MSKU Eğitim Fakültesi Dergisi MSKU Journal of Education
ISSN 2148-6999 Cilt- Volume 9, Sayı- Number 2, (2022) Kasım-November

Araştırma Makalesi **Research Article**

Matematik Öğretmenliği Lisans Öğrencilerinin Geometrik Alışkanlıklarının İncelenmesi: Trigonometri Örneği[1]

Investigation of Geometric Habits of Undergraduate Students in Secondary Mathematics Education: Trigonometry Example

Ekin ALTIKARDEŞ[2], Melike YİĞİT KOYUNKAYA[3]

Makale Hakkında

Gönd. Tarihi: 05.12.2021
Kabul Tarihi: 14.06.2022
Yayın Tarihi: 01.11.2022

Anahtar Kelimeler

Birim çember, trigonometri, trigonometrik oranlar, zihnin geometrik, alışkanlıkları

Özet

Bu çalışmanın temel amacı lise matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin birim çember ve trigonometrik oranlar konularında kullandıkları geometrik alışkanlıkları incelemektir. Bu çalışmanın teorik altyapısını "Zihnin Geometrik Alışkanlıkları" çerçevesi oluşturmaktadır. Durum çalışması ile desenlenen bu çalışmanın katılımcı grubu, lise matematik öğretmenliği lisans programında birinci sınıfta öğrenim gören on iki tane öğrenciden oluşmaktadır. Çalışmanın veri grubu, öğrencilere yazılı olarak verilen ve çözmeleri istenen birim çember ve trigonometrik oranlar kavramlarına dair sorulardan oluşmaktadır. Çalışmanın verileri benimsenen çerçeve ışığında betimsel analiz yöntemi ile analiz edilmiştir. Elde edilen bulgular sonucunda, öğrencilerin trigonometri konusunda en sık kullandıkları geometrik alışkanlıkların ilişki kurarak muhakeme etme ve değişmeyenlerin incelenmesi; en az kullandıkları geometrik alışkanlığın ise keşfetme ve yansıtma dengesi kurma olduğu ortaya çıkmıştır. Çalışmanın bulguları öğrencilerin neredeyse tamamının geometrik alışkanlıkları kullanma konusunda yeterli düzeyde olmadıklarını göstermiştir.

Keywords

Unit circle, trigonometry, trigonometric ratios, geometric habits of , mind

Abstract

The main purpose of this study is to examine undergraduate students', who were enrolled in secondary mathematics education, geometric habits of mind related to the concepts of unit circle and trigonometric ratios. The framework of "Geometric Habits of Mind" was identified as the theoretical background of the study. This study was designed considering a case study method and the participants were twelve first grade students. The data group of the study consists of questions on the concepts of unit circle and trigonometric ratios and the students were required to answer the question on the paper. The data were analyzed with the descriptive analysis method in the light of the adopted framework. As a result of the findings, the students most frequently used reasoning with relationships and investigating invariants and the least used balancing exploration with reflection. The findings of the study showed that almost any of the students were not at a sufficient level in using geometric habits.

Atıf için:
For Citation

Altıkardeş, E. & Yiğit-Koyunkaya, M. (2022). Matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin geometrik alışkanlıklarının incelenmesi: Trigonometri örneği. *Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi Eğitim Fakültesi*, *9*(2), 514-540. DOI: 10.21666/muefd.1032938

[1] Bu makale 26-28 Eylül 2019 tarihleri arasında düzenlenen 4. Uluslararası Türk Bilgisayar ve Matematik Eğitimi Sempozyumunda sözlü bildiri olarak sunulan ve tam metni basılan çalışmanın genişletilmiş halidir.

[2] 1. Dokuz Eylül Üniversitesi – ekin.altikardes@deu.edu.tr - ORCİD No: 0000-0002-1813-9540
[3] 2. Dokuz Eylül Üniversitesi – melike.koyunkaya@deu.edu.tr - ORCİD No: 0000-0002-7872-3917

