Araştırma Makalesi **BAUN Fen Bil. Enst. Dergisi, 24(2), 738-749, (2022)**

DOI:10.25092/baunfbed. 1030138 **J. BAUN Inst. Sci. Technol., 24(2), 738-749, (2022)**

$W_w(IR)$ uzayının bazı özellikleri

Mevlüde DOĞAN*[1], A. Turan GÜRKANLI[2]

[1]*Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, Samsun, Türkiye*
Arel Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik-Bilgisayar Bölümü, İstanbul, Türkiye.

Geliş Tarihi (Received Date): 29.10.2021
Kabul Tarihi (Accepted Date): 01.03.2022

Öz

$W^p(IR^n)$ uzayı ve bu uzaya ait bazı özellikler Krogstad [1] tarafından ispat edilmiştir. Bu çalışmada, Krogstad tarafından tanımlanan bu uzayın $p = 1$ için özel durumu olan $W(IR^n)$ uzayı ele alındı. w, IR reel sayılar kümesinde Beurling-Domar koşullarını sağlayan ağırlık fonksiyonu olmak üzere bir $W_w(IR)$ uzayı ve bu uzay üzerinde $\|.\|_w$ normu tanımlandı. $W_w(IR)$ uzayının, $\|.\|_w$ normuna göre bir Banach uzayı olduğu ispatlandı. $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayının bir Banach cebiri, ötelemeler altında invaryant ve kuvvetli invaryant olduğu gösterildi. Ayrıca, $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayının Soyut Segal cebiri ve Banach fonksiyon uzayı olduğu ispatlandı. w_1, w_2, IR üzerinde ağırlık fonksiyonları olmak üzere $W_{w_1}(IR)$ ve $W_{w_2}(IR)$ uzayları arasındaki kapsama özellikleri araştırıldı.

Anahtar kelimeler: *Soyut segal cebiri, ağırlık fonksiyonu, banach fonksiyon uzayı.*

On some properties of $W_w(IR)$ space

Abstract

The $W^p(IR^n)$ space and some properties of this space have been proved by Krogstad [1]. In this study, $W^p(IR^n)$ space, which is a special case for p=1 of this space defined by Krogstad [1], is discussed. $W_w(IR)$ is a vector space, if w satisfied the Beurling-Domar condition. It has been proven that the $W_w(IR)$ space is a Banach space according to the $\|.\|_w$ norm defined on it. It was showed that $(W_w(IR), \|.\|_w)$ was a Banach algebra, translation invariant, strongly invariant. Moreover, it has been proved that $(W_w(IR), \|.\|_w)$ space was an abstract Segal algebra and a Banach Function space. Also, it was discussed the inclusion properties between the spaces weight function $W_{w_1}(IR)$ and $W_{w_2}(IR)$.

Keywords: *Abstract segal algebra, weight function, banach function space.*

*Mevlüde DOĞAN, mdogan@omu.edu.tr, http://orcid.org/0000-0002-0938-3023
A.Turan GÜRKANLI, turangurkanli@arel.edu.tr, http://orcid.org/0000-0001-7572-9152

1. Giriş

Krogstad tarafından $1 \leq p < \infty$ için $W^p(IR^n) = \{f \in L^1\ (IR^n): \sum_{m \in Z^n} \|\chi_m f\|_p < \infty\}$ uzayı tanımlanmış ve bazı özellikleri ispatlanmıştır [1]. Bu çalışmada, $W^p(IR^n)$ uzayının bir özel şekli olan $W^p(IR)$ uzayından yararlanarak $W_w(IR) = \{f \in L_w^1\ (IR) : \hat{f} \in W^p(IR)\}$ vektör uzayı ve üzerinde $\|.\|_w$ normu $\|.\|_w = \|.\|_{1,w} + \|\hat{.}\|_w$ şeklinde tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir. Çalışma için gerekli olan temel kavram ve teoremler aşağıda yer almaktadır:

Tanım 1. X bir topolojik lokal kompakt uzay, f fonksiyonu X üzerinde tanımlı, karmaşık değerli, sürekli bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $y \in X - K$ olduğunda $|f(y)| < \varepsilon$ koşulunu sağlayan X uzayının bir K kompakt alt kümesi varsa, f fonksiyonuna sonsuzda sıfırdır, denir. X üzerinde sürekli ve sonsuzda sıfır olan fonksiyonların kümesi $C_0(X)$ ile gösterilir. X bir topolojik lokal kompakt uzay olmak üzere, X kümesinde tanımlı, karmaşık değerli, sürekli ve kompakt destekli fonksiyonların kümesi ise $C_c(X)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2. f ve g, G lokal kompakt Abel grubu üzerinde Borel fonksiyonu olsun. $\int_G |f(x-y)g(y)|dy < \infty$ koşulunu sağlayan f ve g fonksiyonları için girişim işlemi $(f * g)(x) = \int_G f(x-y)g(y)dy$ şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 3. G lokal kompakt Abel grubu ve γ fonksiyonu, G üzerinde tanımlı, karmaşık değerli ve her $x \epsilon G$ için $|\gamma(x)| = 1$ koşulunu sağlasın. Her $x, y \epsilon G$ için $\gamma(x+y) = \gamma(x).\gamma(y)$ oluyorsa, γ fonksiyonuna G'nin bir karakteri denir. $\hat{G}$, G'nin tüm sürekli karakterlerinin kümesidir. Her $x \epsilon G,\ \gamma_1, \gamma_2 \in \hat{G}$ için $(\gamma_1 + \gamma_2)(x) = \gamma_1(x).\gamma_2(x)$ işlemine göre $\hat{G}$ bir gruptur. Bu gruba G'nin karakter grubu denir [3].

