Trakya Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Dergisi
B Serisi, Cilt 3, No1, 29-38, 2002
ISSN 1302 647X

LİNEER PROGRAMLAMA PROBLEMLERİNİN VEKTÖREL ANALİZİ ve EKONOMİK YORUMLARI

Yılmaz YÜCEL*

ÖZET: Bir kaynaklar bankasından çekilerek icra edilecek bir miktar faaliyet veya üretilecek bir miktar ürünler grubu verilmiş olsun. Eğer kaynakların miktarı veya kullanılacak yollar kısıtlanmış ise herbir faaliyeti icra etmek veya herbir ürünü verimli bir şekilde üretmek imkânsız olabilir.
Bu bir tahsis problemidir ve yöneylem araştırması tahsis teknikleri faaliyetlere veya ürünlere kaynakların tahsis yollarını genel etkinliğe ilişkin bazı ölçümlerin optimizasyonunu sağlayacak şekilde belirler. Yöneylem araştırması işlerinde böylesine çözümleri bulmada en güçlü yöntem matematik programlama ve kullanılan matematik programlama tipi ise lineer programlamadır.

Anahtar sözcükler : Lineer programlama, matematik programlama , optimizasyon.

VECTORAL ANALYSES OF LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS AND THEIR ECONOMICAL COMMENTRIES

SUMMARY: Given that a number of activities are to be performed a number of products are to be produced and that the group of activities or products draw on a common bank of resources : if the amount of resources or the ways in which thay may be used are restricted, it may be impossible to perform each single activity or produce each single product in the most efficient way.
This is allocation problem and operations research allocation techniques determine ways of allocating resources to activities or products so that some measure of overall efficiency is optimized.In operations research work, mathematical programming is the most powerful method of finding such solutions, and the most commonly used type of mathematical programming is linear programming.

Keywords : Linear programming, mathematical programming , optimization

Burada L.P.(Linear Programming) analitik-nümerik açıdan ele alınmış simpleks algoritması matris-vektör işlemleri ile elde edilmiştir. Uygulamada çok kullanılan bir yöneylem araştırması tahsis tekniği olarak lineer programlamanın ayrıntıları Tulunay, Gass , Walsh, Bazarra, Beale, Orchard-Hays, Taha, Hadley, Hillier and Lieberman da bulunabilir[8,5,9,2,1,4,7,3,6]. Burada kullanılan notasyonların bir kısmı Walsh 'da kullanılan notasyonlardır. Nümerik olarak analizi yapılan problem ise Hillier and Lieberman'ın Operations Research 2'nd Ed.' nın 17'inci sayfasından alınmış olup üzerine ekonomik yorum katılmaya çalışılmıştır. Okuyucunun konvekslik, temel uygun çözümler v.b.g. belirli bir bilgisinin olduğu varsayılmıştır.

Bir firma ürettiği x_1 ve x_2 tipindeki mamullerin üretimini programlamak istiyor. Mamullerin imalatında kullanılan 3 ayrı malzeme olup bunların stok seviyeleri ve her tip mamulün bir biriminde kulanılan miktarlar ve bunların sağlayacağı kârlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Buna göre maksimum kârı sağlayacak optimum imalat programını bulup ekonomik yorumunu yapınız?

Malzeme	Mamül Tipleri x_1	Mamül Tipleri x_2	Malzeme Stok Seviyesi
A	1	1	50
B	1	2	80
C	3	2	140
Birim Kârlar	4	3	

* Yrd. Doç. Dr. Trakya Ün. Müh-Mim. Fak. Bilg. Müh. Böl. Edirne

$$Z = Max \quad f(x) = 4x_1 + 3x_2$$
$$x_1 + x_2 \leq 50$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 80$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 140$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

