D.E.Ü.İ.İ.B.F.Dergisi
Cilt:15, Sayı:2, Yıl:2000, ss:115-126

FOURIER DÖNÜŞÜMÜ VE KARAKTERİSTİK FONKSİYON

Samim DÜNDAR(*)

ÖZET

İstatistikte önemli bir yer tutan moment çıkaran fonksiyonların bulunamaması durumunda , karakteristik fonksiyonlara gerek duyulur. Karakteristik fonksiyonlar ile dağılış fonksiyonları arasında önemli ilişkiler bulunmaktadır. Uygulamalı Matematiğin bir çok alanında kullanılan Fourier dönüşümleri ile karakteristik fonksiyonlar arasında büyük benzerlikler bulunmaktadır. Moment çıkaran fonksiyonu bulunamayan bir dağılış fonksiyonunun karakteristik fonksiyonunun bulunması , bu dağılış fonksiyonunun bir sabit farkıyla ters Fourier dönüşümünü bulmak işlemidir.

Anahtar Kelimeler: Fourier Dönüşümü, Karakteristik Fonksiyon, Lojistik Dağılış.

1.Giriş

Sürekli veya kesikli bir dağılımın momentlerinin elde edilmesine yarayan fonksiyona moment çıkaran fonksiyon denir. Momentlerin hesaplanabilmesi için ya frekans dağılımının , ya da olasılık yoğunluk fonksiyonunun bilinmesi gerekir. Momentlerin kolaylıkla bulunmasını sağlayan bir başka seçenek de moment çıkaran fonksiyonlardan yararlanmaktır. Moment çıkaran fonksiyonu , olasılık yoğunluk fonksiyonu yardımıyla bulunur. Bir *x* rasgele değişkeninin orijine ve aritmetik ortalamaya göre moment çıkaran fonksiyonları bulunabilir.

Rasgele *x* değişkeninin orijine göre moment çıkaran fonksiyonu ; *f(x)* olasılık fonksiyonu olmak üzere ; $t \in (-h, h)$ için e^{tx} 'in beklenen değeridir. Yani x 'in kesikli olması durumunda $\sum_x e^{tx} f(x)$ toplamının , x ' in sürekli olması durumunda da $\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx$ integralinin hesaplanması gerekir. Bazı frekans fonksiyonlarında yukarıdaki toplam hesaplanamaz veya yukarıdaki integral yakınsak olmayabilir. Bu gibi hallerde moment çıkaran fonksiyonu bulunamaz. Bu durumda momentlerin bulunması karakteristik fonksiyon ile mümkün olur. Gerçekten her dağılımın moment çıkaran fonksiyonu yoktur. Bu

---

(*) Yrd.Doç.Dr.D.E.Ü.,İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü, İZMİR

durumda söz konusu rasgele değişkenin dağılımının şeklini ortaya koymak için karakteristik fonksiyona gerek duyulur. Her dağılışın karakteristik fonksiyonu mutlaka vardır. Karakteristik fonksiyon ile olasılık yoğunluk fonksiyonu arasında önemli ilişkiler var olup , bunlardan biri bilindiğinde diğeri de bulunabilir (Saraçoğlu ve Çevik , 1995 :355).

Karakteristik fonksiyon istatistik teorisinde önemli ve yararlı özelliklere sahiptir. Teoriyi açıklayabilmek ve geçişleri kavrayabilmek için ileri matematikten yararlanmak zorunludur. Bu amaçla, çalışmanın ikinci bölümünde integral dönüşümlerine , özellikle de Fourier dönüşümlerine yer verilmiştir. Çünkü karakteristik fonksiyonlar , Fourier dönüşümlerinin genel teorisinin özel bir durumudur (Stuart ve Ord , 1987 :119-154).

Çalışmanın üçüncü bölümünde de karakteristik fonksiyon teorisinin temel teoremi olan "Inversion Teoreminin" ispatı yapılmış ve teoremin ifadesinin türevi alınarak dağılış fonksiyonu ile karakteristik fonksiyon arasındaki ilgi gösterilmiştir.