Bireylerin sıra dışı bir problem durumu ile karşı karşıya kaldıklarında çözüm için geliştirdikleri düşünme yolları zihinsel alışkanlıklar olarak tanımlanmaktadır (Costa ve Kallick, 2000; Driscoll, DiMatteo, Nikula ve Egan, 2007; Driscoll, DiMatteo, Nikula, Egan, Mark ve Kelemanik, 2008; Rolle, 2008). Bu alışkanlıklar, bireylerin ne yapacaklarını bilmedikleri durumlarda problem durumunu çözmek için etkili bir strateji seçme ve bu stratejiyi uygulama becerilerini gösteren alışkanlıklardır (Leikin, 2007). Zihinsel alışkanlıkların kazanılması, bireylerin eleştirel düşünme, muhakeme etme, fikirler arasında bağlantı kurma, öğrendiklerini uygulama ve problem çözme becerilerinin gelişimine katkıda bulunur (Goldenberg, 1996; Goldenberg, Shteingold ve Feurzeig, 2003; Levasseur ve Cuoco, 2009). Zihinsel alışkanlıklar, Cuoco, Goldenberg ve Mark (1996) tarafından genel zihinsel alışkanlıklar ve matematiğe özgü zihinsel alışkanlıklar olmak üzere farklı şekillerde ele alınmıştır. Cuoco, Goldenberg ve Mark (1996), örüntü arama, denemeler yapma, açıklama, tanımlama, fikirleri ayırma ve bir araya getirme, görselleştirme, keşfetme, varsayma, tahmin etme gibi alışkanlıkların genel zihinsel alışkanlıkları yansıttığını belirtmişlerdir. Matematiğe özgü zihinsel alışkanlıklar ise bireylerin bir matematikçi gibi düşünme becerilerini geliştirme amacıyla daha çok matematik özelinde ortaya çıkan alışkanlıklardır (Cuoco ve ark., 1996; Goldenberg, 1996; Lim ve Selden, 2009; Matsuura, Sword, Piecham, Stevens ve Cuoco, 2013).

Matematiksel alışkanlıkların bir alt basamağını cebirsel, geometrik, olasılıksal ve istatistiksel alışkanlıklar gibi alışkanlıklar oluşturmaktadır (Cuoco, Goldenberg ve Mark, 2010; Goldenberg, 1996; Harel ve Sowder, 2005). Bu alt basamaklardan biri olan geometrik alışkanlıklar matematik programlarının en önemli düzenleyici unsurlarından biridir (Cuoco ve ark., 2010; Mark, Cuoco, Goldenberg ve Sword, 2009). Geometrik kavram ve yapıların etkili bir şekilde öğrenilebilmesi ve geometrik problemlerin çözülebilmesi için bu alışkanlıkların bireylere kazandırılması gerekmektedir (Cuoco ve ark., 1996; Goldenberg, 1996). Geometrik alışkanlıklar ilk olarak Goldenberg (1996) tarafından geometrik şekillerin görselleştirilmesi ve yorumlanması, formal ve informal tanımlamalar yapabilme, görsel ve sözlü bilgilerin harmanlanması, denemeler yapma ve bunlardan sonuç çıkarma, değişmezleri inceleme ve kanıtlama, çıkarım yapma, genelleme, sistematik olarak keşfetme, algoritmalar hakkında akıl yürütme ve bir algoritma oluşturma şeklinde tanımlanmıştır. Cuoco ve ark. (1996) ise çalışmalarında, görselleştirme, farklı geometrik sistemler, çoklu bakış açısı, değişmezleri arama ve orantısal akıl yürütme becerileri üzerinde durmuşlardır. Bu iki çalışmanın sonuçlarını harmanlayan Driscoll ve ark. (2007), Zihnin Geometrik Alışkanlıkları (ZGA) (Geometric Habits of Mind [GHOM]) olarak isimlendirdikleri bir teorik çerçeve oluşturmuşlardır. Araştırmacılar bu teorik çerçeve kapsamında ilişki kurarak muhakeme etme, geometrik fikirlerin genelleştirilmesi, değişmeyenlerin incelenmesi ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurma olmak üzere dört geometrik alışkanlık ortaya koymuşlardır. Driscoll ve arkadaşlarının (2007) ardından Cuoco ve ark. (2010) da, geometrik alışkanlıkları sürekli muhakeme, geometrik değişmezleri araştırma, uç durumları düşünme, görselleştirme ve manüpilasyon alışkanlıkları olarak ifade etmişlerdir.

