



Zaman Skalasında Box-Cox Regresyon Yöntemi

Atilla
GÖKTAŞ¹

Öznur İŞÇİ²

Sibel PAŞALI
ATMACA³

M. Niyazi
ÇANKAYA⁴

Özet

Hata terimi ile bağımlı değişkenin süreklilik ve normal dağılıma varsayımı bozulduğu durumlarda λ_j , $j = 1, 2, \dots, k$, kuvvet dönüşümü ile tanımlanan Box-Cox regresyon yöntemi kullanılmaktadır. Y 'ler üzerindeki λ_j , $j = 1, 2, \dots, k$, kuvvet dönüşümünün hangi λ_j değerinde Hata Kareler Toplamı (HKT)'ni minimum yaptığı durum ele alınmaktadır. Box-Cox regresyon yöntemi, regresyon fonksiyonunun doğrusal olmayan durumu, sabit olmayan hata varyansları ve hata terimlerinin dağılımlarının çarpıklığını düzeltmek için Y 'nin üzerinde dönüşüm yapılması açısından oldukça uygundur. Bu çalışmada fark ve diferansiyel analizin birlikte ele alındığı zaman skalası türev kavramı kullanılarak Box-Cox regresyon yöntemi kullanmanın avantaj ve dezavantajları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Zaman skalası, İleri sıçrama, Geri sıçrama, Box-Cox Regresyon Yöntemi.

JEL Sınıflandırma Kodları: C01, C02

¹ Atilla GÖKTAŞ, Muğla Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Muğla, e-mail: gatilla@mu.edu.tr

² Öznur İŞÇİ, Muğla Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Muğla, e-mail: oznur.isci@mu.edu.tr

³ Sibel Paşalı ATMACA, Muğla Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Muğla, e-mail: sibelpasali2002@yahoo.com

⁴ M. Niyazi ÇANKAYA, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, İstatistik Bölümü, Ankara, e-mail: mehmetn_cankaya@yahoo.com

Box-Cox Regression Method in Time Scaling

Abstract

Box-Cox regression method with λ_j , for $j = 1, 2, \dots, k$, power transformation can be used when dependent variable and error term of the linear regression model do not satisfy the continuity and normality assumptions. The situation obtaining the smallest mean square error when optimum power λ_j , transformation for $j = 1, 2, \dots, k$, of Y has been discussed. Box-Cox regression method is especially appropriate to adjust existence skewness or heteroscedasticity of error terms for a nonlinear functional relationship between dependent and explanatory variables. In this study, the advantage and disadvantage use of Box-Cox regression method have been discussed in differentiation and differential analysis of time scale concept.

Key Words: Time scale, Forward jump, Backward jump, Box-Cox regression method.

JEL Classification Codes: C01, C02

1. Giriş

Zaman skalası kavramını ilk defa Stefan Hilger doktora tezinde ileri sürmüştür. Zaman skalasının amacı, kesikli analizi ile sürekli analizi bir çatı altında birleştirmek olmuştur. \mathfrak{R} reel sayılarının boştan farklı kapalı alt kümesine zaman skalası denir ve T ile gösterilir (Bohner and Peterson, 2001: 1). Böylelikle de,

$$\mathfrak{R}, \quad Z, \quad N, \quad N_0,$$

sırası ile, gerçel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve pozitif tam sayılar zaman skalasının örneklerindedir ve $[0,1] \cup [2, 3], [0,1] \cup N$ şeklinde değerlendirilir. Yani $L \neq \emptyset$ ve $L \subseteq \mathfrak{R}$ yani $[] \cup [] \cup \dots = \mathfrak{R}$.

$Q, \mathfrak{R} \setminus Q, C, (0,1)$, sırasıyla rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, kompleks sayılar ve 0 ve 1 açık aralığı zaman skalasında yer almamaktadır. Zaman skalasının kapalı olması nedeniyle, açıkça görüleceği üzere rasyonel sayılar bir zaman skalası değildir.

Gerçekten, T 'de tanımlanmış olan f fonksiyonu için delta türev f^Δ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

(i) $f^\Delta = f'$ $T = \mathfrak{R}$ ise genel türevdir.

