

Viskoelastik Malzemeye Sahip Eksenel Dönel Simetrik Problemlerin Dinamik Analizi

Beytullah TEMEL^{*1}, Mehmet Fatih ŞAHAN¹ ve Ali KARA¹

¹Çukurova Üniversitesi, Müh. Mim. Fakültesi, İnşaat Mühendisliği Bölümü, Adana

Özet

Bu çalışmada viskoelastik malzemeye sahip eksenel dönel simetrik problemlerin dinamik davranışı Laplace uzayında teorik olarak incelenmiştir. Dinamik yükleme durumu için sonlu elemanlar formülasyonu, Laplace uzayında Galerkin yaklaşımı ile yapılmıştır. Problemin malzemesi izotropik, lineer elastik veya viskoelastik olarak kabul edilmiştir. Viskoelastik malzeme için Kelvin tipi sönüm modeli seçilmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda elastik-viskoelastik analogisi yardımıyla malzeme sabitleri Laplace uzayında kompleks karşılıkları ile değiştirilmektedir. Zaman uzayındaki gerçek çözümlere geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır. Bu amaçla düzlem gerilme/şekil değiştirme problemlerinin dinamik analizleri için sonlu elemanlar metoduna dayalı Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu çalışmada bulunan sonuçlar Newmark -adım adım integrasyon yöntemi- yardımıyla elde edilen çözümler ile de karşılaştırılmıştır. Newmark yönteminde zaman artım miktarları küçüldükçe hassasiyetin de o oranda arttığı, buna karşın Laplace uzayında yapılan çözümlerde ise, zaman artım miktarı ne seçilirse seçilsin, sonuçların değişmediği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sonlu elemanlar, Dinamik analiz, Viskoelastik malzeme modeli, Ters Laplace dönüşümleri.

Dynamic Analysis of Axisymmetric Problems Made Of Viscoelastic Material

Abstract

In this study, the dynamic behavior of axisymmetric problems is investigated theoretically in the Laplace domain. For the dynamic loading cases, the finite element formulation in the Laplace domain is presented using Galerkin approximation. The material of the problem is assumed to be homogeneous, isotropic, linear elastic or viscoelastic. In viscoelastic modeling, the Kelvin model is employed. In the viscoelastic material case, according to the correspondence principle, the material constants are replaced with their complex counterparts in the Laplace domain. The solutions obtained are transformed to the time domain using the modified Durbin's inverse Laplace transform method. For this purpose, a general-purpose finite element analysis computer program is coded in Fortran for dynamic analysis of the plane elasticity problems. Present program results are compared with the results obtained by Newmark method in the time domain. The results obtained in this study are found to be in good agreement with those available in the literature.

Key words: Finite Element method, Dynamic analysis, viscoelastic material model, Inverse Laplace Transforms.

* Yazışmaların yapılacağı yazar: Beytullah temel, Çukurova Üniversitesi, Müh. Mim. Fakültesi, İnşaat Müh. Bölümü, Adana. btemel@cu.edu.tr

1. GİRİŞ

Yanal basınca maruz istinat duvarı, tünel, iç basınca maruz silindirik boru, içinde silindirik boşluk bulunan levha veya düzlemsel yüklenmiş kirişler düzlemsel elastisite problemlerine örnek olarak verilebilir. Düzlemsel elastisite problemlerinin dinamik analizi ile ilgili pek çok çalışma bulunmaktadır. Horgan ve Chan (1) statik yükleme durumunda fonksiyonel olarak derecelenmiş elastik malzemeye sahip silindir veya disk problemleri için kesin çözümü göstermişlerdir. Buna benzer çalışmaları Jabbari ve ark. (2,3), Shao (4), Dai ve ark. (5), Jabbari ve ark. (6) iç basınca maruz fonksiyonel olarak derecelenmiş malzemeye (FDM) sahip, düzgün manyetik alan altındaki borular için gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışmalarda içinde delik bulunan fonksiyonel olarak derecelenmiş silindirlerin mekanik ve termal çözümleri elde edilmiştir. Loy ve ark. (7), Pradhan ve ark. (8) çelik, nikel ve zirkonun fonksiyonel olarak derecelendirilmesi ile oluşturulmuş silindirik kabukların dinamik davranışlarını Rayleigh-Ritz metodu kullanarak incelemişlerdir. Zhou ve ark. (9) içinde delik bulunan silindirlerin serbest titreşim analizlerini Chebyshev-Ritz metodu yardımıyla yapmışlardır. Han ve ark.(10) FDM silindirlerin zorlanmış titreşimini sayısal hibrit metodu kullanarak araştırmışlardır. Keleş ve Tütüncü (11) FDM silindir ve kürelerin analitik çözümlerini Laplace uzayında göstermişlerdir. Değişken yükleme veya geometri durumlarında analitik çözümlerin yapılamaması nedeniyle sonlu elemanlar gibi yaklaşık yöntemlere başvurulmaktadır. Bu yaklaşık yöntemler ile istenilen hassasiyette sonuçlar elde edebilmek için problem yeterli sayıda sonlu elemanlar ile modellenmektedir.

