D.E.Ü.İ.İ.B.F.Dergisi
Cilt:13, Sayı:II, Yıl:1998, ss:25-34

MARKA TERCİHİ PROBLEMİNE HİPERKÜBLE ÇÖZÜM

Samim DÜNDAR(*) **Pınar DÜNDAR**(**)

ÖZET

Toptancı piyasasında her firma, büyük miktarda ürettiği malların satış bağlantılarını başka bir mala kaptırmama gayreti içindedir. Eğer saptanabilirse, tekrarlı satışlar ve anahtar marka kuruluşun yönetiminin taktik ve stratejilerini belirlemesinde çok değerli bilgiler verirler. İlk problem tek bir mal için anahtar markayı ve onun piyasa yüzdesini saptamaktır. Bu bir olasılıksal Markov modelidir. Farz edelim ki sabit bir durumda ,verilmiş bir periyotta sadece iki ürünün piyasa yüzdeleri bilinmiş olsun. Bunu izleyen periyotta bu iki üründen birinin önceki satış popülasyonuna bağlı olarak tanıtım aktivitesi ;i)Sabit ve değişen durumun her ikisinde de zaman ilişkisi, ii)Periyottan periyoda değişim, iii)Kümülatif satışlar, iv)Yakınsama zamanı bilgilerine dayanılarak yapılır. Burada önemli olan tüm ürünler satıldığında , bir üründen başlayarak diğer ürünlerin de satışını sağlayan bir modelde tüm ürünlerin satışı için gereken zamanın bulunmasıdır. Probleme uygun olan Markov modelinde ürünler bir grafın tepeleri ve önceki periyotta i.inci ürünü alan kişinin o andaki periyotta j. inci ürünü alması grafın ayrıtları olarak düşünülürse problem bir graf problemine dönüşür. Bu çalışmada yukarıda sözü edilen grafın bir hiperküb olması durumunda tüm tepeleri örten yolun ayrıt sayısı hesaplanmış ve hiperkübte herhangi bir tepede biten yolun olasılığının her zaman aynı değere eşit olduğu ispatlanmıştır.

1. GİRİŞ

Birleştirilmiş bir grafın bir x tepesinden tur örtüsü,x tepesinden başlayan ve her adımda o andaki tepenin komşuluğundaki bir tepeye eşit olasılıkla hareket ederek grafın tüm tepelerini dolaştığında biten bir random walk'tur. C_n çevresinin herhangi bir tepesinden bir tur örtüsü, istenilen herhangi başka bir tepedekine eşittir. K_n tam grafı da bu garip özelliğe sahiptir. Lovazs ve Winkler(3) de başka bir grafın bu özelliği sağlamadığını söylemişlerdir. Bu çalışmada Q_n ile gösterilen hiperkübün de aynı özelliği sağladığını gösterdik. Bunun bir sonucu olarak marka tercihi probleminde Markov modelinin bir hiperküb olması durumunda T durma noktsasının hiperkübün tepe sayısına bağlı olarak 2^n-1 olacağını belirttik. Ayrıca Q_n grafında farklı üç x,y ve z tepesi için Pr(L(x,y))=Pr(L(x,z))=1/n olduğunu ispatladık.

Önce konu ile ilgili tanım ve teoremler ele alınmıştır.

(*) Yrd.Doç.Dr..D.E.Ü.,İ.İ.B.F. Ekonometri Bölümü.
(**) Yrd.Doç.Dr.Ege Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü.

Tanım 1:Olasılık yasalarıyla kontrol edilen zamana bağlı olarak değişen sürece stokastik süreç denir. Matematiksel olarak $\{X(t): t\varepsilon T \}$ rasgele değişkenlerinin bir kolleksiyonu bir stokastik süreçtir.

Tanım 2:V tepeler kümesi olmak üzere $g:V\rightarrow V$ bağıntısı bir graf tanımlar. Grafın (v_i,v_j) ikilileri grafın ayrıtları adını alır. Ayrıtlar kümesi E ile işaretlenirse bir graf G=(V,E) ile gösterilir.

Tanım 3: Bir G grafı üstünde bir random walk, sabitleştirilmiş bir x tepesiyle başlayan ve grafın tepelerini durum uzayı kabul eden bir stokastik süreçtir. Bu süreç 0 anında x tepesindedir. Eğer t anında bir y tepesinde ise t+1 anında y ye bitişik ve eşit olasılıklı bir z tepesinde olur.