(ii) $f^\Delta = \Delta f$ $T = Z$ ise genel ileri fark operatörüdür.

Zaman skalasını daha iyi açıklayabilmek için aşağıda bazı tanım ve teoremler verilmektedir.

Tanım 1.1. $f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^K \in > 0$ verildiğinde t 'nin bir U komşuluğu ($U = (t - \delta, t + \delta)$) ve $\delta > 0$ vardır ki tüm $s \in U$ için, $\sigma(t) = \inf \{s \in T : s > t\}$ olmak üzere;

$$|[f(\sigma(t)) - f(s)] - f^\Delta(t)[\sigma(t) - s]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - s|$$

tanımlanır ve $f^\Delta(t)$ f 'nin t 'de delta türevi olarak söylenir (Anderson and Hoffacker, 2003: 10).

Teorem 1.1. $f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^K$ noktası verildiğinde (Bohner and Peterson, 2001: 5-6) ve (Agarwal and Bohner, 1999: 3),

(i) f, t 'de türevlenebilir olsun, o zaman f, t 'de süreklidir.

(ii) f, t 'de sürekli ve t sağda serpilmiş ise, o zaman f, t 'de türevlenebilirdir.

$$f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} \quad s \rightarrow t, \quad s \in T \setminus \{\sigma(t)\}$$

(iii) t sağ yoğunluksa, $f^\Delta(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ sonlu bir sayının ancak ve

ancak $\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ eşitliğinin sağlanması koşuluyla f, t 'de türevlenebilir olur.

(iv) f, t 'de delta-türevlenebilir olsun, o zaman

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^\Delta(t)$$

şeklinde elde edilir.

Tanım 1.2. $f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^K \in > 0$ verildiğinde t 'nin bir U komşuluğu ($U = (t - \delta, t + \delta)$) ve $\delta > 0$ vardır ki tüm $s \in U$ için, $\rho(t) = \inf \{s \in T : s < t\}$ olmak üzere,

$$|[f(\rho(t)) - f(s)] - f^\nabla(t)[\rho(t) - s]| \leq \varepsilon |\rho(t) - s|$$

tanımlanır ve $f^\nabla(t)$ f 'nin t 'de nabla türevi olarak söylenir (Anderson and Hoffacker, 2003: 10).

Teorem 1.2. $f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^K$ noktası verildiğinde,

- (i) f , t 'de nbla-türevlenebilir ise f , t 'de süreklidir.
(ii) f , t 'de sürekli ve t solda serpilmiş ise, o zaman f t 'de nbla-türevlenebilirdir.

$$f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s}$$

- (iii) t sol yoğunluksa, $f^\nabla(t) = \lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ olması için ancak ve ancak

$\lim_{s \rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$ eşitliğinin sağlanması koşulu ile f t 'de türevlenebilir olur.

- (iv) f , t 'de nbla-türevlenebilir ise, aşağıdaki fonksiyonel ilişki yazılır:

$$f(\rho(t)) = f(t) + v(t)f^\nabla(t)$$

Tanım 1.3. $f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^K \in > 0$ verildiğinde t 'nin bir U komşuluğu ($U = (t - \delta, t + \delta)$) ve $\delta > 0$ vardır ki tüm $s \in U$ için,

$$|[f(\sigma(t)) - f(\rho(t))] - f^c(t)[\sigma(t) - \rho(t)]| \leq \varepsilon |\sigma(t) - \rho(t)|$$

tanımlanır ve $f^c(t)$ f 'nin t 'de merkez türevi olarak söylenir (Biles, Atıçı, and Lebedinsky, 2007: 7).

Tanım 1.4. $f : T \rightarrow R$ bir fonksiyon ve $t \in T^K \in > 0$ verildiğinde t 'nin bir U komşuluğu ($U = (t - \delta, t + \delta)$) ve $\delta > 0$ vardır ki tüm $s \in U$ için,

$$\begin{aligned} & |[f(\sigma(t)) - f(t)][t - \rho(t)] + [f(t) - f(\rho(t))][\sigma(t) - t] - 2f^a[\sigma(t) - t][t - \rho(t)]| \\ & \leq \varepsilon |[(\sigma(t) - t)][t - \rho(t)]| \end{aligned}$$

tanımlanır ve $f^a(t)$ f 'nin t 'de ortalama türevi olarak söylenir.