Düzlem gerilme veya düzlem şekil değiştirme problemlerinin zorlanmış titreşim analizleri ile ilgili çalışmaların çoğunda, basitliği nedeniyle malzemenin elastik olduğu kabulü yapılmaktadır. Gerçekte malzemeler, bünyesindeki iç sürtünmeden dolayı az veya çok viskoelastik özelliğe sahiptir. Gerçek malzeme davranışını yansıtmak için elastik bünye bağıntıları yerine

viskoelastik bünye bağıntılarını kullanmak daha gerçekçi olacaktır.

Bu çalışmada malzemenin homojen, elastik veya viskoelastik olduğu; cismin kütesinin ise, hacim içinde düzgün yayılı olduğu kabul edilecektir. Viskoelastik malzeme için Kelvin tipi malzeme modeli seçilmiştir. Viskoelastik malzeme durumunda, elastik-viskoelastik analogisi yardımıyla malzeme sabitleri Laplace uzayında kompleks karşılıkları ile değiştirilmektedir. Bu çalışmada sistemi idare eden hareket denklemi, sistematikliği ve her türlü geometriye uygulanabilmesi bakımından, sonlu elemanlar yöntemi ile Laplace uzayında Galerkin yaklaşımı kullanılarak elde edilecektir. Zaman uzayındaki gerçek çözümlere geçmek için Durbin'in modifiye edilmiş ters Laplace dönüşüm yöntemi kullanılmıştır (12–15). Bu amaçla düzlem gerilme veya düzlem şekil değiştirme problemlerinin dinamik analizleri için sonlu elemanlar metoduna dayalı Fortran dilinde genel amaçlı bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu çalışmada bulunan sonuçlar Newmark -adım adım integrasyon yöntemi- yardımıyla elde edilen çözümler ile de karşılaştırılmış ve bulunan sonuçların literatür ile uyumlu olduğu gösterilmiştir.

1. SONLU ELEMAN FORMÜLASYONU

Düzlemsel elastisite halinde olayı idare eden hareket denklemleri gerilmeler cinsinden,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + f_y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2)$$

şeklinde verilmektedir. Burada σ_x ve σ_y normal gerilmeleri, τ_{xy} ise, kayma gerilmesini göstermektedir. f_x , f_y , x ve y doğrultularında yayılı (hacim) kuvvetleri, ρ , kütleli yoğunluk ve u, v ise, sırasıyla, x ve y doğrultularında deplasmanlardır.

Sınır şartları da gerilmeler cinsinden,

$$t_x = \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y$$

$$t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y \quad (3)$$

olarak yazılmaktadır. Uzama oranı-deplasman ilişkisi aşağıda verilmiştir.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

Lineer elastik ve izotrop malzemeler için bünye denklemi,

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_{12} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad c_{33} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6a)$$

ve düzlem gerilme halinde ise,

$$c_{11} = c_{22} = \frac{E}{(1+\nu^2)}, \quad c_{12} = \frac{\nu E}{(1-\nu^2)}, \quad c_{33} = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (6b)$$

şeklinde verilmektedir. Burada, E , elastisite modülünü, ν , Poisson oranını ve G , kayma modülünü göstermektedir.

Formülasyon dönüşüm uzayında yapılacaktır. Zamana bağlı bir $f(t)$ fonksiyonun Laplace dönüşümü, $\bar{F}(s)$,

$$L[f(t)] = \bar{F}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (7)$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Burada s , kompleks Laplace parametresini göstermektedir. Viskoelastik malzeme için Kelvin malzeme modeli seçilmiştir. Bu model için elastisite modülü

$$h \int \int_{A_e} \psi_1 \left[\frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial y} + \bar{f}_x - \rho s^2 \bar{u} \right] dA = 0 \quad (9)$$

$$h \int \int_{A_e} \psi_2 \left[\frac{\partial \bar{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\sigma}_y}{\partial y} + \bar{f}_y - \rho s^2 \bar{v} \right] dA = 0 \quad (10)$$

Burada ψ_1, ψ_2 ağırlık fonksiyonları ve A_e eleman alanıdır. Kısmi integrasyonlar uygulandığında (9) ve (10) denklemleri sırasıyla,

$$h \int \int_{A_e} \left[\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \bar{\sigma}_x + \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \bar{\tau}_{xy} - \psi_1 \bar{f}_x + \psi_1 \rho s^2 \bar{u} \right] dA - h \int_{S_\sigma} \psi_1 (\bar{\sigma}_x n_x + \bar{\tau}_{xy} n_y) ds = 0 \quad (11)$$

$$h \int \int_{A_e} \left[\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \bar{\tau}_{xy} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} \bar{\sigma}_y - \psi_2 \bar{f}_y + \psi_2 \rho s^2 \bar{v} \right] dA - h \int_{S_\sigma} \psi_2 (\bar{\tau}_{xy} n_x + \bar{\sigma}_y n_y) ds = 0 \quad (12)$$

şeklini alırlar. Burada, S_σ , eleman sınırını göstermekte olup, n_x ve n_y ise doğrultman kosinüslerini temsil etmektedir. İkinci kısımlardaki parantezli ifadeler dönüşmüş uzayda sınır şartlarına karşılık gelmektedir.

