



## Olabilirlik Oranı Yöntemine Dayalı, Yapısal Homojen Olmayan Varyans Testlerinin Piyasa Modeli İçin Karşılaştırılması

Filiz KARDİYEN<sup>1</sup> Esra AKDENİZ<sup>2</sup> Esra YİĞİT<sup>3</sup>

### Özet

Avrupa, Amerika ve Japonya borsalarında menkul kıymetler üzerine yapılan çalışmalarda hata terimlerinin sıklıkla homojen olmayan varyansa sahip oldukları gözlenmiştir. Menkul kıymet getirilerini modellemede piyasa modeli kullanıldığında, homojen olmayan varyans yapısının varlığı parametre tahmini ve parametrelerin anlamlılık testlerinde problemlere yol açmaktadır. Bu çalışmada, homojen olmayan varyans yapısının olup olmadığının test edilmesi için kullanılan olabilirlik oran yöntemine dayalı testlerden genel olabilirlik oran testi, koşullu olabilirlik oran testi, artuk olabilirlik oran testi, uyarlanmış olabilirlik oran testi ve Bartlett-düzeltilmiş olabilirlik oran testi ele alınmıştır. Ayrıca simülasyon çalışması ile bu testlerin performansları karşılaştırılmalı olarak incelenmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Artuk Olabilirlik Oran Testi, Bartlett-Düzeltilmiş Olabilirlik Oran Testi, Genel Olabilirlik Oran Testi, Heterojen Varyans, Koşullu Olabilirlik Oran Testi, Piyasa Modeli, Profil Olabilirlik Oran Testi, Uyarlanmış Olabilirlik Oran Testi

**JEL Sınıflandırma Kodları:** C01, C12, C15

### *A Monte Carlo Comparison Of Likelihood Based Constructive Heteroscedasticity Tests For The Market Model*

#### Abstract

The market model of Sharpe when applied to European, U.S.A. and Japan stock markets usually results with heteroscedastic error structure. Since heteroscedasticity in error terms cause inefficient parameter estimation, it should be tested before data analysis. The objective of this paper is to present five widely used likelihood based constructive heteroscedasticity tests which are the ordinary likelihood ratio test, the conditional likelihood ratio test, the corrected modified likelihood ratio test, the modified likelihood ratio test, the profile likelihood ratio test and the residual likelihood ratio test. Also simulation study is performed to compare these tests.

<sup>1</sup> Yrd.Doç.Dr., Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü ([fyuva@gazi.edu.tr](mailto:fyuva@gazi.edu.tr))

<sup>2</sup> Arş. Gör., Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü ([ekadeniz@gazi.edu.tr](mailto:ekadeniz@gazi.edu.tr))

<sup>3</sup> Arş. Gör., Gazi Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, İstatistik Bölümü ([eyigit@gazi.edu.tr](mailto:eyigit@gazi.edu.tr))

**Key Words:** Bartlett-Corrected Likelihood Ratio Test, Conditional Likelihood Ratio Test, Heteroscedasticity, Market Model, Modified Likelihood Ratio Test, Ordinary Likelihood Ratio Test, Profile Likelihood Ratio Test, Residual Likelihood Ratio Test  
**JEL Classification Codes:** C01, C12, C15

---

## 1. Giriş

Yatırımcının en iyi portföyü oluşturmasına yönelik önerilen ilk ve en çok bilinen model olan Markowitz'in Ortalama-Varyans Modeli hesaplama karmaşıklığı nedeniyle pratik kullanıma elverişli bulunmamıştır Sharpe (1963,1964) tarafından Markowitz'in modelini geliştirmek amacıyla önerilen piyasa modeli portföy teorisine önemli katkıda bulunmuştur. Piyasa modeli (1) nolu denklemde ifade edildiği gibidir.

$$R_{it} = \alpha + \beta R_{mt} + e_{it} \quad (1)$$

Burada  $\beta$  menkul kıymetin sistematik riskini,  $R_{it}$ ,  $t$  periyodundaki menkul kıymetin getirisini,  $R_{mt}$ ,  $t$  periyodundaki piyasa getirisini ve  $e_{it}$  hata terimini göstermektedir.

$\beta$ 'nin doğru tahmin edilmesi yatırımcılar için, riskli varlıklardan oluşan portföylerin getirilerinin tahmini için çeşitlendirilmiş portföy seçimi ve sistematik olmayan riski en küçük yapma anlamında önemlidir.