2. İntegral Dönüşümleri

(*a , b*) *x*-ekseninde sınırlı yada sınırsız bir aralığı göstersin. Bu aralıktaki *x* değerleri için tanımlı olan *f(x)* fonksiyonunun integral dönüşümü ;

$$T\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_a^b f(x)\, K(x,\alpha)\, dx \tag{1}$$

bağıntısı ile tanımlıdır (Churchill,1972 :317-347). Burada x 'in ve α 'nın fonksiyonu olan $K(x,\alpha)$ fonksiyonuna dönüşümün çekirdeği , $F(\alpha)$ fonksiyonuna da *f(x)* 'nun $K(x,\alpha)$ çekirdeği altında dönüşümü denir. (1) 'deki integralin varlığı kabul edilir. Uygulamalı matematik ,matematiksel istatistik ve mühendisliğin çeşitli alanlarında kullanılan integral dönüşümleri ; $K(x,\alpha)$ çekirdeğinin farklı şekillerde seçilmesi ile değişik isimlerle ifade edilir. Başlıca kullanılan integral dönüşümleri Fourier , Laplace , Henkel ,... vb dır. Ayrıca Legendre ve Jakobi polinomlarını çekirdek kabul eden başka dönüşümler de vardır (Churchill , 1972 : 1-24 , 348-378 , 420-437).

2.1 Fourier Dönüşümü

Her sonlu $(-L, L)$ aralığında Drichlet koşullarını sağlayan (Spiegel , 1974 : 20-25) ve $(-\infty, \infty)$ aralığında mutlak yakınsak olan *f(x)* fonksiyonunun ;

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\, e^{i\frac{n\pi x}{L}} \tag{2}$$

ile tanımlanan kompleks Fourier serisini ele alalım (Spiegel , 1974 : 24). Burada c_n katsayıları ;

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{L}^{-L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\, dx \tag{3}$$

ile tanımlı olup , c_n 'ni (2) 'de yerine koyarsak.

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-i\frac{n\pi x}{L}}\, dx \right] e^{i\frac{n\pi x}{L}}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(u)\, e^{-i\frac{n\pi u}{L}}\, du \right] e^{i\frac{n\pi x}{L}} \cdot \frac{\pi}{L} \tag{4}$$

şeklinde yazılıp bu toplamın $L \to \infty$ için limitini araştıralım. $\frac{\pi}{L} = \alpha$ ile gösterilirse $L \to \infty$ için $\alpha \to 0$ olur ve ardışık iki periyot arasındaki fark ; $\frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L}$ olup , (4) 'de $\frac{\pi}{L}$ yerine $\Delta\alpha$ yazılırsa ;

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} f(u)\, e^{-in\Delta\alpha u}\, du \right] e^{in\Delta\alpha\, x}\, \Delta\alpha \tag{5}$$

$L \to \infty$, $\Delta\alpha \to 0$ için limite geçildiğinde (5) 'den belirli integralin tanımına göre ;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\, e^{-i\alpha u}\, du \right] e^{i\alpha x}\, d\alpha \tag{6}$$

bulunur.

Yukarıda *f(x)* ile yapılan işlemlerin geçerli olması ; *f(x)* fonksiyonunun Drichlet koşullarını sağlaması ile mümkündür.

2.2 Drichlet Koşulları

a) *f(x)* , $(-\infty\,,\,\infty)$ aralığında tek değerli ve parçalı sürekli olmalıdır. (yani sonlu sayıda süreksizlik noktaları olabilir)

b)Bir x_o süreksizlik noktasındaki değeri ;

$$f(x_o)=\frac{1}{2}\left[f(x_o+0)+f(x_o-0)\right]$$

ortalamasına eşittir.

c) $f(x)$, $(-\infty\,,\infty)$ aralığında mutlak yakınsak , yani ;

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\;dx < \infty$$

olmalıdır.

Bu koşullar altında (6) eşitliğine *f(x)* fonksiyonunun Fourier integrali denir. (6) eşitliğinden ;

$$F(\alpha)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{-i\alpha x}\;dx \tag{7}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\alpha)\,e^{i\alpha x}\;d\alpha \tag{8}$$

tanımlamaları yapılarak yazılan (7) eşitliğine *f(x)* fonksiyonunun Fourier dönüşümü denir. (8) ile verilen eşitlik ise ters Fourier dönüşümüdür. Yani $F(\alpha)$ 'nın bilinmesi durumunda *f(x)* 'in bulunması için kullanılır. Eğer $f(x)$ (2.2) 'de verilen Drichlet koşullarından (c) 'yi sağlıyorsa (7) 'deki integral yakınsak , yani ;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\;e^{-i\alpha x}\right|\,dx < \infty$$

olur. Gerçekten $\left|e^{-i\alpha x}\right|=1$ olduğundan ;

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\,e^{-i\alpha x}\right|\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\;dx < \infty$$

dır. *f(x)* mutlak yakınsak olduğuna göre (7) 'deki integral yakınsaktır. Yani *f(x)* 'in Fourier dönüşümü vardır. Yeter olan bu koşul gerek değildir. Nedeni , yeter koşulu sağlamayan bazı fonksiyonlarında Fourier dönüşümleri bulunabilmektedir.