$$\begin{aligned} \bar{t}_x &= \bar{\sigma}_x n_x + \bar{\tau}_{xy} n_y \\ \bar{t}_y &= \bar{\tau}_{xy} n_x + \bar{\sigma}_y n_y \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & c_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

olup, burada c_{ij} , malzeme sabitleri, düzlem şekil değiştirme halinde,

Laplace uzayında kompleks karşıtı ile yer değiştirmektedir (16).

$$E^* = E(1 + g s) \quad (8)$$

Burada, E^* viskoelastik elastisite sabitini ve g ise, viskoz sönüm oranını temsil etmektedir. (1) ve (2) hareket denklemlerinin sıfır başlangıç şartları altında Laplace dönüşümleri alınıp, h kalınlıklı bir eleman için ağırlıklı artıklar yöntemi uygulandığında, diferansiyel denklemler integral formda yazılabilmektedir.

Galerkin yöntemi için ağırlık fonksiyonları olarak dönüşmüş uzayda deplasmanların varyasyonları,

$$\psi_1 = \delta \bar{u}, \quad \psi_2 = \delta \bar{v} \quad (14)$$

seçilmektedir. Ağırlık fonksiyonları yerlerine yazıldıktan sonra (11) ve (12) eşitlikleri bir tek integral altında toplanırsa,

$$\begin{aligned}
 & h \int \int_{A^e} \left(\begin{Bmatrix} \delta \bar{\varepsilon}_x \\ \delta \bar{\varepsilon}_y \\ \delta \bar{\gamma}_{xy} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} + \rho s^2 \begin{Bmatrix} \delta \bar{u} \\ \delta \bar{v} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} \right) dA \\
 & - h \int \int_{A^e} \begin{Bmatrix} \delta \bar{u} \\ \delta \bar{v} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} dA - h \int_{S_\sigma} \begin{Bmatrix} \delta \bar{u} \\ \delta \bar{v} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} ds = 0
 \end{aligned} \tag{15}$$

matris formuna dönüşmektedir. Bu ifade Laplace uzayında virtüel iş denkleminde karşılık gelmektedir.

Bu çalışmada sonlu elemanlar formülasyonu için 8 düğümlü eleman modeli seçilmiştir. Elemanın herhangi bir noktasındaki deplasmanlar,

$$\begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_8 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{u}_8 \\ \bar{v}_8 \end{Bmatrix} = [N] \{\bar{d}\} \tag{16}$$

düğüm deplasmanlarına bağlı olarak ifade edilmektedir. Burada $[N]$ şekil fonksiyonları matrisi ve $\{\bar{d}\}$, dönüşmüş uzayda eleman düğüm deplasmanlarıdır. Buna göre uzama oranı-deplasman ilişkisi,

$$\bar{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_{,x} \\ \bar{v}_{,y} \\ \bar{u}_{,y} + \bar{v}_{,x} \end{Bmatrix} = [B] \{\bar{d}\} \tag{17}$$

ve gerilme deplasman ilişkisi ise,

$$\{\bar{\sigma}\} = [C] [B] \{\bar{d}\} \tag{18}$$

şeklinde yazılır. Burada düzlem gerilme veya düzlem şekil değiştirme halinde bir i düğümüne ait $[B_i]$ şekil değiştirme matrisi,

$$[B_i] = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \tag{19}$$

şeklinde yazılmaktadır. Deplasman ve uzama oranlarının varyasyonları ise,

$$\begin{Bmatrix} \delta \bar{u} \\ \delta \bar{v} \end{Bmatrix} = [N] \{\delta \bar{d}\}, \quad \{\delta \bar{\varepsilon}\} = [B] \{\delta \bar{d}\} \tag{20}$$

olur. (16), (18) ve (20) eşitlikleri, (15) denkleminde yerlerine yazıldığında,

$$\begin{aligned}
 & \{\delta \bar{d}\}^T h \int \int_{A^e} ([B]^T [C] [B] + \rho s^2 [N]^T [N]) dA \{\bar{d}\} \\
 & - \{\delta \bar{d}\}^T h \int \int_{A^e} [N]^T \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} dA - \{\delta \bar{d}\}^T h \int_{S_\sigma} [N]^T \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} ds = 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

şeklini almaktadır. Buradan

$$\begin{aligned}
 [k^e] &= h \int \int_{A^e} [B]^T [C] [B] dA, & [m^e] &= \rho h \int \int_{A^e} [N]^T [N] dA \\
 \{f^e\} &= h \int \int_{A^e} [N]^T \begin{Bmatrix} \bar{f}_x \\ \bar{f}_y \end{Bmatrix} dA, & \{t^e\} &= h \int_{S_\sigma} [N]^T \begin{Bmatrix} \bar{t}_x \\ \bar{t}_y \end{Bmatrix} ds
 \end{aligned} \tag{22}$$

tarifleri yapıldığında, dönüşmüş uzayda eleman hareket denklemi,

$$s^2 [m^e] \{\bar{d}\} + (1 + gs) [k^e] \{\bar{d}\} = \{F^e\} \tag{23}$$

olarak elde edilmektedir. Burada $[k^e]$, eleman rijitlik matrisi, $[m^e]$, eleman kütle matrisi ve $\{F^e\} = \{f^e\} + \{t^e\}$ ise eleman yük vektörü olarak adlandırılmaktadır.