Yardımcı Teorem 1:Bir grafta p tepeli bir yol (p-1) ayrıta sahiptir.

Tanım 4: G grafı üstündeki bir random yolun zaman örtüsü tüm tepelerin ziyaret edilmesi için gereken adımların sayısıdır.

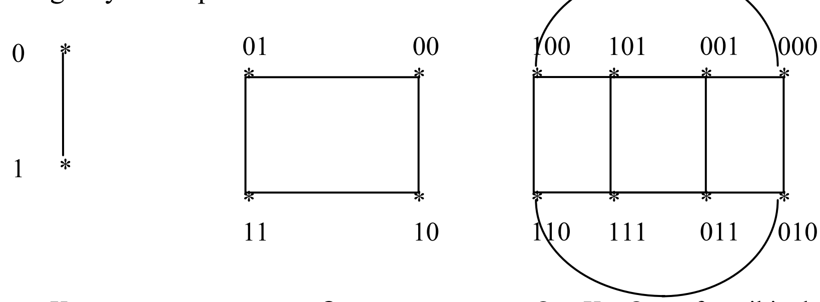
Tanım 5: Bir grafın bir v tepesine bir ayrıtla bitişik ayrıtların sayısına v tepesinin derecesi denir. Bu deg(v) ile gösterilir. G üstündeki bir random walkta bir v tepesinin olasılığı 1/deg(v) dir.

Tanım 6:G grafının tüm tepelerinin derecesi aynı bir r sayısına eşitse grafa r-düzenli graf adı verilir.

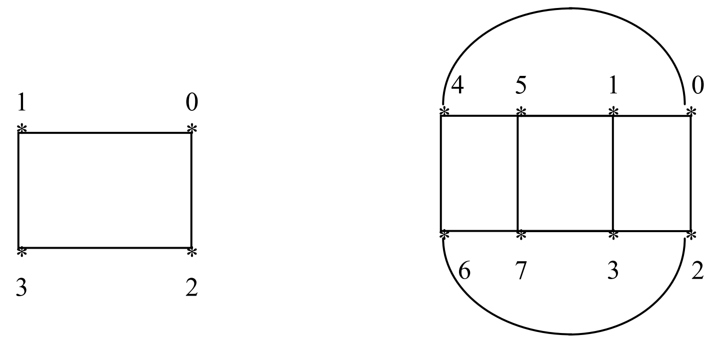
Tanım 7: İki grafın çarpımı aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır.

G_1 ve G_2 iki graf olsunlar. $u=(u_1,u_2)$ ve $v=(v_1,v_2)$ $V=V_1*V_2$ içinde iki tepe $u_1=v_1$ ve u_2 bitişik v_2 ya da $u_2=v_2$ ve u_1 bitişik v_1 olduğunda G_1*G_2 içinde u ve v tepeleri bitişiktir.

Tanım 8: $n\geq 2$ olmak üzere $Q_n=K_2*Q_{n-1}$ şeklinde tanımlanan grafa n-küb graf ya da hiperküb denir.



K_2 Q_2 $Q_3= K_2* Q_2$ grafı ve iki tabanında gösterimi



Q_2 grafının 10 tabanında gösterimi

Q_3 grafının 10 tabanında gösterimi

ŞEKİL - 1
Q_2 ve Q_3 grafları

Yardımcı Teorem 2: Q_n grafı 2^n tepeli ve $n*2^{n-1}$ ayrıtlı bir graftır.

Yardımcı Teroem 3: Q_n grafı n-düzenli graftır.

Tanım 9: Bir G grafında bitişik olmayan tepelerin bir $S \subset V$ kümesine grafın bağımsız kümesi denir. Bağımsız kümelerin en büyüğüne maksimal bağımsız küme ,bu kümenin eleman sayısına grafın bağımsızlık sayısı adı verilir.

Tanım 10: Bir grafın tüm tepelerinden geçen bir çevre varsa grafa Hamilton graf, grafın her çevresi bir Hamilton çevreye tamamlanabiliyorsa grafa Randomly Hamilton graf denir.