Geleneksel en küçük kareler (EKK) yöntemi  $\beta$ 'nin tahmini için kullanılabilir. Ancak hata terimlerinin varyansının homojen olmaması tahminin etkin bir tahmin olmaması ile sonuçlanır. Menkul kıymetler üzerine yapılan çalışmalarda, hata terimlerinin sıklıkla homojen olmayan varyansa sahip oldukları gözlenmiştir. Homojen olmayan varyans menkul kıymetin piyasaya göre daha değişken olup olmadığını belirlemek için yapılan  $\beta = 1$  hipotezinin test edilmesinde hatalı sonuçlar verebilir. Bu nedenle  $\beta$  ile ilgili analizler yapılmadan önce varyans homojenliğinin güvenilir ve güçlü bir test ile sınanması gereklidir (Lyon ve Tsai, 1996:337-338). Varyans homojenliğinin test edilmesi için literatürde genel olarak kabul görmüş bir test istatistiği yoktur. Varyans homojenliği testleri yapısal ve yapısal olmayan testler olarak iki grupta incelenebilir. Yapısal olmayan testler sadece varyansın heterojen olup olmadığı hakkında bilgi verirken, yapısal testler buna ek olarak varyansın heterojenliğinin fonksiyonel yapısı hakkında da bilgi verir. Yapısal testler Olabilirlik Oran ve Wald testleridir (Edmonton, 1984:199).

Bu çalışmada, varyans homojenliğinin test edilmesinde kullanılan olabilirlik oran testleri olan genel olabilirlik oran testi, koşullu olabilirlik oran testi, uyarlanmış olabilirlik oran testi, artık olabilirlik oran testi ve Bartlett-düzeltilmiş olabilirlik oran testi ele alınacaktır. Bu testler hata terimlerinin çarpımsal homojen olmayan yapı gösterdiği durumlarda, farklı örnek çaplarına göre, I. tip hata, güç değerleri ve heterojenlik yapısı ve dağılım varsayımlarına duyarlılıkları bakımından Monte Carlo Metodu ile karşılaştırılacaktır.

## 2. Değişen Varyans Modeli ve Testleri

Genel doğrusal regresyon modeli (2)'deki denklem gibidir.

$$Y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i \quad (2)$$

Burada,  $Y_i$ ,  $i$ -nci  $i = 1, \dots, n$  birime ait bağımlı değişken değerini,  $x_i$   $i$ -inci birimin  $p$  bağımsız değişkene ilişkin değerlerinden oluşan  $p \times 1$  boyutlu vektör,  $\beta$ ,  $p \times 1$  boyutlu bilinmeyen parametre vektörünü ve  $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$

$i$ -inci birime ilişkin birbirinden bağımsız hata terimlerini göstermektedir.

$$w_i = \delta^{*'} z_i = \delta_1 + \delta_2 z_{i2} + K + \delta_q z_{iq} \quad (3)$$

$\sigma_i^2 = \sigma^2 w_i$  yapısındadır ve burada  $w_i$  bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonu olan varyans ağırlıklandırma vektörüdür.  $z_i$ , heterojenlik yapısını yaratan bağımsız değişkenleri göstermek üzere  $z_i$ ,  $q \times 1$  boyutlu vektördür ( $p \geq q$ ).

En çok karşılaşılan homojen olmayan varyans yapıları toplamsal ve çarpımsal formlardır. Heterojenlik parametrelerinden oluşan vektör  $\delta^{*'} = [\delta_1 K \delta_q]$  olsun. Hildreth ve Houck (1968) ve Amemiya (1977) toplamsal formu bağımsız değişkenlerin doğrusal bir fonksiyonu olarak ele almış ve ağırlıklandırma vektörünü (3) nolu denklemdeki gibi ifade etmiştir.