Burada Problemimiz

$$Z = Maxf\ (x) = \vec{C}\vec{x}$$
$$A\vec{x} = \vec{P_0}$$
$$\vec{x} \geq \vec{0}$$

tipinde bir problem olup

$$\vec{C} = [4{,}3] \quad A = \begin{bmatrix} 11100 \\ 11010 \\ 32001 \end{bmatrix} \quad \vec{P_0} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Burada Rank (A)=m olup A da m sayıda lineer bağımsız kolon vektörü bulunmaktadır. Bu lineer bağımsız kolon vektörlerinden bir ***B*** temeli oluşturalım. ***B*** temelindeki her kolonun indisi A daki orjinal indisini muhafaza etsin ve ***B*** deki sıraları önemli olmasın. Bu indislerin oluşturduğu seti

$$I = \{\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m\}$$

ile gösterelim. O halde

$$B = (\vec{a}_{\rho_1}, \vec{a}_{\rho_2}, \ldots, \vec{a}_{\rho_m}) = [\vec{a}_\rho]$$

dir. ***B*** temelinin vektörlerine karşı gelen değişkenlere temel değişkenler $\vec{X}_B = [\vec{x}_\rho]$, $\rho \varepsilon I$ denir. A daki kolon vektörlerinin indisleri N={1,2,...,n} setini meydana getirip $I \subset N$ dir. Temel vektörlerin dışındaki (n-m) sayıdaki vektörler $\vec{a}_j$ $j\varepsilon J = N - I$ ve bu temel dışı vektörlerin oluşturduğu matrisi ***G*** ile gösterelim. ***G*** matrisine karşılık gelen değişkenleri ise $\vec{X}_G = [x_j]$, $j\varepsilon J$ ile gösterelim. Bu değişkenlere aynı zamanda ikincil değişkenler de denir. [2]
Gevşek değişkenler eklenmesiyle oluşacak temel ve temel olmayan matrisler şöyle olacaktır.

$$B = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 32 \end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 32 \end{bmatrix}$$

$$B\vec{x}_B + G\vec{x}_G = \vec{P_0} \quad (1)$$

$$\begin{bmatrix} 100 \\ 010 \\ 001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11 \\ 12 \\ 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$$

Her iki tarafı B^{-1} ile çarparsak

$$\vec{x}_B + B^{-1}G\vec{x}_G = B^{-1}\vec{P_0} \quad (2)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1\,1 \\ 1\,2 \\ 3\,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$$

G ye ait $\vec{a}_j$ kolon vektörlerini ***B*** temelini oluşturan vektörlerin lineer kombinasyonu olarak yazarsak

$$\vec{a}_j = \sum_{\rho \varepsilon I} y_{\rho j} \vec{a}_\rho = B \vec{y}_j \quad (3)$$

$$1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{olarak yazabiliriz.}$$

(1) de $B\vec{x}_B + G\vec{x}_G = \vec{P}_0$ de $\vec{x}_G = \vec{0}$ alınırsa $B\vec{x}_B = \vec{P}_0$ veya $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0$ temel çözüm olup (1) i

$$\begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \quad \text{veya} \quad \vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0\text{'ı} \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \quad \text{olarak da yazabiliriz.}$$

$$\vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0 = \vec{\beta} \quad \text{olur ki} \quad \vec{\beta} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \quad \text{olup} \quad \vec{x}_B = \vec{\beta} \quad \text{başlangıç temel programıdır.}$$

$$\text{veya} \quad \vec{x}_B + \sum_{j\varepsilon J} x_j \vec{y}_j = \vec{\beta} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \left\{ x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} \quad \text{olarak ifade edip}$$

$x_1 = x_2 = 0$ alırsak $x_3 = 50$ $x_4 = 80$ $x_5 = 140$ olarak buluruz.

Aynı sonucu

$$x_\rho + \sum_{j\varepsilon J} x_j \vec{y}_j = \beta_\rho \quad ,\rho \varepsilon I \quad (5)$$

şeklinde formüle edersek

$$x_3 + 1x_1 + 1x_2 = 50$$

$$x_4 + 1x_1 + 2x_2 = 80$$

$$x_5 + 3x_1 + 2x_3 = 140$$

olup $x_1 = x_2 = 0$ alırsak $x_3 = 50$ $x_4 = 80$ $x_5 = 140$ olarak buluruz.