Tanım 4. G lokal kompakt Abel grubu, $\hat{G}$ de onun karakter grubu olsun. $f \epsilon L^1(G)$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü, $x \epsilon G$ ve $y \epsilon \hat{G}$ olmak üzere, $F(f)(y) = \hat{f}(y) = \int_G f(x) < -x, y > dx$ şeklinde tanımlanır [3]. $f \epsilon L^1(G)$ fonksiyonunun $\hat{f}$ Fourier dönüşümü düzgün sürekli ve sonsuzda sıfırdır [2]. Eğer $f, g \epsilon L^1(G)$ ise $F(f * g) = \widehat{f * g} = \hat{f}.\hat{g}$ eşitliği vardır [3].

Tanım 5. X, K cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Eğer X üzerindeki bir $(.)$ işlemi,
(i) Her $x, y, z \epsilon X$ için $x.(y.z) = (x.y).z$
(ii) Her $x, y, z \epsilon X$ için $x.(y+z) = x.y + x.z$
(iii) Her $x, y \epsilon X$ ve her $\alpha, \beta \epsilon K$ için $(\alpha x).(\beta y) = (\alpha\beta).(xy)$
koşullarını sağlıyorsa, X kümesine K üzerinde bir cebirdir, denir. $(X, \|.\|)$ normlu uzayı K cismi üzerinde bir cebirse ve her $x, y \epsilon X$ için $\|x.y\| \leq \|x\|.\|y\|$ eşitsizliği sağlanıyorsa, X cebirine K cismi üzerinde bir normlu cebir denir. Özel olarak, $(X, \|.\|)$ normlu uzayı bir Banach uzayı ise X cebirine Banach cebiri denir.

Tanım 6. G lokal kompakt Abel grubu olmak üzere G üzerinde tanımlı ve reel değerli, her $x \epsilon G$ için $w(x) \geq 1$, $x, y \epsilon G$ için $w(x.y) \leq w(x).w(y)$, ölçülebilir ve lokal sınırlı olma koşullarını sağlayan w fonksiyonuna (Beurling) ağırlık fonksiyonu denir. w ağırlık fonksiyonundan yararlanarak $L_w^p(G) = \{f \in L^p\ (G) | f\ w \in L^p(G)\}$, $1 < p < \infty$ biçiminde tanımlanan L_w^p uzayına ağırlıklı L^p uzayı denir ve $\|f\|_{p,w} =$

$\left\{\int_G |f(x)|^p w^p(x)\ dx\right\}^{1/p}$ normuna göre bir Banach uzayıdır. Yine özel olarak, p=1 için elde edilen L_w^1 uzayı girişim işlemine göre bir Banach cebiridir.

Tanım 7. G üzerinde herhangi w_1 ve w_2 ağırlık fonksiyonu verildiğinde her $x \epsilon G$ için $w_2(x) \leq c w_1(x)$ olacak biçimde $c > 0$ reel sayısı varsa w_2, w_1 ağırlık fonksiyonundan önde gelir, denir ve $w_2 < w_1$ şeklinde gösterilir. Eğer $w_2 < w_1$ ve $w_1 < w_2$ ise w_1 ve w_2 ağırlık fonksiyonları denktir, denir ve $w_1 \sim w_2$ şeklinde gösterilir [5].

2. Materyal ve metot

Teorem 1. (Banach Teoremi): E ve F birer Banach uzayı olsun. Eğer $u: E \to F$ fonksiyonu doğrusal, sürekli, birebir ve örten ise bu u fonksiyonu E uzayından F uzayına bir homeomorfizmdir [6]. Bu teoremin sonucu olarak, herhangi bir E vektör uzayı p_1 ve p_2 normlarına göre birer Banach uzayı ise p_1 ve p_2 normları denktir.

Tanım 8. $(B, \|.\|_B)$ Banach uzayı olsun. $f \in B$ ve $x, y \epsilon G$ için $L_x f(y) = f(y - x) \epsilon B$ ise B ötelemeler altında sol invaryanttır, denir. B ötelemeler altında invaryant ve $\|L_x f\|_B = \|f\|_B$ koşulu sağlanıyorsa B ötelemeler altında kuvvetli invaryanttır.

Tanım 9. $(B, \|.\|_B)$ bir Banach uzayı olmak üzere $f \in B$ ve $x \epsilon G$ için $L_x f \in B$ ve $\|L_x f\|_B = \|f\|_B$ koşulu sağlanıyorsa B uzayına G üzerinde yarı Homogen Banach uzayı denir. Ayrıca G den $(B, \|.\|_B)$ uzayına giden $x \to L_x f$ fonksiyonu sürekli ise B uzayına G üzerinde Homogen Banach uzayı denir [7].

Tanım 10. G lokal kompakt Abel grubu ve B, $L^1(G)$ uzayının aşağıdaki koşulları sağlayan bir alt cebiri ise $(B, \|.\|_B)$ normlu uzayına Segal cebiri denir.

(i) B, homogen Banach uzayıdır.

(ii) B, $\|.\|_{L^1} \leq \|.\|_B$ normuna göre Banacah cebiridir.

(iii) B, $L^1(G)$ uzayında $\|.\|_{L^1}$ normuna göre her yerde yoğundur [7].

Tanım 11.

(i) B, A'nın her yerde yoğun ideali ve $\|.\|_B$ normuna göre Banach cebiridir.

(ii) Her $f \in B$ için $\|f\|_A \leq M\ \|f\|_B$ olacak biçimde bir $M > 0$ reel sayısı vardır.

(iii) Her $f, g \in B$ için $\|fg\|_B \leq c\ \|f\|_A\ \|g\|_B$ olacak biçimde $c > 0$ reel sayısı vardır

koşulları sağlayan $(B, \|.\|_B)$ normlu uzayına $(A, \|.\|_A)$ Banach cebirine göre Soyut Segal cebiri denir [8].