Tanım 11:Bir grafın V tepeler kümesi U ve W gibi iki bağımsız kümeye ayrıldığında her ayrıtının bir ucu U da bir ucu V de kalıyorsa grafa iki kümeli graf adı verilir.

Tanım 12: En az k+1 tepeli bir grafın her u,v tepe çifti ikişer ikişer ayrık k tane yolla birleştirilebiliyorsa graf k-birleştirilmiş graftır. k nın enbüyük değerine grafın birleştirilmişliği denir. Bu sayı grafı birleştirilmemiş yapmak için graftan atılması gereken tepe sayısıdır.

Teorem 2:Q_n grafının birleştirilmişliği n dir.

2. BİR RANDOM WALK ARACILIĞINDA VARILMIŞ EN SON YENİ TEPE ÜSTÜNE HİPERKÜBLE YAKLAŞIM

Stokastik sürecin durum uzayı G grafının tepeleri olarak alındığında G nin saptanmış bir x tepesinde başlayan,bu tepeye bitişik bir y tepesine eşit olasılıkla vardıktan sonra bu kez eşit olasılıkla y ye bitişik bir z tepesine varan ve bu özelliği ardışık olarak geçtiği her tepede sağlayan bir yolda G nin tüm tepelerinin ziyaret edilmesi için gereken adım sayısına zaman örtüsü denilmektedir. Zaman örtüsünün bulunması,en son yeni tepenin dağılımını saptama olarak zor bir problem olmakla beraber olaya graf gözüyle bakıldığında en son yeni tepenin dağılımı bir C_n cevresidir.

Boş olmayan birleştirilmiş bir G grafında x ile başlayan bir random walkla varılması gereken en son yeni tepenin y olduğu bir olay L(x,y) ile gösterilsin. x başlangıçta ziyaret edilen tepe olarak düşünüldüğünde Pr(L(x,x))=0 dır.

Teorem 3:Eğer G bir çevre ise üç farklı x,y ve z tepesi için Pr(L(x,y))=Pr(L(x,z)) dir(3).

Teorem 4:u ve v birleştirilmiş bir G grafının bitişik olayan iki tepesi olsunlar. O zaman u nun Pr(L(x,u))≤Pr(L(u,v) yu sağlayan bir x komşuluğu vardır.Üstelik V(G)-(u,v) ile indirgenmiş alt graf birleştirilmiş ise eşitsizlik kesindir(3).

Teorem 5:Eğer p tepeli n-birleştirilmiş bir G grafında bazı $k \leq n$ sayıları için ,her k tepeli $S \subset V$ kümesi $|N(S)|>p*(k-1)/(p+1)$ eşitsizliğini sağlarsa G grafı Hamilton graftır(1). Burada N(S) S ye bitişik tepelerin kümesidir(1).

Teorem 6: Q_n hiperkübü Hamilton üstelik randomly Hamilton graftır.

İspat:Q_n grafında Teorem 5 de sözü edilen S kümeleri olarak Tanım 11 de verilen ,Q_n ni iki parçaya ayıran U ya da W bağımsız kümelerinin alt kümeleri alınırsa Q_n n birleştirilmiş olduğundan Teorem 5 sağlanır. Buradan Q_n Hamilton graftır ve her yolu bir Hamilton çevreye tamamlanabileceğinden randomly Hamilton graftır.

Teorem 7:Q_n grafının üç farklı tepesi x,y ve z olsun.Pr(L(x,y))=Pr(L(x,z))=1/n dir.

İspat:Q_n grafı n-düzenli olduğundan,saptanmış bir x tepesi ile başlandığında ilk adımda 1/n olasılıkla $\{V(Q_n)-x\}$ kümesinin bir tepesine varılır. Bu tepe t olsun İkinci adımda t tepesinden 1/n olasılıkla $\{V(Q_n)-(x,t)\}$ kümesinin bir z tepesine varılır. Böyle devamla Q_n nin tüm tepeleri dolaşılır.$\{V(Q_n)-x\}$ kümesi 2^n-1 elemanlı olup x tepesini bu kümenin tepelerine birleştiren Hamilton yol x de katılırsa $t=2^n$ tepeli ve bir yolun ayrıt sayısı tepe sayısından bir eksik olduğundan sözü geçen Hamilton yol $a=2^n-1$ ayrıtlıdır. Bu yolun ağarlığı da $1/n^a$ olur.