Başlangıç temel programı için optimize edilecek fonksiyonun değeri

$$\overline{Z} = \vec{C}_B \vec{x}_B = \vec{C}_B(B^{-1}\vec{P}_0) = \vec{C}_B \vec{\beta} \quad (6)$$

olup bütün ikincil değişkenlerin değeri sıfırdır. Ve

$$\overline{Z}=[0\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=[0\ \ 0\ \ 0]\left\{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\80\\140\end{bmatrix}\right\}=[0\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}50\\80\\140\end{bmatrix}=0$$

olarak bulunur.

$$\vec{C}_B\,\vec{y}_j=z_j \qquad (7)$$

olup

$$[0\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}=0 \text{ ve } [0\ \ 0\ \ 0]\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}=0$$

olur.

Temele sokulacak vektör için yani $\vec{a}_k$ vektörü için

$$|z_k-c_k|=Max\{|z_j-c_j|\}\ \forall\ j \text{ için} \qquad (8)$$

şartı gerekli olup $z_1-c_1=0-4=-4$ ve $z_2-c_2=0-3=-3$

$|z_k-c_k|=Max\ \{|z_j-c_j|\}=|0-4|=4$

yani $\boldsymbol{G}$ nin 1 inci kolon vektörü temele sokulacaktır.

Çıkış kriterinin ise

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}}=\underset{\rho|\,y_{\rho k}>0}{Min}\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right) \qquad (9)$$

ile belirlenmesi yaygındır [8]. Burada $\beta_\rho$lar 50,80,140 ve $y_{\rho k}$lar 1,3,3 olup $\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right)$lar ise

$\frac{50}{1},\frac{80}{1},\frac{140}{3}$ olup $Min\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right)=\frac{140}{3}$ yani $\boldsymbol{B}$ nin üçüncü kolon vektörü $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ temelden çıkacaktır.

Bunu temelden çıkacak vektör için (10) ile

$$\vec{a}_l=\frac{1}{y_{lk}}\vec{a}_k-\sum_{\substack{\rho\varepsilon I\\ \rho\neq l}}\frac{y_{\rho k}}{y_{lk}}\vec{a}_\rho \qquad (10)$$

ile de gösterebiliriz. Burada $\vec{a}_l$

$$\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}-\left\{\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+\frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}=\begin{bmatrix}1/3\\1/3\\1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1/3\\1/3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \text{ olur.}$$

Burada $\boldsymbol{B}$ temelinden 3 üncü kolon vektör çekilmekte ve G matrisinden 1 'nci kolon vektör $\boldsymbol{B}$ ye sokulmaktadır.

Böylece l=3 k=1 dir. y_{lk} ise $y_{lk}=y_{31}=3$ dür. $y_{\rho 11}=1, y_{\rho 21}=1, y_{\rho 31}=3$ olup $\rho\neq l$ olması gerektiğinden l=3 olduğuna göre 1'inci kolondaki 3 'üncü satır elemanı $y_{\rho 31}=1$ kullanılmaz.

$\vec{a}_k$ vektörünü temele sokup $\vec{a}_l$ vektörünü çıkardığımız zaman da temel çözüm yine ayni kalacaktır. (11) ile

$$\sum_{\substack{\rho\varepsilon I \\ \rho\neq l}} (\beta_\rho - \beta_l \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}})\vec{a}_\rho + \frac{\beta_l}{y_{lk}}\vec{a}_k = \vec{P}_0 \quad (11)$$

$$\left\{(50-140\frac{1}{3})\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (80-140\frac{1}{3})\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + (140-140\frac{3}{3})\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\} + \frac{140}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}50\\80\\140\end{bmatrix}$$

olarak buluruz.

Temelden $\vec{a}_l$ ' yi çıkarıp $\vec{a}_k$ 'yı soktuğumuzda

$$B = \begin{bmatrix}1\,0\,1\\0\,1\,1\\0\,0\,3\end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/3\\0 & 1 & -1/3\\0 & 0 & 1/3\end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 2\\1 & 2\end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix}-1/3 & 1/3\\-1/3 & 4/3\\1/3 & 2/3\end{bmatrix}$$

(3) ile **G** ye ait $\vec{a}_j$ kolon vektörlerini **B** temelini oluşturan vektörlerin lineer kombinasyonu olarak

$$\vec{a}_j = \sum_{\rho\varepsilon I} y_{\rho j}\vec{a}_\rho = B\vec{y}_j \qquad -1/3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + (-1/3)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1/3\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$1/3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + 4/3\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 2/3\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$$ olarak yazabiliriz.