Tanım 1.5. İleri Sıçrama Operatörü (Forward Jump Operator)

T bir zaman skalası olsun. $t \in T$ için ileri sıçrama operatörü $\sigma : T \rightarrow T$ tanımlanmaktadır (Anderson and Hoffacker, 2003: 9),

$$\sigma(t) = \inf\{s \in T : s > t\}$$

Sağ-parçalı fonksiyon $\forall x \in T$ için $\mu_\sigma : T \rightarrow [0, \infty)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mu_\sigma(t) = \sigma(t) - t$$

Tanım 1.6. Geri Sıçrama Operatörü (Backward Jump Operator)

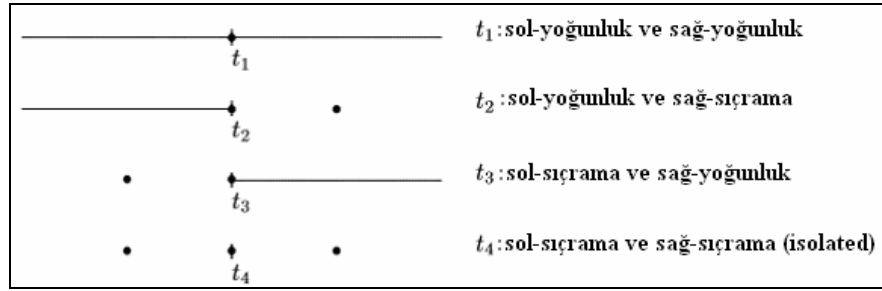
T bir zaman skalası olsun. $t \in T$ için geri sıçrama operatörü $\rho : T \rightarrow T$ tanımlanmaktadır (Anderson and Hoffacker, 2003: 9),

$$\rho(t) = \sup\{s \in T : s < t\}$$

Sol-parçalı fonksiyon $\mu_\rho : T \rightarrow [0, \infty)$ aşağıdaki gibi tanımlanmaktadır:

$$\mu_\rho(t) = t - \rho(t)$$

Eğer $\mu_\sigma(t) > 0$ ise, t 'nin sağ-sıçrama, diğer durumda ise sağ-yoğunluk olduğunu söyleriz. Aynı şekilde, eğer $\mu_\rho(t) > 0$ ise, t sol-sıçrama, diğer durumda ise sol yoğunluk olduğunu söyleriz.



Şekil 1.1. Noktaların Sınıflandırılması

Şekil 1.1'de noktaların sınıflandırılması verilmektedir (Bohner and Peterson, 2001: 2). Yukarıdaki bu iki tanımlamada, $\min \emptyset = \max T$ (T maksimum t ise $\sigma(t) = t$) ve $\max \emptyset = \min T$ (T minimum t ise $\rho(t) = t$) olarak alırız. \emptyset boş kümeyi göstermektedir. Eğer $\sigma(t) > t$ ise, t 'nin sağ-sıçrama ve $\rho(t) < t$ ise, sol-sıçrama olduğunu söyleriz. Hem sağ-sıçrama hem de sol-sıçrama olan noktalar izole olmuş (isolated) olarak isimlendirilir. Aynı zamanda, eğer $t < \max T$ ve $\sigma(t) = t$ ise t sağ-yoğunluk, eğer $t > \min T$ ve $\rho(t) = t$ ise sol-yoğunluk olarak isimlendirilir. Hem sağ-yoğunluk hem de sol-yoğunluk olan noktalar yoğunluk olarak isimlendirilir (Bolden, Gonzalez and Parker, 2002: 3). Bu noktaların sınıflandırılması bütün olarak Tablo 1.1'de yer almaktadır (Bohner and Peterson, 2001: 2).