Ters dönüşümün varlığı , yani (8) 'deki integralin yakınsak olması ve yakınsaklık halinde gerçekten *f(x)* 'i vermesi için *f(x)* 'in sürekli olması yeterlidir (Churchill , 1972 : 385-400).

2.3 Uygulama

$$f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \langle\, a \\ 0 & |x| \rangle\, a \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyonun Fourier dönüşümünü bulmak istersek.

$$F\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\alpha x}\, dx$$

$$F(\alpha) = \int_{-a}^{a} e^{-i\alpha x}\, dx = \frac{2\sin a\alpha}{\alpha} \tag{9}$$

olur. (9) 'da bulunan dönüşümün , ters dönüşümünü aldığımızda ;

$$F^{-1}\left\{\frac{2\sin a\alpha}{\alpha}\right\} = f(x)$$

olmalıdır. Yani (8) 'den ;

$$F^{-1}\left\{\frac{2\sin a\alpha}{\alpha}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin a\alpha}{\alpha}\, e^{i\alpha x}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha}{\alpha}\left(\cos\alpha x + i\,\sin\alpha x\right) d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha \,.\, \cos \alpha x}{\alpha}\, d\alpha + \frac{i}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha \,.\, \sin \alpha x}{\alpha}\, d\alpha \qquad (10)$$

bulunur. (10) 'daki ikinci integral , integrandın tek olması nedeniyle sıfıra eşittir. Böylece ;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha \,.\, \cos \alpha x}{\alpha}\, d\alpha = \begin{cases} 1 & |x| \langle\, a \\ 0 & |x| \rangle\, a \end{cases} \qquad (11)$$

bulunur. Eğer $x = 0$ ve $a \rangle\, 0$ ise (11) 'den ;

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a\alpha}{\alpha}\, d\alpha = 1 \qquad (12)$$

dır.

3. Karakteristik Fonksiyon

$F(x)$ sürekli ve $dF = f(x)\, dx$ olmak üzere , karakteristik fonksiyon ;

$$\phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, dF \qquad (13)$$

ile tanımlıdır (Saraçoğlu ve Çevik , 1995 : 355-366).

$\phi(\alpha)$ fonksiyonu ;

$$|\phi(\alpha)| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, dF \right| \le \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{i\alpha x} \right| dF = \int_{-\infty}^{\infty} dF = 1$$

olduğundan (13) 'deki integral yakınsaktır , yani $\phi(\alpha)$ mevcuttur.

3.1 Inversion Teoremi

f(x) dağılış fonksiyonu , $dF = f(x)dx$, *F(x)* sürekli ve $\phi(\alpha)$, *f(x)* fonksiyonunun karakteristik fonksiyonu ise ;

$$F(x) - F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\, \phi(\alpha)\, d\alpha \qquad (14)$$

dır Stuart ve Ord , 1987 :119-121).

İspat : (14) 'de ikinci taraftaki integralde $\phi(\alpha)$ yerine (13) 'deki eşiti yazılırsa ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\,\phi(\alpha)\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha u}\,f(u)\,du\right\}d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha u}-e^{i\alpha(u-x)}}{i\alpha}\,f(u)\;du\,d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha u}}{i\alpha}\,d\alpha \;-\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(u-x)}}{i\alpha}\,d\alpha\right]dF \tag{15}$$

olup , (15) eşitliğindeki köşeli parantezin içindeki ilk integral , Euler formülü yardımıyla ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha u}}{i\alpha}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} -i\,\frac{e^{i\alpha u}}{\alpha}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} -i\,\frac{(\cos\alpha u + i\,\sin\alpha u)}{\alpha}\,d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-i\,\cos\alpha u}{\alpha}\,d\alpha \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha u}{\alpha}\,d\alpha \tag{16}$$

olup , (16) 'deki ilk integralde , integrand tek fonksiyon olduğundan sıfıra eşittir. Bu durumda ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha u}}{\alpha}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha u}{\alpha}\,d\alpha \tag{17}$$

olup , (15) 'daki köşeli parantezin içindeki ikinci integral de , yine Euler formülü yardımıyla ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(u-x)}}{i\alpha}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} -i\,\frac{e^{i\varepsilon(u-x)}}{\alpha}\,d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} -i\,\frac{\{\cos\alpha(u-x) + i\,\sin\alpha(u-x)\}}{\alpha}\,d\alpha$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -i\,\frac{\cos\alpha(u-x)}{\alpha}\,d\alpha \;+\; \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha(u-x)}{\alpha}\,d\alpha \tag{18}$$

olur. (18) 'daki ilk integral yine integrandın tek olması nedeniyle sıfıra eşittir.