Geometrik alışkanlıklara yönelik alan yazın incelendiğinde, yapılan en kapsamlı ve en detaylı sınıflandırmanın Driscoll ve ark. (2007) tarafından yapıldığı ve bu sınıflandırmanın diğerlerini birleştirdiği dikkat çekmektedir (Bülbül, 2016; Erşen, Ezentaş ve Altun, 2018). Buna rağmen, alan yazında bu çerçeve ile ilgili yapılan çalışmalarının sayısının oldukça az olduğu görülmekte ve bu durum literatürdeki bir eksiklik olarak göze çarpmaktadır. ZGA çerçevesiyle ilgili çalışmalarda çoğunlukla iki konuya odaklanıldığı görülmektedir. Bunlardan ilki, katılımcıların çeşitli konulardaki geometrik alışkanlıklarının belirlenmesidir (Driscoll ve ark., 2007; Koç ve Bozkurt, 2012; Tolga ve Cantürk-Günhan, 2019; Yavuzsoy-Köse ve Tanışlı, 2014). Odaklanılan ikinci konu ise katılımcıların geometrik alışkanlıklarının gelişimi ve geliştirilmesidir (Bülbül, 2016; Bülbül ve Güven, 2020; Driscoll ve ark., 2007; Erşen ve ark., 2018; Govender ve Govender, 2020; Gürbüz, Ağsu ve Güler, 2018; Lai ve Donsing, 2018; Özen, 2015; Özen-Ünal ve Köse, 2019; Uygan, 2016; Wiles, 2013; Yıldız, 2018). Geometrik kavramları öğrenmek ve geometrik problemleri çözmek için bu alışkanlıkları edinmenin gerekliliği göz önüne alındığında, çalışmaların bu iki konuya yoğunlaşması kaçınılmazdır (Cuoco, 2008; Cuoco ve arkadaşları, 1996; Goldenberg, 1996). Çünkü bireylerin bu alışkanlıkları edinebilmeleri veya geliştirebilmeleri için öncelikle var olan geometrik alışkanlıklarının belirlenmesi gerekmektedir. Bunun ise, öğrenmekte zorlanılan geometri konularına yönelik öğrenim ve öğretim uygulamalarının iyileştirilmesine katkı sağlaması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.

Trigonometri ile ilgili araştırmalar, trigonometrinin bireylerin öğrenmekte zorlandıkları konulardan biri olduğunu göstermektedir (Fi, 2003; Kendal ve Stacey, 1998; Thompson, Carlson ve Silverman, 2007; Weber, 2005; Yiğit, 2014a). Trigonometriyi anlamak, matematiksel kavramlar hakkında kapsamlı bilgi sağlamanın yanı sıra ileri matematiksel problemleri çözmek için bir temel sağlar (Fi, 2003). Benzer şekilde, geometrik alışkanlıkların da bireyleri ileri matematiksel çalışmalara hazırladığı göz önünde bulundurulduğunda (Leikin, 2007), bireylerin trigonometri konusundaki geometrik alışkanlıklarının incelenmesi daha da önem kazanmaktadır. Buradan hareketle bu çalışmanın temel amacı, matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin trigonometri konusunda, özel olarak birim çember ve trigonometrik oran kavramlarında kullandıkları geometrik alışkanlıklarının belirlenmesi ve incelenmesidir. Bu amaç, matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin var olan trigonometri bilgilerine ışık tutarak ve bu bilgilerini geometrik bir bakış açısından inceleyerek alan yazına katkı sağlamaktadır. Ayrıca, ZGA çerçevesi ile ilgili literatürün sınırlılığı, trigonometri konusundaki geometrik alışkanlıkların incelendiği bir çalışmaya rastlanmaması ve matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin trigonometri konusunda yaşadığı zorluklara odaklanan çalışmaların sayısının az olması birlikte dikkate alındığında, çalışma sınırlı olan literatürü genişletmektedir.

Trigonometri ile İlgili Çalışmalar

Trigonometri, matematik eğitiminde cebirsel ve geometrik akıl yürütmeyi birbirine bağlayarak (Weber, Knott ve Evitts, 2008) matematiksel kavramları birleşmede önemli rol oynayan bir konudur (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 1989, 2000). Trigonometri öğrenimi, fizik, mimarlık ve mühendislik gibi alanlardaki birçok üniversite düzeyinde okutulan dersler için bir ön koşul olarak karşımıza çıkmaktadır (Weber ve ark., 2008). Alan yazında, hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin ve öğretmen adaylarının sınırlı trigonometri bilgisine sahip olduklarını ve trigonometri konusunda bazı güçlükler yaşadıklarını ortaya koymuşlardır (Brown, 2005; Fi, 2003; Kendal ve Stacey, 1998; Moore, 2013, 2014; Thompson, 2008; Thompson ve ark., 2007; Weber, 2005, Yiğit, 2014a, 2014b, Yiğit-Koyunkaya, 2016). Weber'e göre (2005) öğrencilerin trigonometri ile ilgili güçlükleri; açılar, açıları ölçme, dik üçgenler ve birim çember gibi temel kavramların etkili bir şekilde öğrenilememesinden kaynaklanmaktadır. Thompson (2008) ve Moore (2013, 2014) da benzer şekilde, öğrencilerin trigonometriyi kavramsallaştırmak için açı ve açı ölçümü kavramları ile ilgili anlamlı ilişkiler kurmaları gerektiğini, aksi halde trigonometri konusu öğrenmede zorluk yaşayacaklarını belirtmişlerdir.