Harvey (1976) çarpımsal formun genel formülünde ağırlıklandırma vektörünü (4) nolu denklemdeki gibi ele almıştır.

$$w_i = \exp(\delta^{*'} z_i) = \exp(\delta_1 + \delta_2 z_{i2} + K + \delta_q z_{iq}) \quad (4)$$

Just ve Pope (1978,1979) ise çarpımsal formun  $\delta^{*'} = [\log \delta_1 \delta_2 K \delta_q]$  ve

$z_i' = [1 \ \log x_i]$  olduğu (4) nolu denklemdeki özel ağırlıklandırma vektörünü ele almıştır.

$$w_i = \exp(\delta' z_i) = \delta_1 z_i^{\delta_2} K z_i^{\delta_q} \quad (5)$$

Bu makalede (5) nolu denklemdeki çarpımsal heterojenlik yapısı ele alınmıştır. Yokluk hipotezinde sınaması yapılan parametre vektörü  $\delta' = [\delta_2 K \ \delta_q]$  dür. Yokluk hipotezindeki  $\delta$  vektörünün değeri  $\delta_0 = 0$  olduğunda,  $w_i = \delta_1$  olur ve (2) nolu model  $\sigma_i^2 = \sigma^2 \delta_1$  homojen varyans yapısına sahip olur. Modelin homojen bir yapıya sahip olup olmadığını sınamak için kullanılan olabilirlik oran yöntemine dayalı yapısal homojen varyans testleri alt bölümlerde verilmiştir.

### 2.1. Genel Olabilirlik Oran Testi

(2) nolu modelde hata terimleri bağımsız ve normal dağılıma sahip olduğundan, olabilirlik fonksiyonunun logaritması sabit terimler göz ardı edilerek (6) nolu denklemdeki gibi elde edilir.

$$L(Y; \delta, \sigma^2, \beta) = -\frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log w_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - x_i' \beta)^2}{\sigma^2 w_i} \quad (6)$$

$\delta$  parametresinin en çok olabilirlik tahmin edicisi (7) nolu denklemde verilen profil olabilirlik fonksiyonu maksimize edilerek bulunur.

$$L_p(Y; \delta) = L(Y; \delta, \hat{\sigma}_\delta^2, \hat{\beta}_\delta) \propto -\frac{n}{2} \log \hat{\sigma}_\delta^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \log w(z_i, \delta) \quad (7)$$

Burada,  $\hat{\beta}_\delta = \left( \sum_{i=1}^n x_i w_i^{-1} x_i' \right)^{-1} \left( \sum_{i=1}^n x_i w_i^{-1} y_i \right)$  ve  $\hat{\sigma}_\delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i' \hat{\beta}_\delta)^2 w_i^{-1}$  'dir.

Profil olabilirlik fonksiyonu  $\delta$  parametre vektörünün doğrusal olmayan bir fonksiyonu olduğundan  $\delta$  parametre vektörü iteratif yöntemlerle bulunur ve (8) nolu denklemdeki test istatistiğinde yerine konur.

$$LRT = -2 \{ LR_p(Y; \delta_0) - LR_p(Y; \hat{\delta}) \} \quad (8)$$

Olabilirlik oran test istatistiğinin dağılımı  $\chi_{(q-1)}^2$  'dir (Lyon ve Tsai,1996:340).

## 2.2. Koşullu Olabilirlik Oran Testi

Profil olabilirlik oran testi ilgilenilmeyen parametre (nuisance parametre) sayısı çok küçük olduğunda bile iyi sonuç vermeyebilir. Honda (1989) ilgilenilmeyen parametrelerin ortak olasılık yoğunluk fonksiyonlarını kullanarak koşullu profil olabilirlik oran testini önermiştir.

$$\begin{aligned} CL_p(Y; \delta) &= CL_p(Y | \hat{\beta}_\delta, \hat{\sigma}_\delta; \delta) \\ &= L_p(Y; \delta) + \frac{1}{2} \{ (p+2) \log \hat{\sigma}_\delta - \log | \sum x_i' w_i^{-1} x_i | \} \end{aligned} \quad (9)$$

Koşullu olabilirlik oran test istatistiği (9) nolu denklemde verilmiştir.

$$CLRT = -2 \{ CL_p(Y; \delta_0) - CL_p(Y; \hat{\delta}) \} \quad (10)$$

## 2.3. Uyarlanmış Olabilirlik Oran Testi

Cox ve Reid (1987), ilgilenilmeyen parametreler ile test edilmek istenen parametre  $\delta$ 'nın ortogonal olmamasından dolayı profil olabilirlik oran testini uyarlayarak (10) nolu denklemi elde etmişlerdir.

$$ML_p(Y; \delta) = CL_p(Y; \delta) + \frac{\sum_{i=1}^n \log w_i}{n} \quad (11)$$

Uyarlanmış olabilirlik oran test istatistiği (12) nolu denklemde verilmiştir.