(1) ile $B\vec{x}_B + G\vec{x}_G = \vec{P}_0$ $\begin{bmatrix}1\,0\,1\\0\,1\,1\\0\,0\,3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\,1\\0\,2\\1\,2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\x_5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}50\\80\\140\end{bmatrix}$ veya $\begin{matrix}x_3 + x_1 + x_5 = 50\\ x_4 + x_1 + 2x_5 = 80\\ 3x_1 + x_2 + 2x_5 = 140\end{matrix}$

olup

x_2 *ve* x_5 ikincil değişkenlerinin değeri sıfır alınırsa $x_1 = 140/3$ $x_4 = 100/3$ $x_3 = 10/3$ olarak buluruz.

$$\vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0 \quad \begin{bmatrix}1 & 0 & -1/3\\0 & 1 & -1/3\\0 & 0 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\80\\140\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}10/3\\100/3\\140/3\end{bmatrix}$$ ve $x_3 = 10/3$ $x_4 = 100/3$ *ve* $x_1 = 140/3$ olur.

(6) ile yeni

$$\overline{Z}' = \vec{C}_B\vec{x}_B = [0 \;\; 0 \;\; 4]\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_1\end{bmatrix} = [0 \;\; 0 \;\; 4]\left\{\begin{bmatrix}1 & 0 & -1/3\\0 & 1 & -1/3\\0 & 0 & 1/3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}50\\80\\140\end{bmatrix}\right\} = [0 \;\; 0 \;\; 4]\begin{bmatrix}10/3\\100/3\\140/3\end{bmatrix} = \frac{560}{3}$$

olur.

$$z_j = \vec{C}_B\vec{y}_j = [0 \;\; 0 \;\; 4]\begin{bmatrix}1/3 & -1/3\\4/3 & -1/3\\2/3 & 1/3\end{bmatrix} = [8/3 \;\; 4/3]$$

$$(c_k - z_k)x_k = \overline{Z}' - \overline{Z} = (4-0)140/3 = 560/3 - 0$$

$$Z' = \overline{Z} + (c_k - z_k)\beta_k' \qquad 560/3 = 0 + (4-0)140/3$$

olur ki $\vec{a}_k$ vektörü

$$|z_k - c_k| = Max\{|z_j - c_j|\} \; (3 - 8/3) = -1/3$$

olup ***G*** nin ikinci kolon vektörü temele girecektir.

$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho | y_{\rho k} > 0}{Min} \left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right)$$

olup β_ρ' lar10/3,100/3,140/3 ve $y_{\rho k}$' lar 1/3,4/3,2/3 olup

$$Min\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right) = \frac{10/3}{1/3} = 10$$

yani ***B*** 'nin 1 inci kolon vektörü olacaktır.
Burada ***B*** temelinden 1 inci kolon vektör çekilmekte ve ***G*** matrisinden 2 inci kolon vektör ***B*** ye sokulmaktadır.

Böylece l=1 k=2 dir. y_{lk} ise $y_{lk} = y_{12} = 1/3$dir. $y_{\rho 12} = 1$, $y_{\rho 22} = 2$, $y_{\rho 23} = 2$ olup$\rho \neq l$ olması gerektiğinden l=1 olduğuna göre 2 'inci kolondaki 1 'inci satır elemanı $y_{\rho 12} = 1$ kullanılmaz.

$$\vec{a}_l = \frac{1}{y_{lk}}\vec{a}_k - \sum_{\substack{\rho \varepsilon I \\ \rho \neq l}} \frac{y_{\rho k}}{y_{lk}} \vec{a}_\rho$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{1/3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} - \left\{\frac{4/3}{1/3}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{2/3}{1/3}\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}3\\6\\6\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}2\\6\\6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$(11) \text{ ile } \quad \left\{(100/3 - 10/3\frac{4/3}{1/3})\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + (140/3 - 10/3\frac{2/3}{1/3})\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}\right\} + \frac{10/3}{1/3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}50\\80\\140\end{bmatrix}$$