2. HAREKET DENKLEMLERİ

Viskoelastik bir ortamda sonlu elemanların rijitlik ve kütle matrisleri uygun bir şekilde birleştirildiğinde sistem hareket denklemi, sıfır başlangıç şartları altında, Laplace dönüşüm uzayında,

$$s^2[M]\{\bar{U}\} + (1 + gs)[K]\{\bar{U}\} = \{\bar{F}\} \quad (24)$$

şeklinde yazılmaktadır. Burada $[K]$ ve $[M]$ sırasıyla, sistem rijitlik ve kütle matrisleridir. $\{\bar{U}\}$ ve $\{\bar{F}\}$ sırasıyla, düğüm deplasmanları ve sistem yük vektörlerinin Laplace dönüşümleridir. (24) denklemi düzenlenirse, hareket denklemi Laplace uzayında cebrik denklem takımı haline dönüşmektedir.

$$[\bar{D}]\{\bar{U}\} = \{\bar{F}\} \quad (25)$$

Burada $[\bar{D}]$ dönüşmüş uzayda dinamik rijitlik matrisidir.

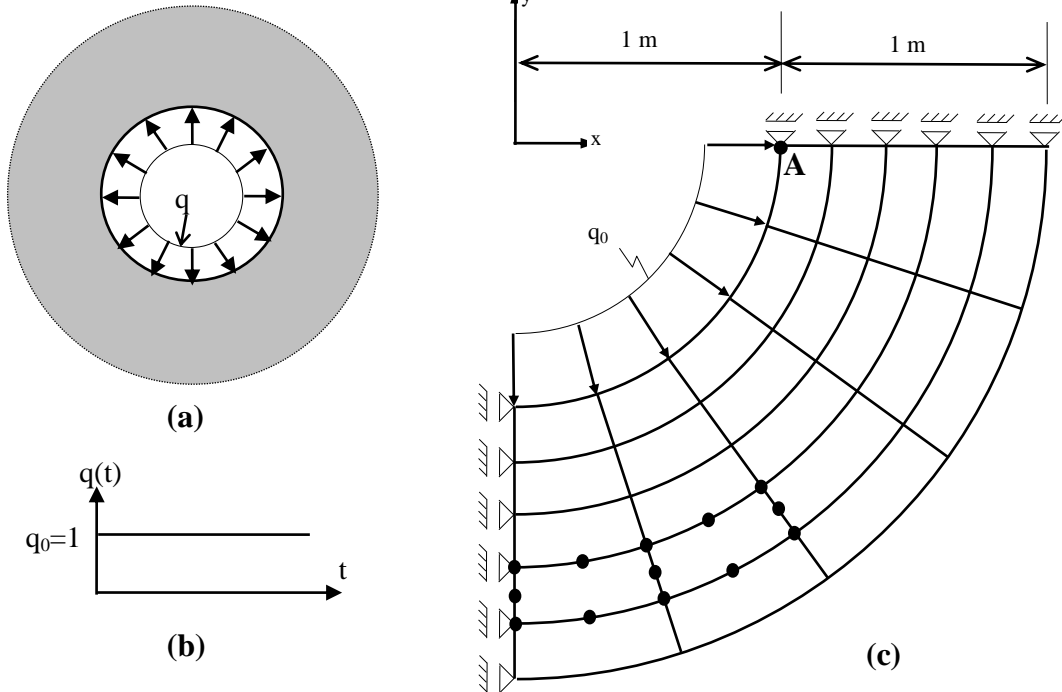
$$[\bar{D}] = (1 + gs)[K] + s^2[M] \quad (26)$$

(25) denkleminin çözümü, Laplace dönüşüm uzayında çeşitli s parametreleri için sayısal olarak

bulunmaktadır. Bu değerlerden zaman uzayına geçiş için Durbin'in modifiye edilmiş sayısal ters Laplace dönüşümü (13) uygulanmaktadır.