Tablo 1.1. Noktaların Sınıflandırılması

t sağ-sıçrama	$t < \sigma(t)$
t sağ-yoğunluk	$t = \sigma(t)$
t sol-sıçrama	$\rho(t) < t$
t sol-yoğunluk	$\rho(t) = t$
t ortada (isolated)	$\rho(t) < t < \sigma(t)$
t yoğunluk	$\rho(t) = t = \sigma(t)$

Teorem 1.3. $f, g : T \rightarrow R$, T^K da türevlenebilir olsun. Bu durumda,

(i) $f + g : T \rightarrow R$ toplamı t 'de türevlenebilirdir:

$$(f + g)^\Delta(t) = f^\Delta(t) + g^\Delta(t).$$

(ii) Herhangi bir a sabit sayısı için, $\alpha f : T \rightarrow R$ t 'de türevlenebilirdir:

$$(\alpha f)^\Delta(t) = \alpha f^\Delta(t).$$

(iii) $fg : T \rightarrow R$ t 'de türevlenebilirdir:

$$(fg)^\Delta(t) = f^\Delta(t)g(t) + f(\sigma(t))g^\Delta(t) = f(t)g^\Delta(t) + f^\Delta(t)g(\sigma(t)).$$

(iv) Eğer, $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ise o zaman $\frac{1}{f}$ t 'de türevlenebilirdir:

$$\left(\frac{1}{f}\right)^\Delta(t) = -\frac{f^\Delta(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

(v) Eğer, $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ise o zaman $\frac{f}{g}$ t 'de türevlenebilirdir:

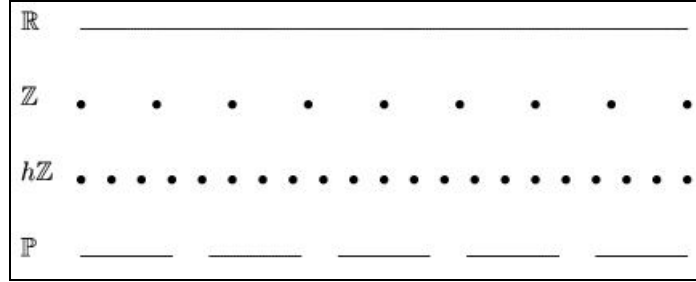
$$\left(\frac{f}{g}\right)^\Delta(t) = \frac{f^\Delta(t)g(t) - f(t)g^\Delta(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

şeklinde elde edilir (Tan, 2006: 7). Tablo 1.2'de bazı zaman skalası örnekleri yer almaktadır (Bohner and Peterson, 2001: 18).

Tablo 1.2. Zaman Skalası Örnekleri

T	$\mu(t)$	$\sigma(t)$	$\rho(t)$
\mathbb{R}	0	t	t
Z	1	$t+1$	$t-1$
hZ	h	$t+h$	$t-h$
a^N	$(q-1)^t$	q^t	t/q
2^N	t	$2t$	$t/2$
N_0^2	$2\sqrt{t}+1$	$(\sqrt{t}+1)^2$	$(\sqrt{t}-1)^2$

Tablo 1.2'deki zaman skalası örneklerini bazılarının sayı doğrusu üzerinde gösterimi Şekil 2.1'de verilmektedir:



Şekil 2.1: Bazı zaman skalaları

2. Box-Cox Regresyon Yöntemi

Box-Cox regresyon modeli bağımlı değişken üzerinde aşağıdaki gibi bir dönüşüm tanımlamaktadır (Kutner, Nachtsheim and Li, 2005: 135).

$$Y^\lambda = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \dots + \beta_k X_k + \varepsilon \quad (2.1)$$

burada

$$Y_i^\lambda = \begin{cases} \frac{Y_i^\lambda - 1}{\lambda} & \lambda \neq 0 \\ \ln(Y) & \lambda = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

λ parametrelili kuvvet dönüşümü kullanılarak ilgilenilen modele ilişkin katsayılar elde edilir. λ parametresinin hangi değerde HKT'yi en küçük verdiği araştırılır. λ kuvvet dönüşümü parametre tahmininde özellikle bağımlı değişkenin normallik veya hataların sabit varyanslı olma varsayımı bozulduğunda kullanılması yararlıdır (Osborne, 2010:2).