$\vec{a}_k$ vektörünü temele sokup $\vec{a}_l$ vektörünü çıkardığımız zaman

$$B = \begin{bmatrix}1\,0\,1\\2\,1\,1\\2\,0\,3\end{bmatrix} \quad B^{-1} = \begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\-4 & 1 & 1\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad G = \begin{bmatrix}0\;1\\0\;0\\1\;0\end{bmatrix} \quad B^{-1}G = Y = (\vec{y}_j) = \begin{bmatrix}-1 & 3\\1 & -4\\1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\vec{a}_j = \sum_{\rho \varepsilon I} y_{\rho j}\vec{a}_\rho = B\vec{y}_j$$

$$-1\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix} + (-4)\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + (-2)\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz.

$$(1)\text{ile } B\vec{x}_B + G\vec{x}_G = \vec{P}_0 \quad \begin{bmatrix} 1\,0\,1 \\ 2\,1\,1 \\ 2\,0\,3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\,1 \\ 0\,0 \\ 1\,1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}$$

veya

$$x_2 + x_1 + x_5 = 50$$
$$2x_2 + x_4 + x_1 = 80 \quad \text{olur.}$$
$$2x_2 + 3x_1 + x_3 = 140$$

$$\vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0 \qquad \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 40 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur.

$$z_j = \vec{C}_B \vec{y}_j = [3 \quad 0 \quad 4]\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = [1 \quad 1]$$

$(z_j - c_j)$ ler ise $(1-0)$ ve $(1-0)$ pozitif olduklarından optimum çözüm setine ulaşılmıştır.

$$\overline{Z} = \vec{C}_B \vec{x}_B = [3 \quad 0 \quad 4]\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \\ x_1 \end{bmatrix} = [3 \quad 0 \quad 4]\left\{\begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix}\right\} = [3 \quad 0 \quad 4]\begin{bmatrix} 50 \\ 80 \\ 140 \end{bmatrix} = 190$$

olarak optimum çözüme ulaşılır. $x_2 = 10$ $x_1 = 40$ birim tahsis edilmelidir.

Ekonomik Yorum :

İlk uygun temel çözümde $x_3 = 50$ $x_4 = 80$ ve $x_5 = 140$ buluruz ki bu firmada hiç bir mamül üretilmediğini gösterir. Onun için x_3, x_4, x_5 çözüm değerleri A,B ve C malzemelerinin henüz kullanılmadığını gösterir. $\vec{y}_j$ vektörleri j mamulünden belli bir miktar üretmek için lüzumlu kaynakların miktarını ,aynı zamanda kaynaklarda meydana gelecek azalmayı gösterir.

İlk çözümde $\vec{y}_1$ vektörü x_1 'in üretimini bir birim arttırmakla $x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 3$ birim azalacağını gösterir. Benzer analiz $\vec{y}_2$ için de yapılabilir. $Max\{|Z_j - c_j|\} = |z_1 - c_1| = 4 > |z_2 - c_2|$ olduğu yani ekonomik açıdan sağladığı kazanç x_2 'ninkinden daha yüksek olduğu için x_1 'i üretim karışımına sokarak yani lineer programlama diliyle $\vec{a}_1$ temele sokularak ilk çözüm düzeltilir.

x_1'i temele sokulduktan sonra (9) ile hangi vektörü temelden çıkaracağımızı buluruz ki $\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho | y_{\rho k} > 0}{Min}\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right) = \frac{140}{3}$ olduğundan temeldeki 3'üncü kolon vektörüdür. Temeldeki x_1 'in çözüm değerinin niçin 140/3 olduğunu şöyle açıklayabiliriz. Bir birim x_1 üretmek için 1 birim A 1 birim B ve 3 birim C gereklidir. A,B ve C nin kullanılmayan miktarları ise sırasıyla 50,80 ve 140 olup (9) ile verilen oranlar cümlesi içinde en küçük oran x_1 in üretilebilecek maksimum miktarını gösterir. Eğer daha fazla x_1 üretmeye kalkarsak C kaynağının buna yetmediğini görürüz.