3. SAYISAL UYGULAMA

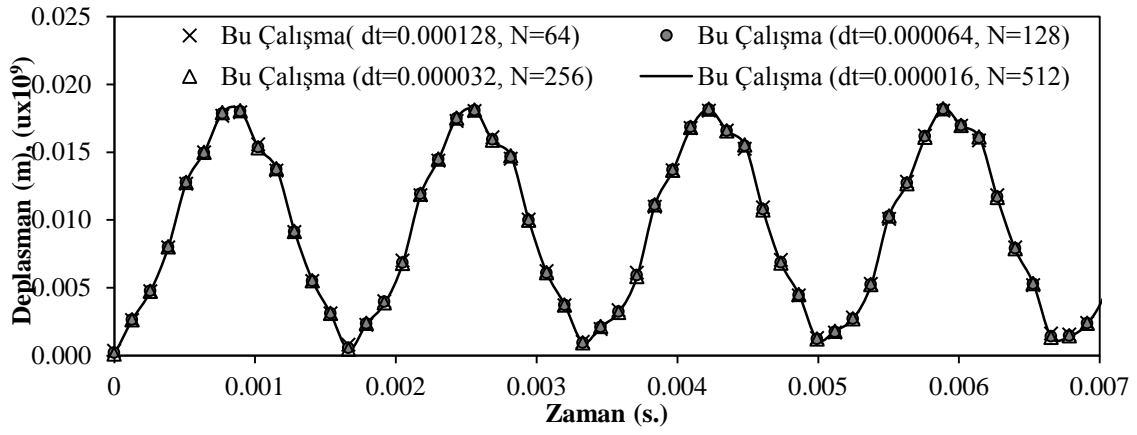
Bu çalışmada, zamana bağlı yükler altında düzlemsel elastisite problemlerinin Laplace uzayında sonlu elemanlar yöntemiyle dinamik analizini yapan Fortran dilinde bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Eksenel simetrik geometriye sahip bir problemin deplasman ve gerilme değerleri sonlu eleman yöntemiyle hem Laplace uzayında, hem de zaman uzayında farklı zaman artımlarına göre hesaplanmıştır. Zaman uzayında yapılan hesaplamalar için ANSYS paket programı(17) kullanılmıştır. Uygulama olarak üniform iç basınca maruz izotropik malzemeli bir boru ele alınmıştır. Malzeme özellikleri; $E=200 \times 10^9$ N/m², $\nu=0.3$, $\rho=7850$ kg/m³ olup, borunun iç yarı çapı 1 m, dış yarıçapı 2 m alınmıştır. Boru kesiti, uygulanan yük ve sonlu elemanlar ağı Şekil 1'de gösterilmiştir.



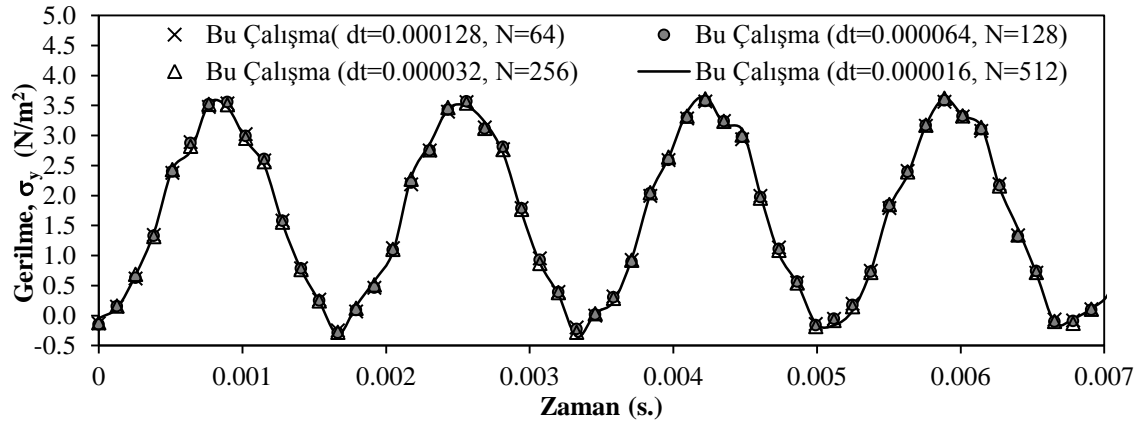
Şekil 1.(a) İç basınca maruz boru kesiti, (b) Dinamik yük, (c) Çeyrek kesitin sonlu eleman ağı

Boru içindeki dinamik iç basınç adım tipi bir fonksiyon olup, 1 N/m^2 büyüklüğündedir. Ele alınan örnekte simetri sınır şartlarından yararlanılarak boru kesitinin $1/4$ 'ü için 25 eleman alınarak çözümler yapılmıştır. A noktasındaki deplasman ve gerilme değerleri, hem bu çalışmada yazılan program ile Laplace uzayında, hem de ANSYS programı kullanılarak Newmark yöntemi ile zaman uzayında elde edilmiştir.

Problem ilk olarak düzlem şekil değiştirme durumu için çözülmüştür. Farklı zaman artım miktarları için Laplace uzayında elde edilen deplasman ve gerilme değerleri ilk dört periyodu kapsayacak şekilde hesaplanmıştır. Şekil 2 ve 3 incelendiğinde, değişik zaman artımları için Laplace uzayında elde edilen değerlerin üst üste düştüğü görülmektedir.



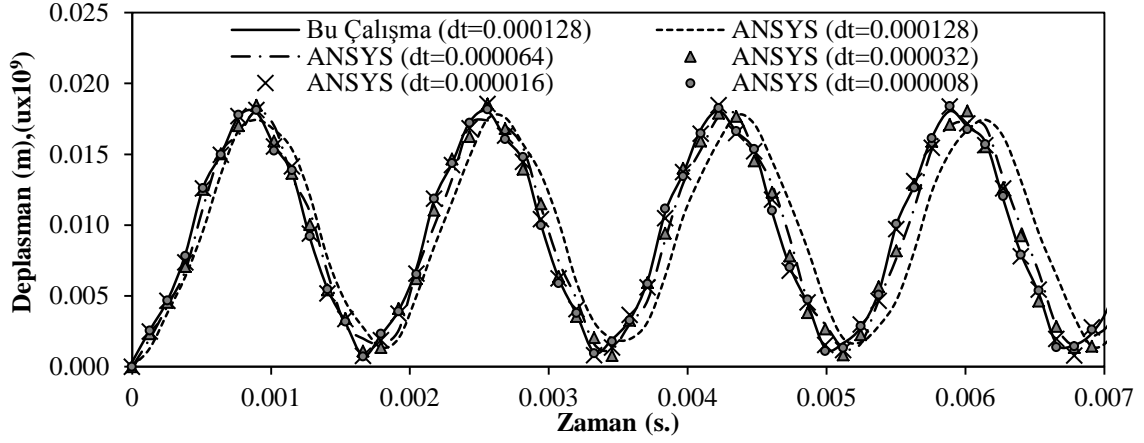
Şekil 2. A noktasındaki u deplasmanının zamanla değişimi