Birçok araştırmacı, öğrencilerin trigonometriyi en etkili şekilde nasıl öğrenebileceklerini belirlemek için öğretim stratejilerini test etmeye odaklanmıştır (Kendal ve Stacey, 1998; Weber, 2005; Yiğit, 2014a). Weber (2005), trigonometrinin temellerini öğretmek için yaygın olarak kullanılan iki farklı yöntemi tanımlamıştır:

(1)Trigonometrik fonksiyonların dik üçgenlerdeki kenarların uzunluklarının oranları olarak tanımlandığı bir oran yöntemi

(2)Bir açının kosinüs ve sinüsünün, birim çemberi kesen açının ucundaki noktanın sırasıyla x ve y koordinatları olarak tanımlandığı bir birim çember yöntemi.

Weber (2005) ve Kendal ve Stacey (1998), öğrencilerin trigonometri öğrenmesini geliştirmek için her iki yöntemin de kullanılması gerektiğini belirtmişler fakat hangisinin önce tanıtılması gerektiği konusunda farklı fikirler öne sürmüşlerdir. Weber (2005) öğrencilere trigonometri öğretilirken birim çember yöntemi ile başlanması gerektiğini savunurken; Kendal ve Stacey (1998) oran yöntemi ile başlanması gerektiğini savunmuşlardır. Buradan hareketle araştırmacılar, birim çember yönteminin öğrencilerin doğru trigonometrik oranları bulmalarını ve trigonometriyi anlamalarını zorlaştırdığı; oran yönteminin ise trigonometride yaşadıkları zorlukların üstesinden gelmek için öğrencilere etkili bir yol sağladığı sonucuna ulaşmışlardır.

Alan yazında var olan çalışmalar, öğretmenlerin ve öğrencilerin trigonometriyi öğrenme ve öğretme sürecine ve bu süreçte yaşadıkları zorluklara odaklanırken, bu konunun öğrenme ve öğretme sürecinde temel bilgi olarak kabul edilen geometri bilgisinin nasıl kullanıldığına dair alan yazında bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bireylerin trigonometri konusunda yaşadıkları zorluklar göz önüne alındığında, bu konu ile ilgili soru ve durumlarda çözüm yaparken veya akıl yürütürken geometri bilgilerini nasıl kullandıklarının incelenmesinin, bu konudaki eksikliklerinin belirlenebilmesi ve giderilebilmesi açısından önemli olduğu düşünülmektedir. Ayrıca söz konusu incelemenin geometrik alışkanlıklarla ilgili ayrıntılı bir teorik çerçeve kullanılarak yapılmasının daha etkili olacağı düşünülmektedir. Buradan hareketle, bu çalışmada matematik öğretmenliği lisans birinci sınıf öğrencilerin birim çember ve trigonometrik oran konuları özelinde hangi geometrik alışkanlıkları kullandıkları ZGA çerçevesi kapsamında belirlenerek alana katkı sağlamak amaçlanmıştır.

Teorik Çerçeve

Driscoll ve ark. (2007) tarafından geliştirilen ZGA çerçevesi bu çalışmanın teorik alt yapısını oluşturmaktadır. Driscoll ve ark. (2007), geometrik düşünme becerisinin geliştirilebilmesi için bazı zihinsel alışkanlıklar kazanmanın gerekli olduğunu belirtmişlerdir. Böylece, bireylerin geometrik problemleri çözerken kullandıkları düşünme yollarını tanımlamışlar ve ZGA" çerçevesini ortaya koymuşlardır. ZGA çerçevesi, geometrik problemlerin çözülmesi sürecinde geometrik düşünceyi destekleyen verimli düşünme yollarını vurgulamaktadır. Bu çerçeve, geometrik düşünme ve bu düşünmenin gelişimine yönelik detaylı bir bakış açısı sunarak geometri öğrenimi ve öğretimine katkı sağlamaktadır (Driscoll ve ark., 2007; Driscoll ve ark., 2008). ZGA çerçevesi dört ana bileşenden oluşmaktadır: (1) ilişki kurarak muhakeme etme; (2) geometrik fikirlerin genelleştirilmesi; (3) değişmeyenlerin incelenmesi; ve (4) keşfetme ve yansıtma dengesi kurma. Bu bileşenlerin her biri birbiri ile yakından ilişkili olmakla birlikte, bileşenler arasında hiyerarşik bir düzen bulunmamaktadır (Driscoll ve ark., 2007; Driscoll ve ark., 2008). Söz konusu bileşenler aşağıda ayrıntılı olarak açıklanmıştır.