II uygun taban çözüm : Burada çözüm değerleri $x_3 = 10/3$ $x_4 = 100/3$ ve $x_6 = 140/3$olup bunu şöyle yorumlayabiliriz. Eğer sadece x_1 üretilirse üretilebilecek maksimum miktar 140/3 birimdir. Bu durumda 10/3 birim A ve 100/3 birim B malzemesi kullanılmayacaktır. Çünkü eldeki 50 birim A malzemesinden sadece 140/3 birimi x_1 üretimi için kullanıldı. Aynı şekilde 80 birim B malzemesinden sadece 140/3 birimi kullanıldı ve 100/3 birimi kaldı. Bu çözüm için amaç fonksiyonunun değeri 560/3 olup ilk çözüme göre 560/3 TL lik artış olmuştur.

Şimdi **II** çözümün optimum olup olmadığını inceleyelim. Burada $\vec{y_2}$ x_2 den bir birim üretmekle x_1 'in 2/3 x_3 'ün 1/3 x_4 'ün 4/3 birim azalacağını gösterir. Halihazırda **II** çözüme göre C malzemesinin tamamı kullanılmış durumdadır.

Eğer bir birim x_2 yi üretim karışımına sokarak yeni bir çözüm planlarsak o zaman hepsi x_1 üretiminde kullanılan C malzemesinin bir kısmını serbest bırakmak için planlanan x_1 üretiminde indirim yapılması gerekir. Üretim karışımına ilave ettiğimiz her x_2 birimi için x_1 mamulünü 2/3 birim azaltmamız gerekir. Çünkü x_1 için 3 birim C lazım iken x_2 için 2 birim C lazımdır.

Şimdi x_2 nin bir birim arttırılmasının planlandığını varsayalım. Bu x_1' in 2/3 birim azalacağını gösterir. $x_1$in 2/3 birim azalması aynı zamanda A ve B malzemelerini bırakacaktır. Bir birim x_2 'nin 1 birim A ve 2 birim B malzemsine ihtiyacı olduğu bilinmektedir. Öte yandan halihazırda x_1'in azalmasıyla A ve B malzemelerinin bir kısmı bırakılmış durumdadır. O halde x_2 'nin her birimi için bu kaynaklardan lüzumlu miktarlar A için 1-2/3=1/3 B için 2-2/3=4/3 birimdir. Bu iki rakam $\vec{y_2}$ nin $y_{\rho 21}$ ve $y_{\rho 22}$ elemanlarına karşı gelir.

Yukarda $c_1 y_{23} = 8/3\text{TL}$ x_2 üretimini 2/3 birim düşürdüğümüz zaman firmanın kaybedeceği kazanç miktarını gösterir. Bir birim x_2 için 1/3 birim A ve 4/3 birim B malzemesinden kullanılmış olmasına rağmen bunlar için $c_1 y_{12}$ ile x_2 'nin kârı olan c_2 mukayese edilir ki burada $c_1 > c_1 y_{12}$ dir. Buna göre x_2 'nin üretime sokulması kârı daha da arttıracağı için biraz dahax_2 birimi ihtiva eden bir çözüm düzenlenerek ikinci çözüm düzeltilir. (9) ile temelden çıkacak vektörü hesaplarsak (10/3)/(1/3)=10 buluruz ki bu temeldeki 1'inci kolon vektörü olup yeni çözüm değerinin 10 birim olacağını gösterir. Çünkü x_2 üretimi sıfırdan 10 birime çıktığı zaman A malzemesinin tamamı tükenecektir. Böylece x_2 maksimum 10 birimdir.