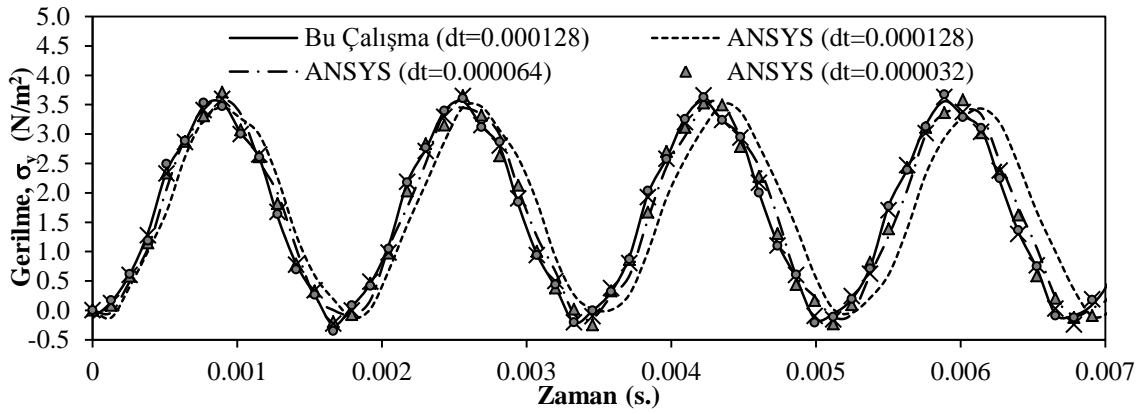
Şekil 3. A noktasındaki σ_y gerilmesinin zamanla değişimi

Bu çalışmada bulunan sonuçların doğruluğunu test etmek için problem, sonlu elemanlar modeli ve Newmark yöntemi ile zaman uzayında ANSYS yardımıyla çözülmüştür. Elde edilen deplasman ve moment değerleri Laplace uzayında bulunan

sonuçlarla karşılaştırılmış ve Şekil 4 ve 5'te grafik formda verilmiştir. Grafikler incelendiğinde, farklı zaman artım miktarları ile zaman uzayında bulunan çözümler arasında dikkate değer farklar görülmektedir.



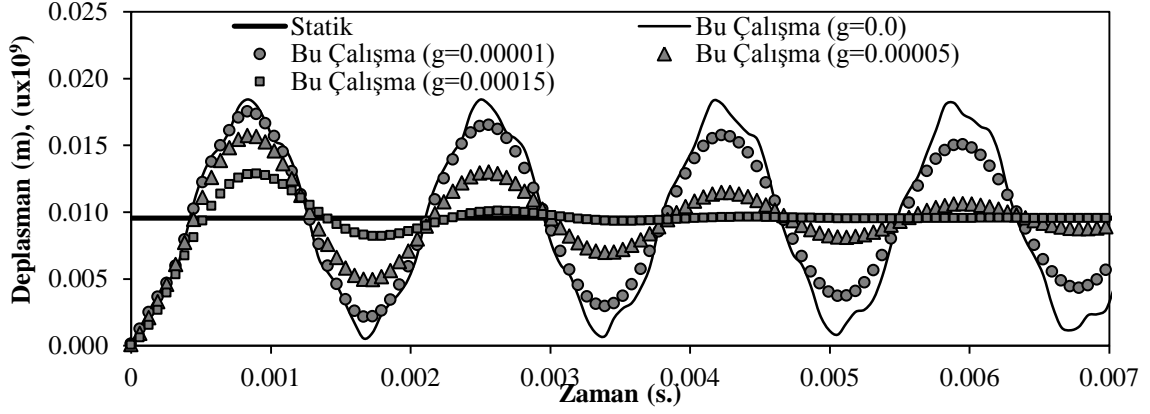
Şekil 4. A noktasındaki u deplasmanının zamanla değişimi