Tanım 12. (IR, μ) bir ölçü uzayı ve M, IR üzerinde tanımlı genişletilmiş skaler (reel ya da kompleks) değerli $\mu -$ölçülebilir fonksiyonların sınıfı, ρ bir fonksiyon norm olsun. Bu durumda $\rho(|f|) < \infty$ koşulunu sağlayacak şekilde M deki f fonksiyonlarının $X = X(\rho)$ sınıfına Banach fonksiyon uzayı denir. $\forall f \in X$ için $\|f\|_X = \rho(|f|)$ şeklinde ifade edilir [9].

Tanım 13. Q, $\left\{x \middle| -\frac{1}{2} \leq x_i \leq \frac{1}{2}\right\}$ küpü, X_{Q_m}, Q_m'nin karakteristik fonksiyonu olmak üzere, $1 \leq p < \infty$ için bir W^p uzayı, $W^p = \left\{f \in L^1(IR^n) \middle| \sum_{m \in Z^n} \left\|X_{Q_m} f\right\|_p < \infty\right\}$ biçiminde tanımlansın. $f \in W^p$ için $\|f\|_{W^p} = mak_{t \epsilon Q} \sum_{m \epsilon Z^n} \left\|X_{Q_m} f_t\right\|_p$, $(f_t = L_t f)$, W^p uzayı üzerinde norm olup, W^p uzayı bu norm altında girişim işlemine göre bir Segal cebiridir [1].

3. Bulgular

$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $W_w(IR) = \left\{f \in L_w^1(IR) : \hat{f} \in W^p(IR)\right\}$ uzayını ve bu uzay üzerinde $f \in W_w(IR)$ olmak üzere $\|f\|_w = \|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{W^p}$ normunu tanımlayalım. $L_w^1(IR)$ ve $W^p(IR)$ uzayları toplam ve skalerle çarpma işlemlerine göre vektör uzayı olduklarından [1], $W_w(IR)$ uzayı IR üzerinde bir vektör uzayıdır. Herhangi bir $f \in W_w(IR)$ için $\|.\|_w$ normu $W_w(IR)$ uzayı üzerinde $\|f\|_w = \|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{W^p}$ şeklinde iki normun toplamı olarak tanımlandığından $(W_w(IR), \|.\|_w)$ bir normlu uzaydır.

Önerme 1. $(W_w(IR), \|.\|_w)$ bir Banach uzayıdır.

İspat: $W_w(IR)$ normlu uzayından herhangi bir (f_n) Caucyh dizisi alalım. $W_w(IR)$ uzayı tanımı gereği (f_n) dizisi $L_w^1(IR)$ ve $(\widehat{f_n})$ dizisinin $W^p(IR)$ uzayında birer Cauchy dizisidir. $L_w^1(IR)$ ve $W^p(IR)$ uzayları Banach uzayı olduklarından [1], $(W_w(IR), \|.\|_w)$ Banach uzayıdır.

Önerme 2. $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı girişim işlemine göre Banach cebiridir.

İspat: $W_w(IR)$ uzayı $\|.\|_w$ normuna göre bir Banach uzayı olduğu Önerme 1'de gösterildi. Şimdi herhangi $f, g \epsilon W_w(IR)$ alalım. Buradan $f, g \epsilon L_w^1(IR)$ ve $\hat{f}, \hat{g} \epsilon W^p(IR)$ olur. $L_w^1(IR)$ uzayı girişim işlemine göre Banach Cebiri olduğundan [4] $f * g \epsilon L_w^1(IR)$ ve $\|f * g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w} . \|g\|_{1,w}$ eşitsizliği vardır. Diğer yandan, $f \epsilon L^1(IR)$ olduğundan $\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1 < \infty$ olur. Böylece,

$$\left\|\widehat{f * g}\right\|_{W^p} = \left\|\hat{f} . \hat{g}\right\|_{W^p} = mak_{t \epsilon Q} \sum_{n \epsilon Z} \left\{\int_{IR} \left|\chi_{Q_n}(x) (\hat{f} . \hat{g})_t(x)\right|^p dx\right\}^{1/p}$$

$$= mak_{t \epsilon Q} \sum_{n \epsilon Z} \left\{\int_{Q_n} \left|\hat{f}_t(x) . \hat{g}_t(x)\right|^p dx\right\}^{1/p} \leq$$

$$mak_{t \epsilon Q} \sum_{n \epsilon Z} sup_{x \epsilon IR} \left|\hat{f}_t(x)\right| \left\{\int_{Q_n} |\hat{g}_t(x)|^p dx\right\}^{1/p}$$

$$= mak_{t \epsilon Q} \sum_{n \epsilon Z} \|\hat{f}_t\|_\infty \left\{\int_{IR} \left|\chi_{Q_n}(x)\, \hat{g}_t(x)\right|^p dx\right\}^{1/p}$$

$$= \|\hat{f}\|_\infty \, mak_{t \epsilon Q} \sum_{n \epsilon Z} \left\{\int_{IR} \left|\chi_{Q_n}(x)\, \hat{g}_t(x)\right|^p dx\right\}^{1/p} = \left\|\hat{f}\right\|_\infty \|\hat{g}\|_{W^p}$$

(1)

bulunur. Böylece $\widehat{f * g} \epsilon W^p(IR)$ olup, $f * g \epsilon W_w(IR)$ elde edilir. (1) eşitsizliğinden yararlanarak,

$$\begin{aligned}\|f*g\|_w &= \|f*g\|_{1,w} + \left\|\widehat{f*g}\right\|_{W^p} \le \|f\|_{1,w}.\|g\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_\infty \|\hat{g}\|_{W^p} \\ &\le \|f\|_{1,w}\,\|g\|_{1,w} + \|f\|_1\,\|\hat{g}\|_{W^p} \le \|f\|_{1,w}\left(\|g\|_{1,w} + \|\hat{g}\|_{W^p}\right) \\ &= \|f\|_{1,w}\|g\|_w \le \|f\|_w\|g\|_w\end{aligned}$$

eşitsizliği ile istenen sonuç görülür.

