introduction 6'th Ed. Prentice-Hall Inc. 1997 N.J.

5-Tulunay Y. Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları İst. Ün. İşl. Fak Yay. No:108 İstanbul 1980.

6-Walsh G.R. An Introduction to Linear Programming Holt, Rinehart and Winston 1971.