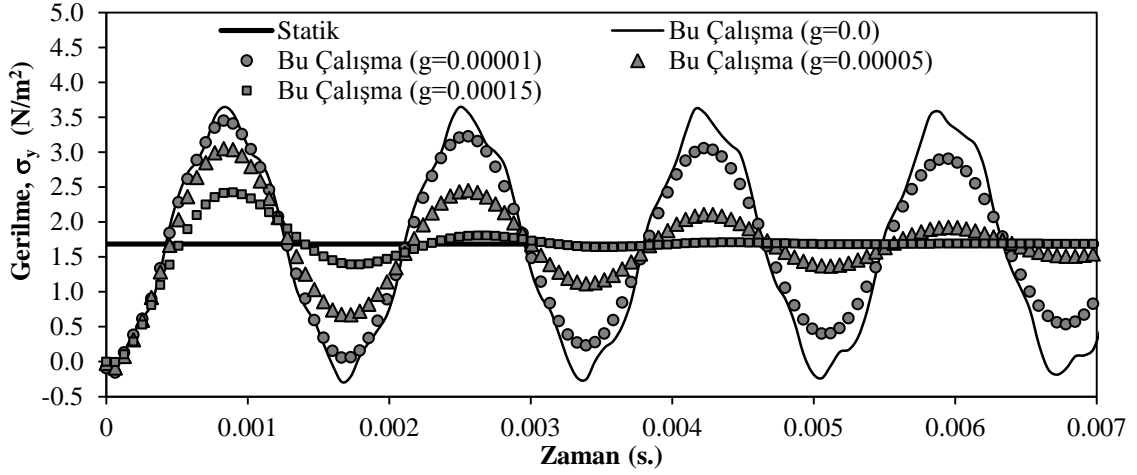
Şekil 5. A noktasındaki σ_y gerilmesinin zamanla değişimi

Viskoelastik malzeme için Laplace uzayında elde edilen deplasman ve gerilme değerleri de Şekil 6 ve 7'de gösterilmiştir. Çeşitli sönüm oranları için

elde edilen deplasman ve moment değerleri küçülerek statik değere yaklaşmaktadır.



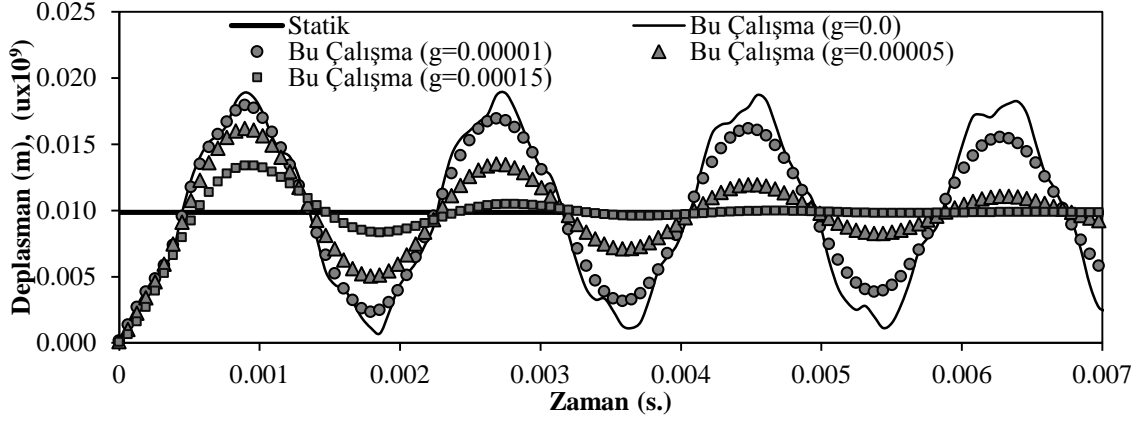
Şekil 6. A noktasındaki u deplasmanının zamanla değişimi



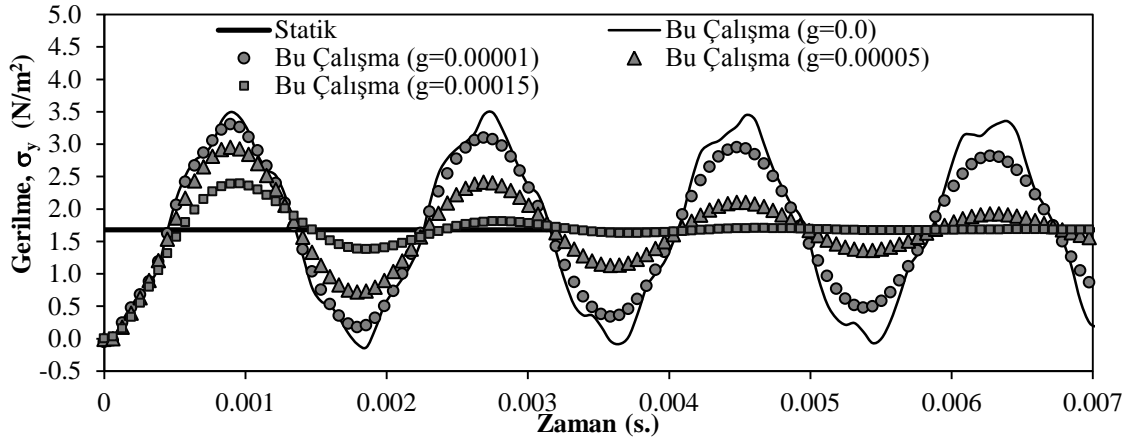
Şekil 7. A noktasındaki σ_y gerilmesinin zamanla değişimi

Problem, düzlem gerilme durumu için ayrıca çözülmüştür. Elastik ve viskoelastik malzemeler için Laplace uzayında elde edilen deplasman ve gerilmeler Şekil 8 ve 9'da verilmektedir. Çeşitli sönüm oranları için deplasman ve moment

değerleri, düzlem şekil değiştirme halinde olduğu gibi, sönümleyerek statik değere yaklaşmaktadır.