III uygun taban çözüm : Burada $x_1 = 40$ $x_2 = 10$ ve $x_3 = 20$ elde edilir. x_2 üretiminin sıfırdan 10 birime çıkarılması sonucunda $x_1$in üretimi 140/3 birimden 40 birime düşer. Net düşüş 20/3 birim veya x_2 'nin her ünitesi için 2/3 birimdir. Eğer x_2 üretimi 10 dan 20 birime çıkarılırsa $x_1$üretimi de 40 dan 30 birime düşer, net düşüş 10 birimdir. Bunun sebebi x_2 den 10 birim üretildiği zaman A malzemesinin tamamı kullanılmış olur, ilave bir birim x_2 üretmek için lazım olan A malzemesini elde etmenin tek yolu $x_1$üretimini tam bir birim düşürmektir. Onun için teknik açıdan uygun olmasına rağmen x_1'in birim kârı $x_2$den yüksek olmasına rağmen x_1 üretimini düşürerek yapılan 10 birimlik ilave x_2 üretimi uygun görülmez. Simpleks kuralları bu tip hataları önleyici niteliktedir.

$\vec{y_3}$ x_3 'ün 1 birim arttırılması halinde $x_1$inde 2 birim arttırılması x_2 'nin 3 birim azaltılması ve x_4 'ün 4 birim arttırılması gerektiğini gösterir. Daha açık bir ifade ile x_3 ve x_4 A ve B nin kullanılmayan miktarlarını gösteriyordu. A kaynağından bir birimin kullanılmadan kalmasını istediğimizi varsayalım. Bu ancak x_2 üretiminin 3 birim azalmasına B kaynağından da 4 birim kalmasına razı olursak gerçekleşebilir. Başka bir ifade ile x_2 üretimini 3 birim azalttığımız zaman bu durumda üretim işleminde A, B ve C kaynaklarının sırasıyla 2, 6 ve 6 birimi kullanılacak , geriye kalan 1 birim A ve 4 birim B malzemesi kalacaktır.

Yukardaki amaç A malzemesinden 1 birimin kullanılmadan kalmasının sağlanıp sağlanamayacağı idi. Niçin x_1 üretimini bir birim azaltmakla bu amaca ulaşmıyoruz. Şüphesiz Bu hareket ilave bir birim A malzemesini kullanılmadan bırakacaktır.

Diğer taraftan önceki analizde amaç A malzemesinin bir birimini kullanılmadan bırakmak için ne yapılmasının gerektiğini araştırmaktan bir dereceye kadar daha karmaşıktır. Yukarda yaptığımız işlemde asıl sebep üçüncü çözümün düzeltilip düzeltilmeyeceği idi. Onun için değerlendirilmek istenen herhangi yeni bir üretim planı temel olmayan x_5 değişkeninin çözüm değerini değiştirmemelidir. Aksi halde yeni plan bir temel çözümü ifade etmeyecektir. x_1 'i bir birim azaltırsak x_2 'yi 1 birim arttırmalıyız ve bu durumda x_4 ve x_5 temele girecektir. Bunu problemin matematiksel formuna $x_1 \leq 39$ şartını ilave ederek de gösterebiliriz ki çözülen başka bir problem olmuştur.

Son çözümün optimum olup olmadığını araştırmak için de temel olmayan x_3 *ve* x_5 değişkenlerine ait $Z_j - c_j$ leri incelemeliyiz ki bunlar $Z_3 - c_3 = 1$ *ve* $Z_5 - c_5 = 1$ dir. Buna göre x_3 'ü bir birim arttırırsak net kâr 1 TL azalacaktır. Çünkü x_3 'ü 1 birim arttırmak için birim kârı 4 TL olan x_1i 2 birim arttırmak ve aynı zamanda birim kârı 2 TL olan x_2 'yi 3 birim azaltmak gerekecektir. . Aynı şekilde x_5 eğer 1 birim arttılırsa net kâr 1TL azalacaktır. Neticede son çözüm optimumdur.

Simpleks çözüm tekniğini anlattıktan sonra hem maksimizasyon hem de minimizasyon için geçerli olabilecek şekilde simpleks algoritmasını şöyle özetleyebiliriz.