İlişki Kurarak Muhakeme Etme: İlişkilerle muhakeme etme bileşeni, geometrik şekillerin aralarındaki benzerlik, paralellik ve farklılık gibi ilişkileri incelemeyi ve bu ilişkilerin problem çözmeye ve kavramları anlamaya nasıl yardımcı olduğu hakkında muhakeme yapmayı içerir (Driscoll ve ark., 2007). İlişkilendirme sürecinde bireyler tek bir geometrik şeklin parçaları arasındaki ilişkilere, ayrı geometrik şekiller arasındaki ilişkilere ya da orantısal akıl yürütme gibi özel muhakeme becerilerini kullanmaya odaklanabilirler (Driscoll ve ark., 2008). Bu alışkanlığa sahip bireyler geometrik şekiller arasındaki benzer veya farklı özellikleri gerekçeleri ile birlikte ortaya koyabilir ve bu özellikleri birbiri ile ilişkilendirebilirler. Verilen bir geometrik şeklin içerisindeki alt şekilleri belirleyebilir ya da bir geometrik şekilde yapılar oluşturabilirler. Ayrıca, geometrik şekiller üzerinde orantısal akıl yürütme kullanabilirler (Driscoll ve ark., 2008). Bireyler ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığını kullanırken bazı sorulara cevap bulmaya çalışırlar. Bunlar: "Verilen geometrik şekiller birbirine nasıl benziyor?", "Geometrik şekiller arasındaki benzerliği ifade etmenin kaç farklı yolu var?", "Geometrik şekillerin farklı yönleri nelerdir?", "Diğer hangi şekiller verilen tanıma uyuyor?", "Verilen şekle diğerine benzemesi için ne yapmalıyım?", "Şekiller arasındaki ilişkiye başka bir açıdan bakarsak ne olur?" (Driscoll ve ark., 2007).

Geometrik Fikirlerin Genelleştirilmesi: Geometrik fikirlerin genelleştirilmesi, matematik eğitiminin temel amaçlarından biri olup, kavramlar ile ilgili ortaya çıkan "genel" ya da "tüm" durumları tanımlama ve anlama alışkanlığıdır (Driscoll ve ark., 2007). Bu alışkanlığa sahip olan bireyler, bir kavram için özel durumları dikkate alarak evrensel bir kural ortaya koyabilirler. Verilen durum ile ilgili tüm çözüm kümesini görebilir ve neden farklı bir çözüm olmadığını açıklayabilirler. Genel bir çözüm yolundan yararlanarak özel durumlar için çözüm yolları geliştirebilirler. Verilen durumların şartlarının değişmesiyle oluşacak yeni durumları tahmin edebilir ve bu durumlar için geçerli olacak bir kuralı fark edebilirler (Costa ve Callick, 2000; Driscoll ve ark., 2007; Driscoll ve ark., 2008). Bireyler bahsedilen eylemleri gerçekleştirirken, şu soruları dikkate alırlar: "Bu her zaman oluyor mu?", "Bu neden her zaman oluyor?", "Bu tanıma uyan her durumu bulabilir miyim?", "Bunun olmadığı durumları bulabilir miyim ve eğer öyleyse, genellememi yeniden formüle edebilir miyim?", "Bu başka açılardan da oluyor mu?" (Driscoll ve ark., 2007).

Değişmeyenlerin İncelenmesi: Değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığı, geometrik şekillerin bazı dönüşümlere (belirli bir oranda büyütme/küçültme, döndürme, parçalama, yansıtma, öteleme, yer değiştirme gibi) uğradığında, değişmeyen özelliklerini araştırmayı yansıtır. Diğer bir deyişle, bu bileşen geometrik şekilde uygulanan dönüşüm sonrasında hangi özelliklerin veya durumların değiştiğini ve hangi özelliklerin değişmediğini incelemeyi gerektirir (Driscoll ve ark., 2007). Bu alışkanlığa sahip olan kişiler, statik bir durum hakkında dinamik olarak düşünebilirler. Bir noktanın veya şeklin sürekli hareketi sonucunda oluşacak yeni oluşumu tahmin edebilirler. Bir dönüşüm uygulandığında hangi özelliklerin değiştiğini ve hangilerinin aynı kaldığını gerekçeleri ile birlikte açıklayabilirler (Driscoll ve ark., 2008). Bireyler geometrik değişmezleri araştırma sürecinde şu sorulara cevap ararlar: "Bu şekil görüşüne ulaşmak için hangi dönüşümlere ihtiyaç var?", "Bu şekli farklı dönüşümler kullanarak başka bir şekle dönüştürmek mümkün mü?", "Ne değişti? Neden?", "Ne değişmedi? Neden?", "Aynı geometrik dönüşümü defalarca uygularsam, verilen geometrik şekle ne olur?" (Driscoll ve ark., 2007).