Şekil 8. A noktasındaki u deplasmanının zamanla değişimi



Şekil 9. A noktasındaki σ_y gerilmesinin zamanla değişimi

4. SONUÇLAR

Dönel simetrik geometriye sahip düzlem gerilme veya düzlem şekil değiştirme problemlerinin zorlanmış titreşimi, hem Laplace hem de zaman uzayında incelenmiştir. Sonlu elemanlar ve Newmark yöntemi kullanılarak bulunan sonuçların doğruluğu, göz önüne alınan zaman artım miktarlarına bağlıdır. Geleneksel adım adım integrasyon yöntemlerinde zaman artımları küçüldükçe hassasiyet de o oranda artacağından, bu artım miktarlarının doğru seçilmesi önem taşımaktadır. Sonlu elemanlar yöntemi ile Laplace uzayında farklı zaman artım miktarları için elde

edilen deplasman ve gerilme değerleri birbiri ile neredeyse çakışmaktadır. Dolayısıyla, bu çalışmada bulunan çözümlerin diğer klasik adım adım integrasyon yöntemlerine göre çok daha iyi olduğu görülmüştür.

5. KAYNAKLAR

1. Horgan, C. O., Chan, A. M., "The pressurized hollow cylinder or disk problem for functionally graded isotropic linearly elastic materials," J. Elasticity, 55, (1999) 43–59.
2. Jabbari, M., Sohrabpour, S., Eslami, M. R., "Mechanical and Thermal Stresses in a

- Functionally Graded Hollow Cylinder due to Radially Symmetric Loads,” *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 79 (2002) 493–497.
3. Jabbari, M., Sohrabpour, S., Eslami, M. R., “General Solution for Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Hollow Cylinder due to Nonaxisymmetric Steady-State Loads,” *ASME J. Appl. Mech.*, 70 (2003) 111–118.
 4. Shao, Z. S., “Mechanical and Thermal Stresses of a Functionally Graded Circular Hollow Cylinder with Finite Length,” *Int. J. Pressure Vessels Piping*, 82 (2005) 155–163.
 5. Dai, H. L., Fu, Y. M., Dong, Z. M., “Exact Solutions for Functionally Graded Pressure Vessels in a Uniform Magnetic Field,” *Int. J. Solids Struct.*, 41(2006) 5570–5580.
 6. Jabbari, M., Bahtui, A., Eslami, M. R., “Axisymmetric Mechanical and Thermal Stresses in Thick Long FGM Cylinders,” *J. Therm. Stresses*, 29 (2006) 643–663.
 7. Loy, C. T., Lam, K. Y., Reddy, J. N., “Vibration of Functionally Graded Cylindrical Shells,” *Int. J. Mech. Sci.*, 41 (1999) 309–324.
 8. Pradhan, S. C., Loy, C. T., Lam, K. Y., Reddy, J. N., “Vibration Characteristics of Functionally Graded Cylindrical Shells Under Various Boundary Vonditions,” *Appl. Acoust.*, 61 (2000) 111–129.
 9. Zhou, D., Cheung, Y. K., Lo, S. H., Au, F. T. K., “3D Vibration Analysis of Solid and Hollow Cylinders via Chebyshev-Ritz Method,” *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 192 (2003) 1575–1589.
 10. Han, X., Liu, G. R., Xi, Z. C., Lam, K. Y., “Transient Waves in a Functionally Graded Cylinder,” *Int. J. Solids Struct.*, 38 (2001) 3021–3037.
 11. Keleş, I., Tütüncü, N., “Exact analysis of axisymmetric dynamic response of functionally graded cylinders (or disks) and spheres” *J. Appl.Mech.*, 78 (2011) 1-5.
 12. Narayanan, G.V., “Numerical operational methods in structural dynamics” Ph.D. thesis, University of Minnesota, Minneapolis, 1979.
 13. Durbin,F., “Numerical inversion of Laplace transforms: An Efficient improvement to Dubner and Abate’s method” *Comput. J.* 17 (1974) 371–376.
 14. Temel, B., “Transient analysis of viscoelastic helical rods subject to time-dependent loads” *Int. J. Solids Struct.* 41 (2003) 1605–1624.
 15. Pekel, H., Keleş, I., Temel, B., Tütüncü, N., “Transient response of FGM pressure vessels, In: Springer proceedings in Physics 139. Vibration problems ICOVP”, 315–320, 2011.
 16. (16). Boley, B. A., Weiner, J. H., “Theory of Thermal Stresses”, John Wiley & Sons, New York, 1960.
 17. ANSYS Swanson Analysis System, Inc., 201 Johnson Road, Houston, PA15342-1300.
 18. Kara, A., “Düzlemsel elasisite problemlerinin sonlu elemanlar yöntemi ile dinamik analizi” Yüksek Lisans Tezi, Çukurova Üniversitesi, Adana, 2004