Önerme 3. $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır.

İspat: Herhangi $f\epsilon W_w(IR)$ için $f\epsilon L_w^1(IR)$ ve $\hat{f}\epsilon W^p(IR)$ olur. Her $x, y \in IR$ için

$$\begin{aligned}\|L_x f\|_{1,w} &= \int_{IR} |L_x f(y) w(y)|\, dy = \int_{IR} |f(y-x)w(y)|\, dy \\ &\le \int_{IR} |f(u)w(u)| du.\, w(x) = w(x)\, \|f\|_{1,w}\end{aligned}$$

bulunur. w ağırlık fonksiyonu lokal sınırlı olduğundan $L_x f\epsilon L_w^1(IR)$ elde edilir. Diğer yandan, $\widehat{L_x f}(y) = e^{-ixy}\,\hat{f}(y)$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\left\|\widehat{L_x f}\right\|_{W^p} &= mak_{t\in Q} \sum_{n\epsilon Z} \left\|\chi_{Q_n}\left(\widehat{L_x f}\right)_t\right\|_p \\ &= mak_{t\epsilon Q}\ \sum_{n\epsilon Z}\left\{\int_{Q_n}\left|(\widehat{L_x f})_t(y)\right|^p\ dy\right\}^{1/p} \\ &= mak_{t\epsilon Q}\ \sum_{n\epsilon Z}\left\{\int_{Q_n}\left|(\widehat{L_x f})(y-t)\right|^p\ dy\right\}^{1/p} \\ &= mak_{t\epsilon Q}\ \sum_{n\epsilon Z}\left\{\int_{Q_n}\left|e^{-ix(y-t)}\hat{f}(y-t)\right|^p\ dy\right\}^{1/p} \\ &= mak_{t\epsilon Q}\ \sum_{n\epsilon Z}\left\{\int_{Q_n}\left|\hat{f}(y-t)\right|^p\ dy\right\}^{1/p} \\ &= mak_{t\epsilon Q}\ \sum_{n\epsilon Z}\left\{\int_{IR}\left|\chi_{Q_n}\hat{f}_t(y)\right|^p\ dy\right\}^{1/p} \\ &= mak_{t\epsilon Q}\ \sum_{n\epsilon Z}\left\|\chi_{Q_n}\hat{f}_t\right\|_p = \left\|\hat{f}\right\|_{W^p} \qquad (2)\end{aligned}$$

olup, $\widehat{L_x f}\epsilon W^p(IR)$bulunur. Bunların sonucu olarak $L_x f\epsilon W_w(IR)$ elde edilir. O halde $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı ötelemeler altında invaryanttır.

Önerme 4. K, bir sabit olmak üzere $w(x) = K$ ise $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı ötelemeler altında kuvvetli invaryanttır.

İspat: Herhangi $f\epsilon W_w(IR)$ ve $x, y\epsilon IR$ için $L_x f(y) = f(y-x) \in W_w(IR)$ olduğu Önerme 3'ten bilinmektedir. Buradan,

$$\|\mathrm{L_x f}\|_{1,\mathrm{w}} = \int_{\mathrm{IR}}|\mathrm{L_x f(y)w(y)}|\ \mathrm{dy} = \int_{\mathrm{IR}}|\mathrm{f(y\text{-}x)w(y)}|\ \mathrm{dy} = \int_{IR}|f(y-x)K|\ dy = \|f\|_{1,w}$$

bulunur. Önerme 3'deki (2) eşitliği de kullanılırsa,

$$\|L_x f\|_w = \|L_x f\|_{1,w} + \left\|\widehat{L_x f}\right\|_{W^p} = \|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{W^p} = \|f\|_w$$

elde edilir. Böylece, $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı $w(x) = K$ koşulu altında ötelemeler altında kuvvetli invaryanttır.

$(W_w(IR), \|.\|_w)$ Banach uzayı her $f \epsilon W_w(IR)$ ve $x \in IR$ için $L_x f \epsilon W_w(IR)$ ve $\|L_x f\|_w = \|f\|_w$ koşullarını sağladığından IR üzerinde bir yarı Homogen Banach uzayıdır.

Önerme 5. Herhangi $f \epsilon W_w(IR)$ için $W_w(IR)$ uzayından $W_w(IR)$ uzayına giden $f \to L_x f$ fonksiyonu süreklidir.

İspat: Herhangi $f \epsilon W_w(IR)$ ve $x \in IR$ için $L_x f \epsilon W_w(IR)$ olduğu 3. Önermede görüldü. $W_w(IR)$ uzayında f fonksiyonuna yakınsayan herhangi (f_n) dizisi için $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n > n_0$ olduğunda,

$$\|f_n - f\|_w = \|f_n - f\|_{1,w} + \left\|\widehat{f_n} - \hat{f}\right\|_{W^p} < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $n_0 \in IN$ sayısı vardır. Aynı $\varepsilon > 0$ ve $n_0 \in IN$ için her $n > n_0$ olduğunda

$$\begin{aligned} \|L_x f_n - L_x f\|_w &= \|L_x f_n - L_x f\|_{1,w} + \left\|\widehat{L_x f_n} - \widehat{L_x f}\right\|_{W^p} \\ &\leq w(x)\|f_n - f\|_{1,w} + \left\|\widehat{f_n} - \hat{f}\right\|_{W^p} \\ &\leq w(x)\left(\|f_n - f\|_{1,w} + \left\|\widehat{f_n} - \hat{f}\right\|_{W^p}\right) = w(x)\|f_n - f\|_w < w(x)\,\varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. $w(x)$ ağırlık fonksiyonu lokal sınırlı olduğundan $f \to L_x f$ öteleme fonksiyonu süreklidir.