2.1 Zaman Skalası Türev Tanımına Göre İleri ve Geri Sıçrama Operatörlerine İlişkin Normal Denklemlerin Elde Edilişi

Örnek olarak basit doğrusal regresyon modeline ilişkin normal denklemler elde edilecektir. Basit doğrusal regresyon modelinde en küçük kareler yöntemine göre, $Q = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = \sum_{i=1}^n (\varepsilon_i)^2 = \text{minimum}$ olmalıdır.

$$Q = \sum_{i=1}^n Y_i^2 - 2\beta_0 \sum_{i=1}^n Y_i - 2\beta_1 \sum_{i=1}^n X_i Y_i + n\beta_0^2 + 2\beta_0 \beta_1 \sum_{i=1}^n X_i + \beta_1^2 \sum_{i=1}^n X_i^2 \quad (2.1.1)$$

İleri sıçrama operatörüne göre β_0 ve β_1 ' e göre türev alınır ve sıfıra eşitlenirse (2.1.3) ve (2.1.5) elde edilir.

$$\frac{\partial^A Q}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n Y_i + n(\sigma(\beta_0) + \beta_0) + 2\beta_1 \sum_{i=1}^n X_i = 0 \quad (2.1.2)$$

$$n\sigma(\beta_0) + n\beta_0 + 2\beta_1 \sum_{i=1}^n X_i = 2 \sum_{i=1}^n Y_i \quad (2.1.3)$$

$$\frac{\partial^A Q}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i + \sum_{i=1}^n X_i^2 (\sigma(\beta_1) + \beta_1) + 2\beta_0 \sum_{i=1}^n X_i = 0 \quad (2.1.4)$$

$$\sum_{i=1}^n X_i^2 \sigma(\beta_1) + 2 \sum_{i=1}^n X_i^2 \beta_1 + 2\beta_0 \sum_{i=1}^n X_i = 2 \sum_{i=1}^n X_i Y_i \quad (2.1.5)$$

İleri sıçrama operatörlerine göre normal denklemlerin elde edilebilmesi için sırasıyla, $\sigma(\beta_0)$ yerine $\beta_0 + 1$ ve $\sigma(\beta_1)$ yerine $\beta_1 + 1$ yazılır.

2.2 Zaman Skalasına İlişkin Normal Denklemler

$\sigma(\beta_0)$ yerine $\beta_0 + 1$ ve $\sigma(\beta_1)$ yerine $\beta_1 + 1$ yazıldıktan sonra zaman skalası normal denklemleri (İleri Sıçrama Operatörü) eşitlik (2.2.1)'deki gibi elde edilmektedir.

$$n\hat{\beta}_0 + \frac{n}{2} + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{i=1}^n y_i \quad (2.2.1)$$

$$\hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2} = \sum_{i=1}^n y_i x_i$$

eşitlik (2.2.1)'de elde edilen iki bilinmeyenli normal denklemler β_0 göre çözüldüğünde β_0 zaman skalası tahmini eşitlik (2.2.2)'deki gibi elde edilir.

$$\hat{\beta}_{0zi} = - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i x_i - 2 \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i^2}{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)^2} \quad (2.2.2)$$

β_1 'e göre çözüldüğünde ise β_1 'in zaman skalası tahmini eşitlik (2.2.3)'teki gibi elde edilir.

$$\hat{\beta}_{1zi} = - \frac{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n \sum_{i=1}^n x_i y_i - n \sum_{i=1}^n x_i + 2 \sum_{i=1}^n y_i \sum_{i=1}^n x_i}{\left(n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right)^2} \quad (2.2.3)$$