Ağaç diyagramı çizildiğinde Q_n nin her tepe çifti arasında varolan yollar arasından bazılarının Hamilton yol olduğu görülür.

Herbir adım stokastik sürecin bir çıktı fonksiyonu olarak düşünülüp

f_m ($m=1,2,...,2^n$) ile indislenirse dal olasılıkları aşağıdaki biçimde hesaplanır.

Birinci adımda (x başlangıç tepesinin seçimi)

$Pr(f_1=r_i| \ r_i$:başlangıç range$)=n^a/(n^a*t)=1/t$ dir.

İkinci adımda(x tepesinden bir adımla varılan tepelerin seçimi)

$Pr(f_2=r_j|f_1=r_i)=Pr(f_2 \text{ ve } f_1)/Pr(f_1)=(n^{a-1}/(n^a*t))/((n^a/(n^a*t))=1/n$ dir.

Üçüncü adımda(x tepesinden iki ayrıtla varılan tepelerin seçimi)

$Pr(f_3=r_k| \ f_2=r_i \text{ ve } f_1=r_j)=Pr(f_3 \text{ ve } f_2 \text{ ve } f_1)/Pr(f_2 \text{ ve } f_1)=$

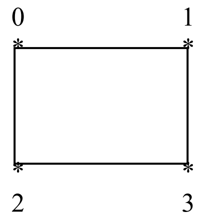
$(n^{a-2}/(n^a*t))/((n^{a-1})/(n^a*t))=1/n$ dir.

Hesaplamalara devam edilirse a. ıncı adımda

$Pr(f_t| \ f_{t-1} \text{ ve } f_{t-2} \text{ ve}...f_2 \text{ ve } f_1)=Pr(f_t \text{ ve } f_{t-1} \text{ ve } f_{t-2} \text{ ve}...f_2 \text{ ve } f_1)/(f_{t-1} \text{ ve } f_{t-2}$ ve $...f_2 \text{ ve } f_1)=(n^0/(n^a*t))/((n^1)/(n^a*t))=1/n$ olur.

Her adımdaki ağarlıklar bir önceki adımın ağarlıklarının 1/n i olduğundan sonuçta yolun ayrıt sayısı(tepe sayısı) ne olursa olsun x tepesi ile başlayan bir yolun olasılığı her zaman 1/n dir.

Örnek 1:Şekil 2 de Q_2 grafı ve bu grafın başlangıç tepeleri x=0,1,2,3 tepesi alındığında mümkün yol dizileri verilmiştir.

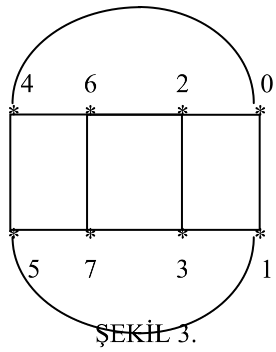


x=0	**x=1**	**x=2**	**x=3**
0 1 0 1	1 0 1 0	2 0 1 0	3 1 0 1
0 1 0 2	1 0 1 3	2 0 1 3	3 1 0 2
0 1 3 1	1 0 2 0	2 0 2 0	3 1 3 1
0 1 3 2	1 0 2 3	2 0 2 3	3 1 3 2
0 2 0 1	1 3 1 0	2 3 1 0	3 2 0 1
0 2 0 2	1 3 1 3	2 3 1 3	3 2 0 2
0 2 3 1	1 3 2 0	2 3 2 0	3 2 3 1
0 2 3 2	1 3 2 3	2 3 2 3	3 2 3 2

ŞEKİL 2.
Q_2 grafı

Sonuçta bir Q_n grafında üç farklı tepe x,y ve z olsun. $Pr(L(x,y))=Pr(L(x,z))=1/n$ olur.

Örnek 2:Q_3 grafında bir tur örtüsü 8 tepeli bir Hamilton yol olup 7 ayıtlıdır.Q_3 ün herhangi bir tepesi x olarak alınıp her seferinde ona eşit olasılıklı (1/3) komşu bir tepeye varmak üzere grafın tüm tepelerini dolaşan yol (zaman örtüsü) 7 ayrıtlıdır. Şekil 3. de verilen Q_3 grafının x=0 tepesi ile başlayan iki farklı tur örtüsü sadece 4 tepesi (3 ayrıtı) alınarak hesaplamalar yapılmıştır.