Önerme 6. $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı girişim işlemine göre $L^1_w(IR)$ üzerinde bir Banach modülüdür.

İspat: $L^1_w(IR)$ uzayının girişim işlemine göre bir Banach cebiri olduğu biliniyor [4]. Bunun sonucu olarak herhangi $f, g \epsilon L^1_w(IR)$ için $f * g \epsilon L^1_w(IR)$ ve

$$\|f * g\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w}\, \|g\|_{1,w} \tag{3}$$

yazılır. Önerme 2'den $\hat{f}\, \epsilon C_c\,(IR)$ ve $\hat{g} \epsilon W^p(IR)$ için $\widehat{f * g} \epsilon W^p(IR)$ ve

$$\left\|\widehat{f * g}\right\|_{W^p} \leq \left\|\hat{f}\right\|_\infty \|\hat{g}\|_{W^p} \tag{4}$$

olur. (3) ve (4) eşitsizlikleri kullanılırsa $f * g \epsilon W_w(IR)$ olup,

$$\begin{aligned} \|f*g\|_w = \|f*g\|_{1,w} + \left\|\widehat{f*g}\right\|_{W^p} &\leq \|f\|_{1,w}.\|g\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_\infty \|\hat{g}\|_{W^p} \\ &\leq \|f\|_{1,w}\|g\|_{1,w} + \|f\|_1\|\hat{g}\|_{W^p} \leq \|f\|_{1,w}\|g\|_w \end{aligned}$$

elde edilir. Modül olmanın diğer koşulları aşikârdır.

Sonuç 1. $(W_w(IR), \|.\|_w)$, $\left(L^1_w(IR), \|.\|_{1,w}\right)$ uzayı üzerinde girişim işlemine göre bir idealdir.
İspat: Önerme 6 ve $W_w(IR) \subset L^1_w(IR)$ kapsamasından ispat aşikardır.

$(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayının $\left(L_w^1(IR), \|.\|_{1,w}\right)$ uzayında Soyut Segal cebir olabilmesi için w ağırlık fonksiyonu üzerine Beurling-Domar (B.D.) adı verilen koşulun yüklenmesi gerekmektedir. Bununla ilgili olarak önce koşulunu tanımlayalım.

G lokal kompakt bir grup ve w, G üzerinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Eğer her $x \in G$ için $\sum_{n\geq 1} n^{-2}\log(w(x^n)) < \infty$ oluyorsa, w ağırlık fonksiyonuna (B.D.) koşullarını sağlıyor, denir [10]. Beurling tarafından ilk kez $G = IR$ için ispatlanan [11] bu özellik Domar tarafından lokal kompakt gruplara genişletildiği için (B.D.) koşulu olarak bilinmektedir.

Önerme 7. w ağırlık fonksiyonu (B.D.) koşullarını sağlamak üzere $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı $\left(L_w^1(IR), \|.\|_{1,w}\right)$ Banach cebirine göre Soyut Segal cebiridir.

İspat: $\wedge = \left\{f \middle| f \in L_w^1(IR),\ \hat{f}\, \epsilon C_c\ (IR)\right\}$ kümesini alalım. (B.D.) koşulu sağlandığından bu $\wedge$ kümesi $L_w^1(IR)$ cebirinde bir yoğun idealdir [5; 9]. Herhangi bir $f \in \wedge$ için $f \in L_w^1(IR)$ ve $\hat{f}\, \epsilon C_c\ (IR)$ olur. Ayrıca, $C_c\ (IR) \subset W^p(IR)$ [1] olduğundan $f \in W_w(IR)$ olup, $\wedge \subset W_w(IR)$ elde edilir. $W_w(IR)$ uzayının tanımı gereği $W_w(IR) \subset L_w^1(IR)$ olduğundan $\wedge \subset W_w(IR) \subset L_w^1(IR)$ kapsaması mevcuttur. O halde herhangi $f \in L_w^1(IR)$ ve $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde $\|f - g\|_{1,w} < \varepsilon$ olacak biçimde $g \epsilon \wedge \subset W_w(IR)$ elemanı vardır. O halde $W_w(IR)$, $L_w^1(IR)$ uzayında her yerde yoğundur. Diğer yandan, her $f \epsilon W_w(IR)$ için $\|f\|_{1,w} \leq \|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{W^p} = \|f\|_w$ olduğu açıktır. Ayrıca, $W_w(IR)$, $L_w^1(IR)$ üzerinde Banach modülü olduğu Önerme 6'da gösterildi. Buradan $f, g \epsilon W_w(IR)$ için $\|f * g\|_w \leq M\, \|f\|_{1,w}\|g\|_w$ olacak şekilde $M > 0$ sayısı vardır. Böylece $(W_w(IR), \|.\|_w)$, $\left(L_w^1(IR), \|.\|_{1,w}\right)$ uzayı üzerinde bir Soyut Segal cebirdir.

Önerme 8. $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı, IR üzerinde bir Banach Fonksiyon uzayıdır.