3. Uygulama

Zaman skalasında Box-Cox regresyon yönteminin incelenmesinde (3.1)'deki regresyon denklemi kullanılmıştır. $n=100$ büyüklüğünde iki değişkenli normal dağılımdan belli özelliklere sahip 4 farklı bağımsız kitleden rastgele türetilmiştir. Box-Cox regresyon yöntemi sağlam parametre tahmini verdiği için örneklem büyüklüğünden etkilenmesi söz konusu değildir (Marazzi and Yohai, 2004:5). Bu yüzden örneklem büyüklüğü $n=100$ sabit alınmıştır. Buradan farklı λ değerleri için HKT'yi en küçük yapan λ değeri seçilmektedir. Bu amaçla çalışmada veri üretimi için MİNİTAB 15.0 paket programı ve en iyi λ belirlemek için R paket programı kullanılmıştır. Bunun için λ , -3 ile 3 aralığında alınmış ve her adımda λ değeri 0.01 arttırılarak, 700 farklı λ değeri için HKT'mi en küçük yapan λ değeri elde edilmiştir.

Box-Cox regresyon modeli eşitlik (3.1) deki gibi tanımlanabilir.

$$Y^\lambda = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon \quad (3.1)$$

Eşitlik (3.1) de verilen Box-Cox regresyon modelinin zaman skalasına göre parametre tahminleri eşitlik (2.2.2) ve eşitlik (2.2.3) deki Y_i yerine Y_i^λ konularak sırasıyla eşitlik (3.2) ve eşitlik (3.3)'deki gibi elde edilir.

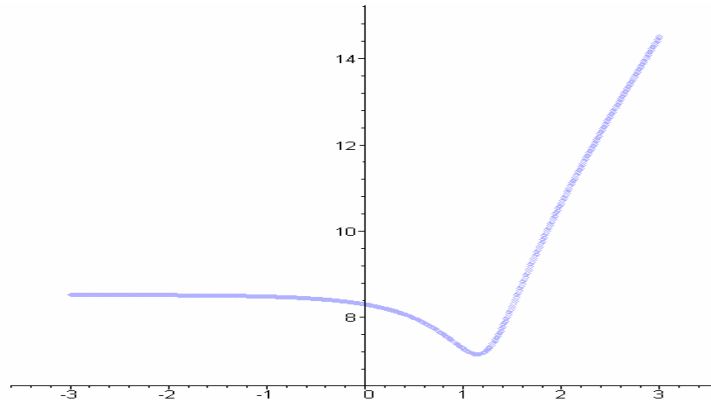
$$\beta_0 = -\frac{1 - n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - 2(\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i^{\lambda} x_i) + (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i^2) + n^2(\sum_{i=1}^n y_i^{\lambda})(\sum_{i=1}^n x_i^2)}{2n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (3.2)$$

$$\beta_1 = -\frac{1 - 2n(\sum_{i=1}^n y_i^{\lambda} x_i) + (2\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i^{\lambda}) + n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)n}{2n(\sum_{i=1}^n x_i^2) - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (3.3)$$

Birinci veri seti için ($n_1=100$), ortalama vektörü $\mu = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ve varyans-kovaryans

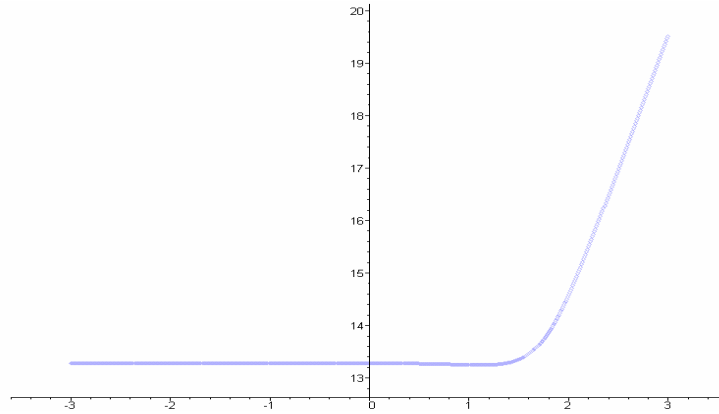
matrisi, $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.8 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$ olan iki değişkenli normal dağılımdan türetilen

rastgele veriler ele alınmıştır. Box-Cox regresyon modelindeki -3 ile +3 arasındaki 700 farklı λ değeri için eşitlik (3.2) ve eşitlik (3.3)'deki zaman skalası parametre tahminleri kullanılarak HKT hesaplanmıştır. Yatay eksenle farklı λ değerleri ve dikey eksenle HKT arasındaki ilişkiyi gösteren grafik Şekil 3.1'de sunulmuştur. Şekil 3.1'de görüldüğü gibi HKT'nin minimum olduğu değer $\lambda = 1.14$ ve HKT=6.70'dir. Buna göre klasik en küçük kareler yönteminden elde edilen HKT'dan daha düşük bir değer bulunmuştur.