Keşfetme ve Yansıtma Dengesi Kurma: Keşfetme ve yansıtma dengesi kurma, problem çözme sürecinde farklı yaklaşımlar kullanma ve düzenli olarak önceki adımlara dönerek durum hakkında düşünmedir (Driscoll ve ark. 2007). Bu alışkanlığı olan bireyler, tahmin ve sezgiler yoluyla çizim yapabilir, şekille oynayabilir veya şekli keşfedebilirler. Önceki deneyimlerini mevcut çözüm yaklaşımlarına aktarabilirler. Problemi çözmek için ek çizimler yapabilir, ara adımlar belirleyebilir ve farklı stratejiler geliştirebilirler. Düzenli olarak büyük resme dönerek bütüncül bir bakış açısı ile değerlendirme yapabilirler. Nihai çözümleri tanımlayabilir, bu çözümler ile ilgili varsayımlarda bulunabilir ve bu varsayımları gerekçeler sunarak açıklayabilirler. Varsayımlarını test etmek için farklı yöntemler kullanabilirler (Driscoll ve ark., 2008). En yaygın soruları şunlardır: "Bir şekil çizip sonra bir parçasını eklersem / çıkarırsam veya geriye dönük çıkarım 'yöntemini kullanırsam ne olur?", "Yaptıklarım bana ne anlatır?", "Arka plan bilgilerim bana bu problemi çözmede nasıl yardımcı olabilir?", “Hangi ara adımlar sonuçlara ulaşmamı kolaylaştırabilir?”, “Başarmayı düşündüğüm sonuç ne olabilir?” (Driscoll ve ark., 2007).

Bu çalışma matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin trigonometri konusu özelinde hangi geometrik alışkanlığı nasıl kullandıklarını, ZGA çerçevesinin açıklanan bileşenleri ışığında araştırmayı amaçlamaktadır.

Yöntem

Araştırma Deseni

Bu çalışmada nitel araştırma yöntemlerinden biri olan durum çalışması kullanılmıştır. Durum çalışması, bir olgunun doğal çevresinde incelendiği, nasıl ve niçin sorularını temel alan (Yin, 2018), bir durumun, programın, eylemin, sürecin ya da bir veya birden fazla bireyin özelliklerinin derinlemesine incelendiği araştırma yöntemidir (Creswell, 2014). Çalışmada, durum çalışması desenlerinden bütüncül tek durum desen temel alınmıştır. Bu çalışmalarda tek bir analiz birimi vardır ve bu analiz birimi bir birey, bir sınıf, bir grup, bir okul, bir program ve benzeri olabilir (Yıldırım ve Şimşek, 2013). Bütüncül tek durum çalışmalarında, benzer özellikte olan bir grup birim olarak kabul edilir ve benzer durumda meydana gelen farklılıklara odaklanarak durumun özellikleri detaylı şekilde açıklanır (Yin, 2018). Bu düşünceden hareketle, bu çalışmada 12 matematik öğretmenliği lisans öğrencisinin bulunduğu grup analiz birimi olarak kabul edilmiş ve öğrencilerin trigonometri konusu özelindeki var olan geometrik alışkanlıkları ayrıntılı olarak incelenmiştir.

Katılımcılar

Çalışmanın katılımcılarını 2018-2019 eğitim-öğretim yılı bahar yarıyılında bir devlet üniversitesinin Matematik Öğretmenliği lisans programının 1. sınıfında öğrenim gören 12 gönüllü öğrenci oluşturmaktadır. Öğrenciler bir amaçlı örnekleme yöntemi olan kolay ulaşılabilir durum örneklemesi ile belirlenmiştir. Bu bağlamda, öğrencilerin araştırmacıların görev yaptığı üniversitede öğrenim görüyor olmaları dikkate alınmıştır. Çalışma kapsamında öğrencilerin kimliklerini gizli tutmak amacıyla, öğrenciler Ö-1, Ö-2…, Ö-12 şeklinde kodlanmış ve raporlamada bu kod isimler kullanılmıştır. Lisans öğrencilerinin tümü, çalışma öncesinde “Analiz I” dersini almış olup, çalışma sırasında “Analiz II” ve “Öklid Geometrisi” derslerini almaktadırlar. Bu dersler kapsamında öğrenciler trigonometri ve trigonometri ile ilgili konulara aşina olmuşlardır.

Veri Toplama Araçları

Çalışma kapsamında öğrencilere birim çember ve trigonometrik oranlar ile ilgili alt sorular içeren dört tane soru sorulmuştur. Sorular, öğrencilerin trigonometri özelindeki geometrik alışkanlıklarını belirleme amacıyla araştırmacılar tarafından hazırlanmıştır. Soruların her biri ZGA çerçevesinin tüm bileşenlerini ölçebilecek şekilde tasarlanmıştır. Soruların tasarlanma sürecinde, araştırmacılar bir araya gelmiş ve karşılıklı fikir alışverişi yaparak soruları dizayn etmişlerdir.