İspat: Herhangi $K \subset IR$ kompakt alt kümesi verilsin. Alınan herhangi $f \epsilon W_w(IR)$ için $f \in L_w^1(IR)$ ve $\hat{f} \epsilon W^p(IR)$ olduğundan $\int_K |f(x)|\, dx \leq \int_{IR} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$ olur. Burada $\|.\|_1 \leq \|.\|_{1,w}$ eşitsizliği kullanılırsa $\int_K |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{1,w}$ bulunur. Bunun sonucu olarak $\int_K |f(x)|\, dx \leq \|f\|_{1,w} + \left\|\hat{f}\right\|_{W^p} = \|f\|_w$ olup, $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayı, IR üzerinde bir Banach Fonksiyon uzayıdır.

Önerme 9. w_1, w_2, IR üzerinde ağırlık fonksiyonları olmak üzere $W_{w_1}(IR) \subset W_{w_2}(IR)$ ise her $f \in W_{w_1}(IR)$ için $\|f\|_{w_2} \leq a\, \|f\|_{w_1}$ olacak biçimde bir $a > 0$ sabiti vardır.

İspat: $W_{w_1}(IR) \subset W_{w_2}(IR)$ olsun. Bir $|\|.\||$ fonksiyonu $f \in W_{w_1}(IR)$ olmak üzere $|\|f\|| = \|f\|_{w_1} + \|f\|_{w_2}$ biçiminde tanımlansın. Bu $|\|.\||$ fonksiyonu iki normun toplamı olduğundan, $W_{w_1}(IR)$ uzayı üzerinde bir normdur. Şimdi $(W_{w_1}(IR), |\|.\||)$ normlu uzayının bir Banach uzayı olduğunu gösterelim. Bunun için $(W_{w_1}(IR), |\|.\||)$ uzayından herhangi bir (f_n) Cauchy dizisi alalım. Her $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $m, n \geq n_0$ için, $|\|f_n - f_m\|| = \|f_n - f_m\|_{w_1} + \|f_n - f_m\|_{w_2} < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in IN$ sayısı vardır. Bu ise (f_n) dizisinin $(W_{w_1}(IR), \|.\|_{w_1})$ ve $(W_{w_2}(IR), \|.\|_{w_2})$ uzaylarında birer Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $(W_{w_1}(IR), \|.\|_{w_1})$ ve $(W_{w_2}(IR), \|.\|_{w_2})$ uzayları birer Banach uzayı olduklarından (f_n) dizisi $W_{w_1}(IR)$

uzayının bir $f \in W_{w_1}(IR)$ ve $W_{w_2}(IR)$ uzayının da bir $g \in W_{w_2}(IR)$ fonksiyonuna yakınsar. Dolayısıyla verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n \geq n_1$ olduğunda

$$\|f_n - f\|_{w_1} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde bir $n_1 \in IN$ sayısı ve her $n \geq n_2$ olduğunda

$$\|f_n - g\|_{w_2} < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak biçimde bir $n_2 \in IN$ sayısı vardır. Eğer $\|.\|_1 \leq \|.\|_{W^p} \leq \|.\|_{w_1}$ eşitsizliği kullanılırsa, her $n \geq n_1$ için

$$\|f_n - f\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

ve $\|.\|_1 \leq \|.\|_{W^p} \leq \|.\|_{w_2}$ eşitsizliği de kullanılırsa her $n \geq n_2$ için

$$\|f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

yazılır. Diğer yandan (f_n) dizisi $L^1(IR)$ de f fonksiyonuna yakınsadığından aynı f fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsayan bir $\left(f_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır. Bu (f_n) dizisi $\mathrm{W}_{\mathrm{w}_2}(\mathrm{IR})$ uzayında Cauchy dizisi olduğundan $\varepsilon > 0$ sayısı için her $n, n_k \geq n_3$ olduğunda,

$$\left\|f_n - f_{n_k}\right\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

olacak biçimde $n_3 \in IN$ sayısı vardır. Eğer $n_4 = mak\{n_2, n_3\}$ denir ve (5), (6) bağıntıları da kullanılırsa, aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n_k \geq n_4$ olduğunda

$$\left\|f_{n_k} - g\right\|_1 \leq \left\|f_{n_k} - f\right\|_1 + \|f_n - g\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

elde edilir. Yani $\left(f_{n_k}\right)$ dizisi g fonksiyonuna $\|.\|_1$ normuna göre yakınsar. Bunun sonucu $\left(f_{n_k}\right)$ alt dizisinin g fonksiyonuna hemen hemen her yerde yakınsayan bir $\left(f_{n_{k_l}}\right)$ alt dizisi vardır. Eğer $\left(f_{n_k}\right)$ dizisinin f fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini A ile gösterirsek $\mu(A) = 0$ olur. Böylece verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in IR - A$ için her $n_k \geq m_1$ olduğunda,

$$\left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| < \varepsilon \tag{7}$$

olacak şekilde $m_1 \in IN$ sayısı vardır. Bu nedenle, yine $\left(f_{n_k}\right)$ alt dizisi bir Cauchy dizisi olup, aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x \in IR$ için, her $n_k, n_{k_l} \geq m_2$ olduğunda

$$\left|f_{n_k}(x) - f_{n_{k_l}}(x)\right| < \frac{\epsilon}{2} \tag{8}$$

olacak biçimde $m_2 \in IN$ sayısı vardır. Eğer $m_0 = mak\{m_1, m_2\}$ denir ve (7) ve (8) eşitsizlikleri kullanılırsa, verilen $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $n_{k_l} \geq m_0$ için

$$\left|f_{n_{k_l}}(x) - f(x)\right| \leq \left|f_{n_{k_l}}(x) - f_{n_k}(x)\right| + \left|f_{n_k}(x) - f(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{9}$$

elde edilir. O halde $\left(f_{n_{k_l}}\right)$ alt dizisi f fonksiyonuna noktasal yakınsar. Bu $\left(f_{n_{k_l}}\right)$ alt dizisinin g fonksiyonuna yakınsamadığı noktaların kümesini de B ile gösterirsek, $\mu(B) = 0$ olup, aynı $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x \in IR - B$ için $n_{k_l} \geq m_3$ olduğunda,