Şekil 3.1: $n_1 = 100$ için λ ve HKT değerleri

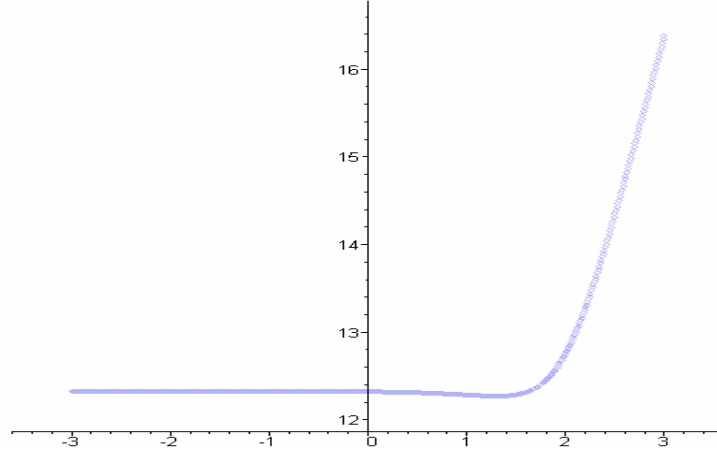
Benzer şekilde ikinci veri seti için ($n_2=100$), ortalama vektörü $\mu = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix}$ ve varyans-kovaryans matrisi $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}$ olan iki değişkenli normal dağılımdan türetilen rastgele veriler ele alınmıştır.



Şekil 3.2: $n_2 = 100$ için λ ve HKT değerleri

Şekil 3.2'den de görüldüğü gibi HKT'nın minimum olduğu λ değeri $\lambda = 1.12$ ve HKT=13.25 olarak bulunmuştur.

Üçüncü veri seti için ($n_3=100$), ortalama vektörü $\mu = \begin{bmatrix} 7 \\ 10 \end{bmatrix}$ ve varyans-kovaryans matrisi $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 \\ 0.6 & 1 \end{bmatrix}$ olan iki değişkenli normal dağılımdan türetilen rastgele veriler ele alınmıştır.

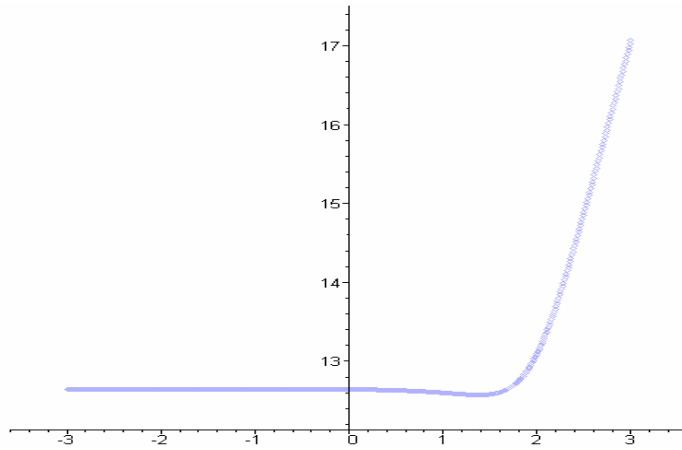


Şekil 3.3: $n_3 = 100$ için λ ve HKT değerleri

Şekil 3.3'de görüldüğü gibi HKT'nın minimum olduğu λ değeri $\lambda = 1.30$ ve HKT=12.27 elde edilmiştir.