ŞEKİL 3.
Q_3 grafı

durumlar	**ağırlıklar**	**f1**	**f2**	**f3**	**f4**
d1	1/8*27	0	1	0	1
d2	"	0	1	0	2
d3	"	0	1	0	4
d4	"	0	1	3	1
d5	"	0	1	3	2
d6	"	0	1	3	7
d7	"	0	1	5	1
d8	"	0	1	5	4
d9	"	0	1	5	7
d10	"	0	2	0	1
d11	"	0	2	0	2
d12	"	0	2	0	4
d13	"	0	2	3	1
d14	"	0	2	3	2
d15	"	0	2	3	7
d16	"	0	2	6	2
d17	"	0	2	6	4
d18	"	0	2	6	7
d19	"	0	4	0	1
d20	"	0	4	0	2
d21	"	0	4	0	4
d22	"	0	4	5	1
d23	"	0	4	5	4
d24	"	0	4	5	7
d25	"	0	4	6	2
d26	"	0	4	6	4
d27	"	0	4	6	7

Pr(0 4 5 1) hesaplandığında, n=3 ve 3 ayrıtlı yollar alındığından a=3 dür. Grafın tepe sayısı ise $t= 2^3=8$ dir.

$Pr(0)=3^3/(3^3*8)=1/8$.

$Pr(4|0)=Pr(4 \text{ ve } 0)/Pr(0)=(3^2/(3^3*t))/(1/8)=1/3$.

$Pr(5|4\ 0)=Pr(5 \text{ ve } 4 \text{ ve } 0)/Pr(4 \text{ ve } 0)=(3^1/(3^3*8))/(3^2/(3^3*8))=1/3$.

$Pr(1|5\ 4\ 0)=Pr(1 \text{ ve } 5 \text{ ve } 4 \text{ ve} 0)/Pr(5 \text{ ve } 4 \text{ ve} 0)=(3^0/(3^3*8))/(3^1/(3^3*8))=1/3$ olur.

Pr(0 2 4 6) hesaplanmak istenirse

$Pr(0)=3^3/(3^3*8)=1/8$.

$Pr(2|0)=Pr(2 \text{ ve } 0)/Pr(0)=(3^2/(3^3*8))/(1/8)=1/3$.

$Pr(6|2\ 0\ )=Pr(6 \text{ ve } 2 \text{ ve } 0)/Pr(2 \text{ ve } 0)=(3^1/(3^3*8))/(3^2/(3^3*8))=1/3$.

$Pr\ (4|6\ 2\ 0) = Pr\ (4 \text{ ve } 6 \text{ ve } 2 \text{ ve } 0) / Pr\ (6 \text{ ve } 2 \text{ ve } 0) = (3^0/(3^3*8))/(3^1(3^3*8))=1/3$ olur.

3.MARKA TERCİHİ PROBLEMİNE HİPERKÜBLE ÇÖZÜM

Toptancı piyasasındaki her firma ürettiği ürünler için yaptığı önceki satış bağlantılarını eksiltmeksizin korumak ister. Eğer tekrarlı satışlara ait bilgileri ve anahtar marka eğilimini hesaplayabilirse ,bunlar yönetimin taktik ve stratejilerini belirlemede önemli rol oynarlar.

İlk problem bir peryotta tek bir mal için anahtar markayı ve piyasa yüzdesini belirlemektir. Bu bir olasılıksal Markov modelidir. Farz edelim ki sabit bir durumda verilmiş bir periyotta sadece iki ürünün piyasa yüzdeleri bilinsin. Bunu izleyen periyotta bu iki üründen birinin önceki satış popülasyonuna bağlı olarak tanıtım aktivitesi;

i)Sabit ve değişen durumun her ikisinde de zaman ilişkisi

ii)Peryottan peryoda değişim

iii)Kümülatif satışlar

iv)Yakınsama zamanı

bilgilerine dayanılarak yapılır.