$$MLRT = -2 \{ ML_p(Y; \delta_0) - ML_p(Y; \hat{\delta}) \} \quad (12)$$

## 2.4. Artık Olabilirlik Oran Testi

Ölçü ve ağırlıklandırma parametreleri, test etmek istediğimiz parametre olduğunda,  $\hat{\beta}$ 'nin en çok olabilirlik oran tahmin edicisini veren koşullu profil olabilirlik oran fonksiyonu artık olabilirlik fonksiyonu haline gelir. Böylece serbestlik derecesinin kaybını dikkate alarak test etmeyi sağlar (Verbly, 1993:6)

$$RL_p(Y; \sigma^2, \delta) = RL_p(Y | \hat{\beta}_{\sigma^2, \delta}; \sigma^2, \delta)$$

$$= CL_p(Y; \delta) - \log \hat{\sigma}_\delta^2 \quad (13)$$

Artık olabilirlik oran test istatistiği (14) nolu denklemde verilmiştir.

$$RLRT = CLRT + 2(\log \hat{\sigma}_0^2 - \log \hat{\sigma}^2) \quad (14)$$

### 2.5. Bartlett-Düzeltilmiş Olabilirlik Oran Testi

Örnek çapı yeteri kadar büyük olmadığında ve ilgilenmediğimiz parametre sayısı çok olduğunda olabilirlik oran test istatistiği iyi sonuç vermeyebilir. Cordeiro (1993), olabilirlik oran testine Bartlett düzeltmesi uygulayarak düzeltilmiş olabilirlik oran test istatistiğini (15) nolu denklemdeki gibi elde etmiştir.

$$LRT^* = \frac{LRT}{1+c} \quad (15)$$

$$c = h(X, R) \cdot \frac{3(k+1)^2 - 1}{6n}$$

$$h(X, R) = -\frac{1}{2} \text{tr}(A_d^2) + \frac{1}{3} \mathbf{1}' A^{(3)} + \frac{1}{2} \mathbf{1}' A_d A A_d \mathbf{1} + \text{tr}(A_d H_d) - \mathbf{1}' (H^{(2)} \odot A) \mathbf{1} + \frac{1}{2} \mathbf{1}' H_d A H_d \mathbf{1} + \mathbf{1}' A_d A H_d \mathbf{1}$$

Burada  $A = R(R'R)^{-1}R'$ ,  $R = [1 \ Z]$ ,  $H = \sum_{i=1}^n x_i (x_i x_i')^{-1} x_i'$ ,  $\mathbf{1}$ , tüm elemanları

1'lerden oluşan  $n \times 1$  boyutlu vektör,  $d$  indisi ise bulunduğu matrisin köşegenleştirilmiş biçimini ifade etmektedir.  $\odot$  sembolü ise, aynı boyuttaki matrisin Hadamard çarpımını göstermektedir (Ferrari ve Neto, 2002)

$$(M^{(2)} = M \odot M \text{ ve } M^{(3)} = M^{(2)} \odot M)$$

### 3. Simülasyon Çalışması

Bu bölümde 2.1- 2.5'te verilen test istatistikleri örnek çapları, I. tip hata, güç değerlerine ve heterojenlik yapısına ve dağılım varsayımlarına duyarlılıkları bakımından karşılaştırılacaktır. Profil olabilirlik fonksiyonları  $\delta$  parametresinin doğrusal olmayan bir fonksiyonu olduğundan  $\delta$  parametresinin en çok olabilirlik tahmini bulunamaz. Bu nedenle  $\delta$  parametresinin tahmini 'BFGS' quasi-Newton algoritması ile elde edilmiştir. MATLAB programı kullanılarak elde edilen simülasyon sonuçları

$$Y_i = x_i' \beta + \varepsilon_i \quad (16)$$

$\varepsilon_i \sim N(0, \sigma_i^2)$  ve bağımsız olan basit regresyon modeline dayanmaktadır ve  $\beta_0 = \beta_1 = 1$  olarak alınmıştır. Burada varsayılan (16) nolu denklemdeki heterojenlik yapısı gereği  $x_i$ 'lerin pozitif olması için  $x_i$ 'ler  $U(0,15)$  dağılımından bağımsız olarak üretilmiştir. Hataların normal dağıldığı (16) nolu doğrusal regresyon modeli için genel olabilirlik (LR), Bartlett-düzeltilmiş olabilirlik (LR\*), uyarlanmış olabilirlik (MLR), artık olabilirlik (RLR) ve koşullu olabilirlik (CLR) oran test istatistikleri elde edilmiş ve bu işlemler I. tip hata payı 0.05 için 1000 kez tekrarlanmıştır.