Dördüncü veri seti için ($n_4=100$), ortalama vektörü $\mu = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$ ve varyans-

kovaryans matrisi $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0.7 \\ 0.7 & 1 \end{bmatrix}$ olan iki değişkenli normal dağılımdan türetilen rastgele veriler ele alınmıştır.



Şekil 3.4: $n_4 = 100$ için λ ve HKT değerleri

Şekil 3.4'den de görüldüğü gibi HKT'nın minimum olduğu λ değeri $\lambda = 1.38$ ve HKT=12.57 olarak bulunmuştur.

4. Sonuç ve Değerlendirme

Bu çalışmada Box-Cox regresyon modeli $Y^\lambda = \beta_0 + \beta_1 X + \varepsilon$ ele alınmıştır. En iyi λ değerini klasik en küçük kareler yöntemi yerine zaman skalası parametre tahminlerine göre elde edilmiştir. Veriler iki değişkenli normal dağılımdan rastgele türetilmiş ve $n = 100$ hacmindeki 4 farklı bağımsız örneklemin hangi λ değerinde en küçük HKT değerine ulaşıldığı araştırılmıştır. Burada örneklem büyüklüğünün veya kovaryans matrisinin determinantının etkisi ile ilgilenilmediğinden bağımsız 4 farklı örneklem seçilmiştir. Zaman skalası Box-Cox ve klasik en küçük kareler yöntemine göre elde edilen HKT için özet sonuçlar Tablo 4.1'de verilmektedir.

Tablo 4.1: Farklı Örneklemlere Göre Zaman Skalası ve Klasik En Küçük Kareler Yöntemi ile Elde Edilen λ ve HKT Sonuçları

n	λ	Zaman Skalası Box-Cox HKT	Klasik En Küçük Kareler HKT
$n_1 = 100$	1.14	6.70	28.79
$n_2 = 100$	1.12	13.25	86.49
$n_3 = 100$	1.30	12.27	70.36
$n_4 = 100$	1.38	12.57	60.85

Bu sonuçlara göre zaman skalası Box-Cox yöntemi ile elde edilen HKT, klasik en küçük kareler yöntemi ile elde edilen HKT'dan daha küçük bulunmuştur. Özellikle bağımlı değişkenin normal dağılım göstermemesi durumunda basit doğrusal regresyon modelinin yerine zaman skalası Box-Cox regresyon modelinin kullanılması daha uygun olmaktadır.

KAYNAKLAR

Agarwal, R.P. and Bohner, M. (1999), “Basic Calculus On Time Scales and Some of its Applicaitons”, *Results Math*, 35(1-2), 1-20.

Anderson, D. R. and Hoffacker, J. (2003), “Green’s Function For An Even Order Mixed Derivative Problem On Time Scales”, *Dynamic Systems and Applicaitons*, 12, 9-22.

Biles, D., Atıçı, F., Lebedinsky, A. (2007), “Examples of Time Scale Models in Macroeconomics”, *Working paper*, 1-32.

Bohner, M. and Peterson A. (2001), “*Dynamic Equations on Time Scales: An Introduction with Applications*”, Birkhauser, Boston.

Bolden, T., Gonzalez, B., Parker, R. (2002), “Derivative Approximations on Time Scales”, *Lecture Notes*, 1-15.

Kutner, M.H., Nachtsheim, C.J., Neter, J. and Li, W. (2005), “*Applied Linear Statistical Models*”, Fifth Edition, Irwin Book Team, Newyork.

Marazzi A., Yohai V. J. (2004), “Robust Box-Cox Transformations For Simple Regression. Theory And Applications Of Recent Robust Methods”, *Series: Statistics for Industry and Technology*, Birkhauser, Basel. Edited by M. Hubert, G. Pison, A. Struyf and S. Van Aelst., 173-182.

Osborne, J.W. (2010), “Improving Your Data Transformations: Applying The Box-Cox Transformation”, *Practical Assessment, Research & Evaluation*, Volume 15, Number 12, October, ISSN 1531-7714, 1-9.

Tan L. H. (2006), “*Investigations Into Dynamic Equations on Time Scales*”, School of Mathematics, Master Thesis, The University of New South Wales, 1-100.