$$\left|f_{n_{k_l}}(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{10}$$

olacak biçimde $m_3 \in IN$ sayısı vardır. $k_0 = mak\{m_0, m_3\}$ diyelim. Herhangi $x \notin A \cup B$ için $x \notin A$ ve $x \notin B$ olduğundan (9), (10) ifadeleri kullanılırsa her $n_{k_l} \geq k_0$ için

$$|f(x) - g(x)| \leq \left|f(x) - f_{n_{k_l}}(x)\right| + \left|f_{n_{k_l}}(x) - g(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. Halbuki $\mu(A \cup B) = 0$ idi. O halde hemen hemen her yerde $f = g$ elde edilir. $p_0 = mak\{n_1, n_2\}$ denirse, her $n > p_0$ için

$$|||f_n - f||| = \|f_n - f\|_{w_1} + \|f_n - g\|_{w_2} = \|f_n - f\|_{w_1} + \|f_n - f\|_{w_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

bulunur. O halde $(W_{w_1}(IR), |||.|||)$, bir Banach uzayıdır.

İspatın tamamlanması için kapalı grafik teoreminin bir yorumunu kullanalım. $(W_{w_1}(IR), |||.|||)$ uzayından $(W_{w_1}(IR), \|.\|_{w_1})$ uzayına giden $I(f) = f$ birim fonksiyonunun birebir, örten ve doğrusal olduğu açıktır. Ayrıca, $\|I(f)\|_{w_1} = \|f\|_{w_1} \leq |||f|||$ eşitsizliğinden I fonksiyonu süreklidir. O halde kapalı grafik teoreminden dolayı I birim fonksiyonu bir homeomorfizm olup, bunların sonucu $W_{w_1}(IR)$ uzayı üzerindeki $|||.|||$ ve $\|.\|_{w_1}$ normları denktir. Böylece her $f \in W_{w_1}$(IR) için $|||f||| \leq c\|f\|_{w_1}$ olacak biçimde $c > 0$ reel sayısı vardır. Buradan $\|f\|_{w_2} \leq |||f||| \leq c\,\|f\|_{w_1}$ ifadesi bulunur.

Önerme 10. Her $0 \neq f \in W_w(IR)$ için,

$$c(f)w(x) \leq \|L_x f\|_w \leq w(x)\|f\|_w \tag{11}$$

olacak şekilde $c(f) > 0$ sayısı ve $c\,w(x) \leq |||L_x||| \leq w(x)$ olacak biçimde $c > 0$ sayısı vardır.

İspat: $0 \neq f \in W_w(IR)$ alalım. Buradan $f \in L^1_w(IR)$ ve $\hat{f} \epsilon W^p(IR)$ yazılır. $0 \neq f \in L^p_w(IR)$ olduğunda $c(f)w(x) \leq \|L_x f\|_{p,w} \leq w(x)\|f\|_{p,w}$ olacak biçimde $c(f) > 0$ sayısının mevcut olduğu [12] biliniyor. Özel olarak p=1 için de doğru olacağından $0 \neq f \in L^1_w(IR)$ olduğunda

$$c(f)w(x) \leq \|L_x f\|_{1,w} \leq w(x)\|f\|_{1,w} \tag{12}$$

olacak biçimde $c(f) > 0$ sayısı vardır. Böylece her $0 \neq f \in W_w(IR)$ için (11) eşitsizliğinin sol kısmını ispatlayalım. $W^p(IR)$ uzayının kuvvetli invaryant olması ve (12) eşitsizliği kullanılırsa

$$c(f)w(x) \le c(f)w(x) + \|\hat{f}\|_{W^p} \le \|L_x f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{W^p}$$
$$= \|L_x f\|_{1,w} + \|\widehat{L_x f}\|_{W^p} \le \|L_x f\|_w \quad (13)$$

bulunur. Eğer $w(x) \ge 1$ eşitsizliği ve (11) eşitsizliğinin sağ kısmı dikkate alınırsa,

$$\|L_x f\|_w \le \|L_x f\|_{1,w} + \|\widehat{L_x f}\|_{W^p} \le w(x)\|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{W^p}$$
$$\le w(x)(\|f\|_{1,w} + \|\hat{f}\|_{W^p}) = w(x)\|f\|_w \quad (14)$$

elde edilir. O halde (13), (14) eşitsizliklerinden istenen elde edilmiş olur. Burada $c := mak\{c(f) \mid \|f\|_w \le 1\}$ olarak tanımlanırsa

$$c\, w(x) \le |\|L_x f\|| \le w(x)$$

eşitsizliğinin doğruluğu görülür.

Önerme 11. w_1, w_2, IR üzerinde ağırlık fonksiyonları olsun. $W_{w_1}(IR) \subset W_{w_2}(IR)$ olması için gerek ve yeter koşul $w_2 \prec w_1$ olmasıdır.