Tablo 1: Test istatistiklerinin I. tip hataları  $X_1 \sim U(0,15)$

	LRT	LRT*	CLRT	MLRT	RLRT
<b>n=20</b>					
$e_j \sim N(0,1)$	0.066	0.053	0.112	0.048	0.062
$e_j \sim \text{Log}N(0,1)$	0.366	0.341	0.401	0.324	0.352
$e_j \sim \text{Lojistik}(0,1)$	0.098	0.075	0.148	0.078	0.096
$e_j \sim t_3$	0.183	0.152	0.189	0.155	0.183
<b>n=50</b>					
$e_j \sim N(0,1)$	0.059	0.054	0.057	0.055	0.061
$e_j \sim \text{Log}N(0,1)$	0.421	0.414	0.420	0.405	0.419
$e_j \sim \text{Lojistik}(0,1)$	0.084	0.077	0.088	0.074	0.079
$e_j \sim t_3$	0.267	0.258	0.254	0.260	0.269
<b>n=80</b>					
$e_j \sim N(0,1)$	0.051	0.051	0.058	0.048	0.053

Tablo 1'de bu test istatistiklerinin  $n = 20, 50, 80$  olan farklı örnek çapları için I. tip hataları ve hata terimlerinin dağılımı lognormal(0,1), lojistik(0,1) ve  $t_3$  dağılımları olduğunda duyarlılıklarına bakılmıştır. Tablo 1 sonuçlarına bakıldığında LRT ve CLRT istatistiklerinin I. tip hataları öngörülen 0.05 değerinden büyük olma eğilimindedir. Örnek çapı küçük olduğunda ( $n=20$ ) LRT\* ve MLRT istatistikleri, LRT istatistiğine göre öngörülen I. tip hata değerine daha yakın sonuç vermektedir, örnek çapı arttıkça aralarındaki fark azalmaktadır. Hata terimlerinin dağılımı lognormal(0,1), lojistik(0,1) ve

$t_3$  dağılımları olduğunda tüm test istatistiklerinin I. tip hata değerleri yüksek olduğundan sağlam test istatistikleri olmadıkları görülmektedir. (5) nolu denklemdeki çarpımsal yapıya uygun olarak elde edilen test istatistiklerinin  $e_i : N(0, \sigma^2 x_{i1}^\delta)$  olduğunda  $\delta$ 'nın farklı değerleri için  $\delta = -2, -1.5, -1, -0.5, 0.5, 1, 1.5, 2$  test istatistiklerinin güç değerleri Tablo 2'de

Tablo 2: Test istatistiklerinin güç değerleri  
( $X_1 \sim U(0,15), e_i \sim N(0, \sigma^2 x_{i1}^\delta), n = 20$ )

$\delta$	LRT	LRT*	CLRT	MLRT	RLRT
-2.0	0.967	0.964	0.989	0.955	0.963
-1.5	0.919	0.905	0.977	0.889	0.898
-1.0	0.757	0.721	0.872	0.679	0.703
-0.5	0.362	0.326	0.531	0.283	0.314
0.5	0.224	0.191	0.076	0.215	0.250
1.0	0.628	0.595	0.297	0.620	0.655
1.5	0.877	0.860	0.566	0.870	0.892
2.0	0.971	0.966	0.744	0.971	0.975

verilmiştir.  $\delta$ 'nın 0'a yakın değerlerinde heterojenlik az olduğundan test istatistiklerinin verinin homojen olup olmadığını belirleme gücü düşüktür.  $\delta < 0$  değerleri için CLRT istatistiği,  $\delta > 0$  olduğunda RLRT istatistiği güç bakımından diğer test istatistiklerine göre daha iyidir. Hata terimleri (3) nolu denklemdeki gibi toplamsal yapıda heterojen olduğunda  $n=20,50$  için bulunan güç değerleri Tablo 3'de verilmiştir. Buna göre RLRT istatistiği diğer test istatistiklerine göre daha güçlüdür.