Bu yüzden ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\alpha(u-x)}}{\alpha}\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\alpha(u-x)}{\alpha}\, d\alpha \tag{19}$$

bulunur. Elde edilen (17) ve (19) eşitlikleri kullanıldığında , (14) eşitliği ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\,\phi(\alpha)\, d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha u}{\alpha}\, d\alpha \;-\; \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin\alpha(u-x)}{\alpha}\, d\alpha\right] dF \tag{20}$$

olarak yazılıp , ikinci bölümdeki (12) sonucu kullanılırsa (20) eşitliği;

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\,\phi(\alpha)\, d\alpha &= \left(\int_{-\infty}^{0} -\pi \;\; dF + \int_{0}^{\infty}\pi \;\; dF\right) - \left(\int_{-\infty}^{x} -\pi \; dF + \int_{x}^{\infty}\pi \; dF\right)\\ &= \pi\left[\left(-2F(0)+1\right)-\left(-2F(x)+1\right)\right]\\ &= 2\pi\left[F(x)-F(0)\right]\end{aligned}$$

olur.

Şimdi , ispatını yaptığımız (14) eşitliğinin her iki tarafının x 'e göre türevi alınırsa ;

$$\frac{dF}{dx} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1-e^{-i\alpha x}}{i\alpha}\,\phi(\alpha)\right] d\alpha \tag{21}$$

(Churchill ,1972 :202-203) ve $dF/dx = f(x)$ olduğundan , (21) eşitliğinden ;

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x}\,\phi(\alpha)\, d\alpha \tag{22}$$

buluruz. İkinci bölümde (7) ile verilen bağıntıya göre (22) 'den çıkan sonuç *f(x)* fonksiyonunun , $\phi(\alpha)$ 'nın Fourier dönüşümü olduğunu gösterir.

3.2 Örnek

$$\phi(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{\sinh \pi\alpha}$$

fonksiyonunu ele alalım.

$$\sinh t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}$$

tanımından yararlanarak ;

$$\phi(\alpha) = \frac{2\pi\alpha}{e^{\pi\alpha} - e^{-\pi\alpha}} = 2\pi\alpha \; \frac{e^{-\pi\alpha}}{1 - e^{-2\pi\alpha}} \tag{23}$$

dır.

$e^{-\pi i} = -1$, $e^{-2\pi i} = 1$ ve $i^2 = -1$ olduğu kullanılırsa , (23) 'deki eşitlik ;

$$\phi(\alpha) = 2\pi\alpha \; \frac{e^{-\pi\alpha} \; (-1) \, . \, i^2}{1 - e^{-2\pi\alpha} \; .(1)} = 2\pi\alpha \; \frac{e^{-\pi\alpha} \; e^{-\pi i} \; i \, . \, i}{1 - e^{-2\pi\alpha} \; e^{-2\pi i}}$$

$$= i\alpha \;\; 2\pi i \; \frac{e^{-\pi\alpha - \pi i}}{1 - e^{-2\pi\alpha - 2\pi i}} = i\alpha \; 2\pi i \; \frac{e^{(i\alpha - 1)\pi i}}{1 - e^{(i\alpha - 1)2\pi i}} \tag{24}$$

olur.