İspat: $W_{w_1}(IR) \subset W_{w_2}(IR)$ olsun. Herhangi $f \in W_{w_1}(IR)$ için $f \in W_{w_2}(IR)$ olup, $x \to \|L_x f\|_{w_1}$ fonksiyonunun w_1 ağırlık fonksiyonuna ve $x \to \|L_x f\|_{w_2}$ fonksiyonunun w_2 ağırlık fonksiyonuna denk olduğu Önerme 10'dan görülmektedir. Böylece, her $x \in IR$ için,

$$c^{-1} w_1(x) \le \|L_x f\|_{w_1} \le c\, w_1(x) \quad (15)$$

olacak biçimde $c > 0$ sabiti ve

$$d^{-1} w_2(x) \le \|L_x f\|_{w_2} \le d\, w_2(x) \quad (16)$$

olacak biçimde $d > 0$ sabiti vardır. Ayrıca $f \in W_{w_1}(IR)$ için $L_x f \in W_{w_1}(IR)$ olup, Önerme 9'dan dolayı $\|L_x f\|_{w_2} \le a\|L_x f\|_{w_1}$ olacak şekilde $a > 0$ sayısı vardır. (15) ve (16) eşitsizlikleri kullanılırsa

$$d^{-1} w_2(x) \le \|L_x f\|_{w_2} \le a\|L_x f\|_{w_1} \le a\, c\, w_1(x)$$

olup, buradan

$$d^{-1} w_2(x) \le a\, c\, w_1(x)$$

elde edilir. Böylece elde edilen $w_2(x) \le a\, c\, d\, w_1(x)$ eşitsizliğinde $k = a\, c\, d$ denirse $w_2(x) \le k\, w_1(x)$ olur. Bu ise $w_2 \prec w_1$ olmasıdır.

Tersine $w_2 \prec w_1$ olsun. Her $x \in IR$ için $w_2(x) \le r\, w_1(x)$ olacak biçimde $r > 0$ sayısı vardır. Herhangi bir $f \in W_{w_1}(IR)$ için $f \in L^1_{w_1}(IR)$ ve $\hat{f} \epsilon W^p(IR)$ olur. Böylece

$$\|f\|_{1,w_2} = \int_{IR} |f(x)|\, w_2(x)\, dx \le \int_{IR} |f(x)|\, r\, w_1(x)\, dx$$
$$= r \int_{IR} |f(x)|\, w_1(x)\, dx = r\, \|f\|_{1,w_1} < \infty$$

olup, $f \in L^1_{w_2}(IR)$ elde edilir. Ayrıca $\hat{f} \epsilon W^p(IR)$ idi. O halde $f \in W_{w_2}(IR)$ olup, $W_{w_1}(IR) \subset W_{w_2}(IR)$ bulunur.

4. Sonuçlar ve tartışma

Bu çalışmada, $1 \leq p < \infty$ koşulunu sağlayan reel sayılar ve w, IR reel sayılar kümesi üzerinde tanımlı (Beurling) ağırlık fonksiyonu (B.D.) koşullarını sağlamak üzere $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayının bir Banach cebiri, Soyut Segal cebiri ve Banach fonksiyon uzayı oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Bu sonuçlar literatürdeki sonuçlarla benzerlik göstermektedir. Numan [13] çalışmasında $(A_w(p,q)(G), \|.\|_{A_w})$ uzayının girişim işlemine göre soyut Segal cebiri olduğunu, Sağır ise [14] çalışmasında w, (B.D.) koşullarını sağlamak üzere $(A_w^{L_w^p(\hat{G}),Y}(G), \|.\|_w^{L_w^p(\hat{G}),Y})$ uzayının girişim işlemine göre soyut Segal cebiri olduğunu ispatlamışlardır. Çalışmadan elde edilen bir diğer sonuç ise $W_{w_1}(IR)$ ve $W_{w_2}(IR)$ uzaylarının belli koşullar altında $W_{w_1}(IR) \subset W_{w_2}(IR)$ kapsamasını gerçekleştirmeleridir. w, (B.D.) koşullarını sağlamak üzere $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayının idealleri ve regüler maksimal ideallerinin araştırılması önerilmektedir. Yine $(W_w(IR), \|.\|_w)$ uzayının yarı basit uzay olması ve çarpanları araştırılabilir.

Teşekkür

Yardım ve desteklerinden dolayı Prof. Dr. A. Turan GÜRKANLI'ya teşekkürlerimi sunarım. Bu çalışma yazarın yüksek lisans tezinden hazırlanmıştır.

Kaynaklar

[1] Krogstad, H.E., Multipliers of Segal algebras, **Mathematica Scandinavica**, 38, 285-303, (1976).
[2] Rudin, W., **Real and Complex Analysis**, Mc: Graw-Hill, New York, (1966).
[3] Rudin, W., **Fourier analysis on groups**, Interscience publishers, New-York, (1962).
[4] Reiter, H. and Stegeman, J.D., **Classical harmonic analysis and locally compact groups**, Clarendon Press, Oxford, (2001).
[5] Feichtinger, H.G. and Gürkanlı, A.T., On a family of weighted convolution algebras, **International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences**, 13 (3), 517-526, (1990).
[6] Cartan, H., **Differential calculus**. Hermann, Paris, France, (1967).
[7] Wang, H.C., **Homogeneous Banach algebras**, Marcel Dekker INC, New York, (1977).
[8] Burnham, J.T., Closed ideals in subalgebras of Banach algebras, **American Mathematical Society,** 32 (2), 551-555, (1972).
[9] Bennett, C. and Sharpley, R., **Interpolation of Operators**, Academic Press, San Diego, USA, (1988).
[10] Domar, Y., Harmonic analysis based on certain commutative banach algebras, **Acta Mathematica**, 96, 1-66, (1956).
[11] Beurling, A., Sur les integrales de fourier absolument convergentes. **IX. Scandinavian Mathematical Congress**, Helsingfors, (1938).

[12] Fischer, R.H., Gürkanlı, A.T. and Liu, T.S., On family of weighted spaces and Wiener type spaces **Mathematica Slovaca,** 46 (1), 71-82, (1996).

[13] Numan, S., $A_w(p,q)(G)$ Banach cebirinin idealleri, **Karadeniz Fen Bilimleri Dergisi,** 10 (1), 162-177, (2020).

[14] Sağır, B., On functions with Fourier transforms in $W(B,Y)$, **Demonstratio Mathematica,** 33 (2), 355-363, (2000).