Tablo 3: Toplamsal homojen olmayan varyans yapısı  
 $e_i \sim N(0, (1 + 5x_j))$  için testlerin güç değerleri

	LRT	LRT*	CLRT	MLRT	RLRT
n=20	0.591	0.537	0.250	0.584	0.630
n=50	0.966	0.959	0.877	0.966	0.968



## 5. Sonuç

Menkul kıymet getirilerini modellemede kullanılan piyasa modeli, menkul kıymet getirisinin bağımlı değişken, piyasa getirisinin bağımsız değişken olduğu basit, doğrusal bir regresyon modelidir. Piyasa modelinde, regresyon katsayısı  $\beta$  sistematik riskin göstergesidir ve doğru tahmin edilmesi yatırımcılar için önemlidir. Bu nedenle, doğrusal regresyonda parametre tahminlerini olumsuz etkileyen, hata terimlerinin homojen olmayan varyans yapısına sahip olması, piyasa modeller içinde araştırılması gereken bir konudur.

Doğrusal regresyon modelinde parametre tahminleri yapılmadan önce verinin homojen olup olmadığının test edilmesi önemlidir. Hata terimleri normal dağıldığında olabilirlik oran test istatistikleri kullanılarak verinin homojen olup olmadığı test edilebilir. Hata terimleri normal dağılmadığında 2. bölümde verilen artık olabilirlik oran testi, Bartlett-düzeltilmiş olabilirlik oran testi, genel olabilirlik oran testi, koşullu olabilirlik oran testi veya uyarlanmış olabilirlik oran testleri kullanılmamalıdır. Örnek çapı küçük olduğunda Bartlett-düzeltilmiş ve uyarlanmış olabilirlik oran testi diğer test istatistiklerine göre öngörülen I. tip hata değerine daha yakındır. Bu sonuçlar, Lyon ve Tsai (1996) 'nin sonuçları ile örtüşmektedir. Heterojenliğin az olduğu ( $\delta = -0.5, 0.5$ ) durumlarda test istatistiklerinin gücü azalırken, heterojenliğin yüksek olduğu durumlarda koşullu olabilirlik oran testi ve artık olabilirlik oran test istatistikleri diğer test istatistiklerine göre daha güçlüdür. Tüm test istatistikleri, elde edildikleri varyans yapısının dışındaki heterojen veri yapısını tespit edebilme özelliğine sahiptir. Test istatistikleri içinde artık olabilirlik oran test istatistiği heterojenlik yapısı farklı olduğunda diğer test istatistiklerine göre daha güçlüdür.

## Kaynaklar

Amemiya, T. (1977), "A Note on a Heteroscedastic Model", *Journal of Econometrics*, 6, 365-370.

Cordeiro, G.M.(1993), "Bartlett Corrections and Bias Correction for Two Heteroscedastic Regression Models", *Communications Statistics Theory Methods*, 22, 169-188.

Cox, D.R. ve Reid, N. (1987), "Parameter Orthogonality and Approximate Conditional Inference", *Journal of the Royal Statistical Society*, 49, 1-39.

Edmonton, B.A. (1984), "Tests for Additive Heteroskedasticity", *Empirical Economics*, 9, 199-216.

Ferrari, S.L.P. ve Cribari-Neto F. (2002), "Corrected Modified Profile Likelihood Heteroscedasticity Tests", *Statistics and Probability Letters*, 57(4), 353-361.

Harvey, A.C. (1976), "Estimating Regression Models with Multiplicative Heteroscedasticity", *Econometrica*, 44, 461-466.

Hildreth, C. ve Houck, J.P. (1968), "Some Estimators for a Linear Model with Random Coefficients", *Journal of American Statistical Association*, 63, 584-595.

Honda, Y. (1989), "On The Optimality of Some Tests of the Error Covariance Matrix in the Linear Regression Model", *Journal of Royal Statistical Society*, 51, 71-79.

Just, R.E. ve Pope, R.D. (1978), "Stochastic Specification of Production Functions and Economic Implications", *Journal of Econometrics*, 7, 67-86.

Lyon, J.D., Tsai, C. (1996), "A Comparison of Tests for Heteroscedasticity", *The Statistician*, 45, 337-349.

Sharpe, W. (1963), "A Simplified Model of Portfolio Analysis", *Management Science*, 9, 277-293.

Sharpe, W. (1964), "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk", *Journal of Finance*, 19(3), 425-442.

Verbyla, A.P. (1993), "Modelling Variance Heterogeneity: Residual Maximum Likelihood and Diagnostics", *J.R. Statist.Soc. B*, 55 (2), 493-508.