Öğrencilere bu soruları cevaplamaları için yaklaşık 120 dakika verilmiştir. 120 dakikalık süre esnek tutulmuştur ve bu süre araştırmacıların öğrenci cevaplarına yönelik tahminlerine göre belirlenmiştir. Öğrenciler soruları birbirleriyle etkileşimde bulunmadan, bireysel olarak ve kâğıt-kalem kullanarak çözmüşlerdir. Ayrıca, öğrencilerden, soruları çözerken şekil çizmeleri, her bir adımı ayrıntılı olarak açıklamaları, fikirlerini genelleştirmeleri ve gerekçelerini belirtmeleri istenmiştir.

Şekil 1

Çalışmadaki İlk Soru

Bir ABC dik üçgeni ele alınız. Bu dik üçgenin bir dar açısı α olsun (0°<α<90°). 1) α açısı arttıkça verilen üçgenin kenar uzunlukları nasıl değişir? Ayrıntılı açıklayınız. 2) α açısının değişimine bağlı olarak trigonometrik oranlar nasıl değişir? Ayrıntılı açıklayınız. 3) Genelleme yapınız. (Yigit'in (2014a, 2014b) çalışmalarından esinlenilmiştir.)

İlk soru akıl yürütme kullanılarak herhangi bir dik üçgendeki bir dar açının arttırılması sonucunda kenarların ve trigonometrik oranların nasıl değişeceğinin düşünülmesini gerektirmektedir (bkz. Şekil 1). Soru ile öğrencilerin bir dik üçgende açıların, kenarların ve trigonometrik oranların birbirine bağlı değişimlerini ve bu değişimler arasındaki ilişkileri düşünme yollarını araştırmak amaçlanmıştır. Bu sayede öğrencilerin ilişki kurarak muhakeme etme ve değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlıklarını kullanıp kullanmadıkları ve kullanıyorlarsa nasıl kullandıkları belirlenmeye çalışılmıştır. Ayrıca, soruda öğrencilere herhangi bir dik üçgen verilmemiş, hem bahsedilen dik üçgeni hem de açının artmasıyla oluşacak olan dik üçgeni kendilerinin çizmeleri beklenmiştir. Böylece öğrencilerin, dik üçgeni statik bir figür olarak düşünmek yerine, dinamik olarak düşünme durumları ve bu vasıtayla değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını kullanma durumları incelenmiştir. Soruda öğrencilerden herhangi bir dik üçgendeki bir dar açının arttırılması sonucunda kenarların ve trigonometrik oranların değişimi ile ilgili bir genellemeye ulaşmaları istenerek geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığını ölçmek hedeflenmiştir. Ek olarak öğrencilerin bu genellemeyi yaparken farklı yollar tanımlama, bu yolları birbiri ile ilişkilendirme, bütünü görebilme, şekil çizerek şekillerle oynama ve tahminde bulunma, ek çizimler yapma gibi stratejileri kullanma durumları araştırılarak keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığı incelenmiştir. Benzer şekilde çalışma kapsamında yer alan diğer üç soruda da öğrencilerin çözümlerinde bu gibi stratejileri kullanıp kullanmadıkları incelenerek keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığı değerlendirilmiştir.

Şekil 2

Çalışmadaki İkinci Soru

1) Birim çemberi inşa ediniz. İnşa ettiğiniz birim çemberi kullanarak trigonometrik oranları gösteriniz. Daha sonra, birim çember üzerinde alınan herhangi bir P(x,y) noktası ile oluşturulan bir dik üçgendeki trigonometrik oranları x ve y cinsinden ifade ediniz. 2) Sinüs, cosinüs, tanjant ve cotanjant değerlerinin birim çemberin bölgelerindeki işaretlerini geometrik olarak gerekçelendiriniz. Genelleme yapınız.

İkinci soru, iki ayrı bölümden oluşmaktadır (bkz. Şekil 2). İlk bölüm, birim çemberin inşa edilmesini, trigonometrik oranların bu çember üzerinde gösterilmesini ve çember üzerinde alınan bir nokta ile oluşturulan dik üçgendeki trigonometrik oranların ifade edilmesini içermektedir. İkinci bölümde ise birim çemberin farklı bölgelerinde sinüs, cosinüs, tanjant ve cotanjant trigonometrik oran değerlerinin pozitif veya negatif olmasının gerekçelerinin geometrik olarak açıklanması istenmiştir. Bu soru ile öğrencilerin trigonometri ve farklı matematik-geometri konuları arasındaki ilişkileri anlamaları ve uygulama yolları araştırılarak, kullandıkları geometrik alışkanlıkları belirlemek amaçlanmıştır. Soruda, öğrencilerin dik koordinat sistemi, birim çember, dik üçgen, dik üçgende trigonometri, trigonometrik oranlar ve trigonometrik fonksiyonlar konuları arasında bağlantı kurma durumları araştırılmıştır. Böylece ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığı incelenmiştir. Ayrıca soru, birim çemberin farklı bölgelerinde sinüs, cosinüs, tanjant ve cotanjant trigonometrik oranlarını belirlemeyi, bu oranların değişimini incelemeyi ve genel kurallar ortaya koymayı içerdiğinden değişmeyenlerin incelenmesi ve geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığının değerlendirilmesinde kullanılmıştır.