$$2\pi i \frac{e^{(p-1)\pi i}}{1 - e^{(p-1)2\pi i}} = \Gamma(p)\Gamma(1-p) \qquad \text{(Stuart ve Ord , 1987 : 100)}$$

ve

$$\Gamma(p+1) = p \, \Gamma(p)$$

olduğundan , (24) eşitliği ;

$$\phi(\alpha) = i\alpha \; \Gamma(i\alpha) \; \Gamma(1 - i\alpha) \tag{25}$$

şeklinde yazılır. Diğer taraftan ;

$$\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \beta(p,q)$$

olduğundan , (25) eşitliğinden ;

$$\phi(\alpha) = \Gamma(1 + i\alpha) \; \Gamma(1 - i\alpha)$$

$$= \frac{\Gamma(1 + i\alpha) \; \Gamma(1 - i\alpha)}{\Gamma(1 + i\alpha + 1 - i\alpha)}$$

$$= \beta(1 + i\alpha \; , 1 - i\alpha) \tag{26}$$

yazılır. Beta fonksiyonunun tanımı ;

$$\beta(p,q) = \int_0^1 y^{p-1}\ (1-y)^{q-1}\ dy$$

olup , buna göre (26) eşitliğinden ;

$$\phi(\alpha) = \int_0^1 y^{i\alpha}\ (1-y)^{-i\alpha}\ dy \tag{27}$$

yazılır. (27) 'deki integralde $y = \dfrac{1}{u+1}$, $dy = \dfrac{-1}{(u+1)^2}\,du$ değişken dönüşümü yapılırsa ;

$$\phi(\alpha) = \int_\infty^0 (u+1)^{-i\alpha} \left(\frac{u}{u+1}\right)^{-i\alpha} \frac{-1}{(u+1)^2}\,du$$

$$= \int_\infty^0 u^{-i\alpha}\ \frac{-1}{(u+1)^2}\,du \tag{28}$$

bulunur. (28) 'daki integralde de $u = e^{-x}$, $du = -e^{-x}\,dx$ değişken dönüşümü yapılırsa ;

$$\phi(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\ \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\,dx \tag{29}$$

bulunur. Elde edilen (29) eşitliğindeki integral , (13) ile verilen karakteristik fonksiyonun tanımı ile karşılaştırıldığında ,

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2} \tag{30}$$

fonksiyonunun , karakteristik fonksiyonunun ;

$$\phi(\alpha) = \frac{\pi\alpha}{\sinh \pi\alpha}$$

olduğunu gösterir. (30) 'deki *f(x)* fonksiyonunun $(-\infty,\infty)$ aralığında integrali hesaplanırsa ;

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}\, dx = 1$$

olduğu görülür. (30) deki *f(x)* fonksiyonu istenirse hiperbolik fonksiyon şeklinde ;

$$f(x) = \frac{1}{4\cosh^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

olarak ifade edilebilir.

4. Sonuç

Inversion teoreminin ifadesinin türevi alınarak bulunan (22) bağıntısı *f(x)* fonksiyonunun , Fourier dönüşümünün $\phi(\alpha)$ olduğunu gösterir. Bu durum (13) ile verilen karateristik fonksiyonun tanımı ile karşılaştırıldığında da $\phi(\alpha)$ nın , yani karakteristik fonksiyonun , bir katsayı farkıyla ters Fourier dönüşümünün *f(x)* olduğudur.

Örnek 3.2 ' de ele alınan $\phi(\alpha) = \pi\alpha / \sinh \pi\alpha$ fonksiyonu , (30) ile verilen ve dağılış teorisinde Lojistik dağılış olarak bilinen $f(x) = e^{-x} / (1+e^{-x})^2$ fonksiyonunun karakteristik fonksiyonudur. Elbette *f(x)* biliniyorken , $\phi(\alpha)$ bulunabilir. Ancak bunun için (29) 'daki integralin hesaplanması gerekir. Bu da bazen uzun ve yorucu matematiksel işlemleri gerektirmektedir. Burada izlenen yol , yani problemin tersten çözülmesi oldukça kolaylık sağlamıştır.

ABSTRACT

Characteristic functions are requried in case of inability to find the moment genarating function which have a great importance in statistics. There is a strong relationship between characteristics functions and distribution function.

Fourier transformations which are used in many fields of applied mathematics have many similarities with characteristics functions. Obtaining the characteristics function of a distribution function which it is moment genarating function does not exist is the process of finding the invers Fourier transform of this distribution function with a constant difference.

KAYNAKÇA

CHURCHILL,R.V. (1972), *Operational Mathematics*, McGraw-Hill. Kogakuska, LTD.Tokyo.

KREYSZIG,E. (1966), *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley and Sons. Inc.USA.

SARAÇOĞLU,B ve ÇEVİK,F. (1995) , *Matematiksel İstatistik*, Gazi Büro Kitapevi Ankara.

SPIEGEL,M.R. (1974), *Fourier Analysis*, McGraw-Hill Comp.USA.

STUART,A ve ORD,J.K. (1987), *Advanced Theory of Statistics*, Charles Griffin Comp. London.