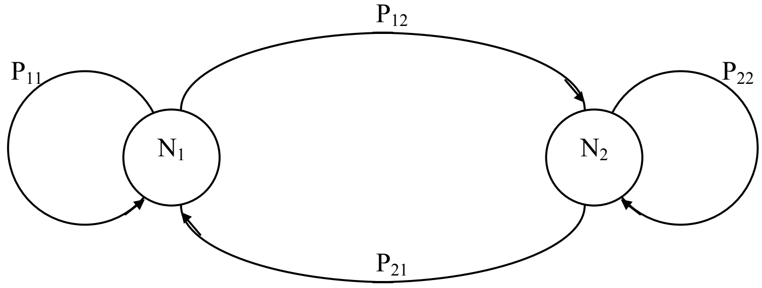
Problemin olasılıksal modeli;

p_{ij}:önceki peryotta i.c. malı alan kişinin j.ci malı alma olasılığı

$N_i(t+T)$:t+T zamanında i.ci markanın satış miktarı

N(t):verilmiş bir periyotta piyasada tüm markaların toplam satış miktarını göstersin.

Örneğin iki marka için N_1 ve N_2 iki durum olmak üzere uygun bir Markov süreci şekil 4. de verilmiştir.



Şekil 4.
İki durumlu Markov süreci

$N_1(t)$ ve $N_2(t)$ T=0 anındaki 1.ci ve 2.ci markaların satışları olsunlar.

$p_{11}+p_{12}=1$ ve $p_{21}+p_{22}=1$ dir.

$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$ olasılık matrisi kısaca P ile gösterilirse

$$(N_1(t+1) \quad N_2(t+1))=(N_1(t) \quad N_2(t))*P \quad \text{dir.}$$

$$(N_1(t+2) \quad N_2(t+2))=(N_1(t+1) \quad N_2(t+1))*P$$

ile hesaplanır.

Genel olarak T=1,2,3... alınarak her mal için toplam satış miktarları bulunur. Burada T nin alacağı son değer önemlidir. T sayısı bir markadan başlayarak tüm markaları dolaşmak için geçen zamanı(yakınsama zamanı- adım sayısını) gösterir.

Bu problemde markaları bir grafın tepeleri; i.ci markayı alan bir kişinin daha sonra j.ci malı tecih etmesini iki tepe arasında bir ayrıt olarak düşünürsek bir graf problemi ile karşılaşırız. Bu grafta tüm tepeleri dolaşmak için gereken ayrıt sayısının bulunması T nin son değerini bulmak olacaktır. Bir grafta tüm tepelerden, bu tepeleri birer kez kullanarak geçen yol Hamilton yol adını alır. Q_n hiperkübü 2^n tane tepesi ve $n*2^{n-1}$ tane ayrıtı olan, Hamilton yola sahip graftır. Q_n nin II.bölümde açıklanan özellikleri dikkate alındığında marka tercihi probleminde karşılaşılan modelin grafı bir Q_n grafı ise tüm tepeleri hem eşit olasılıkla hem de tam bir kez kullanan yolun 2^n-1 ayrıtlı olacağı bilindiğine göre T nin son değeri 2^n-1 olarak alınır.

ABSTRACT

In the consumer mass market, the struggle of each fırm to retain the loyalty of a large number of consumers and to cause other consumers to shift to the brand of the firm goes unceasingly. ”Repeat buying” and “brand switching” trends, if they can be determined, represent very valuable information for managing a company’s tactics and strategy. One approach to determining brand switching and market share on a period-to-period basis for a single product is the probabilistic Markov model. Let G be a connected, simple graph. A random walk on G, beginning at some specified vertex x,is a stochastic process whose state space consists of vertices of G. At time 0 the process is at x; if at time t it is at vertex y, then at time t+1 it will with equal probability(namely the inverse of the degree of y) be at any z adjacent to y. The cover time of a random walk on G is the number of steps required for all vertices to be visited. In this work we proved that, the cover time of the hipercube graph is 2^n -1, if the Markov process is a hipercube. This number is the convergence time of the process.

KAYNAKÇA

BUCKLEY,F.ve HARARY,F. (1990), *Distance In Graphs*, Addison Wesley Pub.California.

KEMENY,J.G.ve SNELL,J.L. (1963), *Finite Markov Chains*, Van Nostrand Comp.Princton.

LOVAZS,L. ve WİNKLER,P. (1996), “Note On The Last New Vertex Visited By Random Walk”, *Journal of Graph Theory* ,Vol.17,no.5,593-596.

PARZEN,E. (1962),*Stochastic Processes*, Holden-Day,San Francisco.