1- $\vec{x}_B = B^{-1}\vec{P}_0 = \vec{\beta}$ ***Başlangıç temel programını belirle***

2- $B^{-1}G = Y' = (\vec{y}'_j)$, $j\varepsilon J$ ***matrisini ve*** $Z_j - c_j$ $j\varepsilon J$ ***miktarını hesapla***

3- $Z_j - c_j$, $j\varepsilon J$ ***yi gözden geçir.***

a-Maksimizasyon problemi için her $j\varepsilon J$ ***için*** $(Z_j - c_j) \geq 0$ ***ise problem çözülmüştür. Hesaplama durur.***

b-Minimizasyon problemi için her $j\varepsilon J$ ***için*** $(Z_j - c_j) \leq 0$ ***ise problem çözülmüştür. Hesaplama durur.***

Maksimizasyon problemi için $Z_j - c_j < 0$

Minimizasyon problemi için $Z_j - c_j > 0$

olan j indislerini J^* ***ile göster.***

4- $\vec{y}_j$, $j\varepsilon J^*$ ***gözden geçir.***

Eğer $j\varepsilon J^*$ ***için*** $\vec{y}_j \leq \vec{0}$ ***yani bütün*** $y_{\rho j}$ ***ler pozitif değilse sonlu sayıda bir maksimum (minimum) program yoktur. Hesaplama durur.***

Eğer değilse giriş kriteri

$$|z_k - c_k| = \underset{j\varepsilon J^*}{Max}\{|z_j - c_j|\} \quad \textit{den k 'yı}$$

ve çıkış kriteri
$$\frac{\beta_l}{y_{lk}} = \underset{\rho|y_{\rho k}>0}{Min}\left(\frac{\beta_\rho}{y_{\rho k}}\right) \quad \textit{den l' yi belirle}$$

5- $\vec{a}_k$ ***yerine*** $\vec{a}_l$ ***koymakla B den elde edilen B' temeli yardımıyla yeni*** $\vec{x}'_B$ ***temel programı optimize edilecek fonksiyonun yeni*** $\overline{Z}'$ ***değerini yeni*** Y' ***ve yeni*** $(z'_j - c_j)$ ***'leri hesapla (3) üncü adıma git.***

Bu yazdığımız algoritmaya göre simpleks tablo çözümü aşağıdaki gibidir.

$\vec{C}_B$	$\vec{x}_B$	c_j	4	3	0	0	0
		$\vec{\beta}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0	x_3	50	1	1	1	0	0
0	x_4	80	1	2	0	1	0
0	x_5	140	3	2	0	0	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	$Z_j - c_j$	-	-4	-3	0	0	0

0	x_3	10/3	0	1/3	1	0	-1/3
0	x_4	100/3	0	4/3	0	1	-1/3
4	x_1	140/3	1	2/3	0	0	1/3
	Z_j	560/3	4	8/3	0	0	4/3
	$Z_j - c_j$	-	0	-1/3	0	0	4/3

3	x_2	10	0	1	3	0	-1
0	x_4	20	0	0	-4	1	1
4	x_1	40	1	0	-2	0	1
	Z_j	190	4	3	1	0	1
	$Z_j - c_j$	-	0	0	1	0	1

KAYNAKLAR

1-Beale E.M.L Mathematical Programming in Practice, Pitman, 1968.

2-Bazarra M. –Jarvis J. J.– Sherali H. D. Linear programming And Network Flows, John Wiley & Sons 1990.

3-Hadley G. Linear Programming, Addison-Wesley, 1973.

4-Orchhard-Hays W. Advanced Linear Programming ,McGraw-Hill, 1968.

5-Gass S. I. Linear Programming Methods & Applications 4'th Ed., 1975 McGraw Hill-Kogakusha, Tokyo.

6-Hillier F. S. – Lieberman G. J. Operations Researh 2'nd Ed., Holden-Day Inc., 1974, San Francisco.

7-Taha H. A. Operations Researh An Introduction 6'th Ed., Prentice-Hall Inc. 1997, N.J.

8-Tulunay Y. Matematik Programlama ve İşletme Uygulamaları, İst. Ün. İşletme Fak Yay. No:108, İstanbul, 1980.

9-Walsh G.R. An Introduction to Linear Programming Holt, Rinehart and Winston, 1971.