Şekil 3

Çalışmadaki Üçüncü Soru

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$ ve $-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ olduğunu gösteriniz.

Şekil 3'te verilen üçüncü soru ile amaçlanan, öğrencilerin sinüs ve cosinüs trigonometrik oranlarının -1 ile 1 arasında değişmesinin nedenlerini geometrik olarak nasıl yorumladıklarının incelenmesidir. Bu soru, öğrencilerin çözüm aşamasında dik üçgen, birim çember, dik koordinat düzlemi ve sinüs ile cosinüs trigonometrik oranları konularını ilişkilendirebilecekleri düşünüldüğü için seçilmiştir. Sorunun bu yönü ile ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığı değerlendirilmek istenmiştir. Bu soru birim çemberin farklı bölgelerindeki açılar için sinüs ve cosinüs trigonometrik oranlarının değişimini incelemeyi gerektirmesi açısından değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını ölçmek için kullanılmıştır. Ayrıca, bu soruda herhangi bir çizim verilmemiş, öğrencilerden birim çember üzerinde bir veya birkaç açı ele almaları ve bu açı veya açıları dinamik düşünerek herhangi bir açının sinüs ve cosinüs trigonometrik oranlarının değişimi ile ilgili bir genelleme yapmaları beklenmiştir. Böylece hem değişmeyenlerin incelenmesi ve hem de geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlıklarını incelemek hedeflenmiştir.

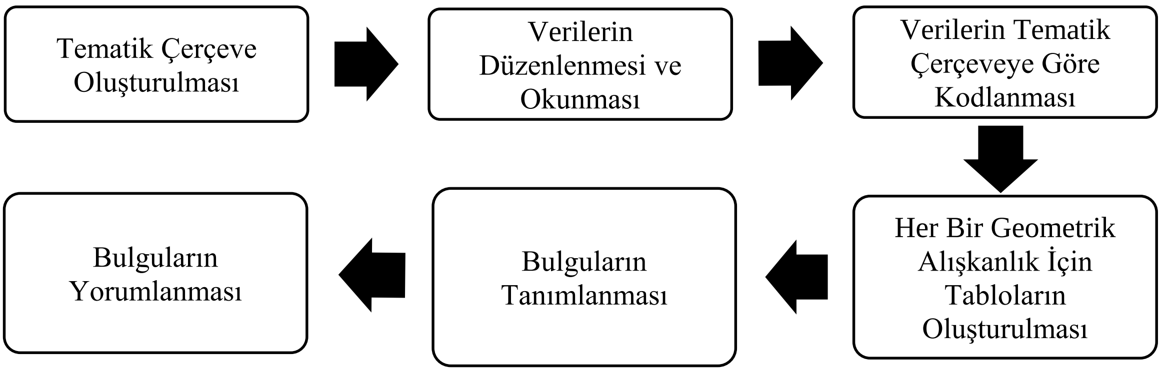
Şekil 4
Çalışmadaki Dördüncü Soru

$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$ $\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$ olduğunu birim çemberi kullanarak açıklayınız.

Son soru ise verilen bazı eşitliklerin ispatlanması ile ilgilidir (bkz. Şekil 4). Bu sorunun sorulmasının temel amacı öğretmen adaylarının pozitif ve negatif açıların trigonometrik oran değerlerini ilişkilendirme ve çıkarım yapma yollarını araştırmaktır. Bu soruda öğrencilerin dik koordinat düzlemi, trigonometrik oranlar ve birim çemberin özelliklerini ilişkilendirmeleri; pozitif ve negatif açıların trigonometrik oran değerlerini birlikte düşünmeleri ve karşılaştırmaları beklenmiştir. Böylece ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığı ölçülmeye çalışılmıştır. Soru pozitif ve negatif açıların trigonometrik oran değerlerini belirleme ve karşılaştırma aşamasında değişen veya sabit kalan durumları belirlemeyi gerektirdiğinden değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını değerlendirmek için kullanılmıştır. Ek olarak, değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını değerlendirmek amacıyla soruda öğrencilere herhangi bir şekil verilmeyerek onların dinamik düşünme durumları incelenmiştir. Ayrıca bu soruda öğrencilerin aynı ölçüye sahip pozitif ve negatif açıların trigonometrik oran değerleri arasındaki ilişkilere yönelik genel çıkarımlar yapma durumları belirlenmiş ve böylece geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığı incelenmiştir.

Veri Analizi

Şekil 5
Veri Analizi Süreci

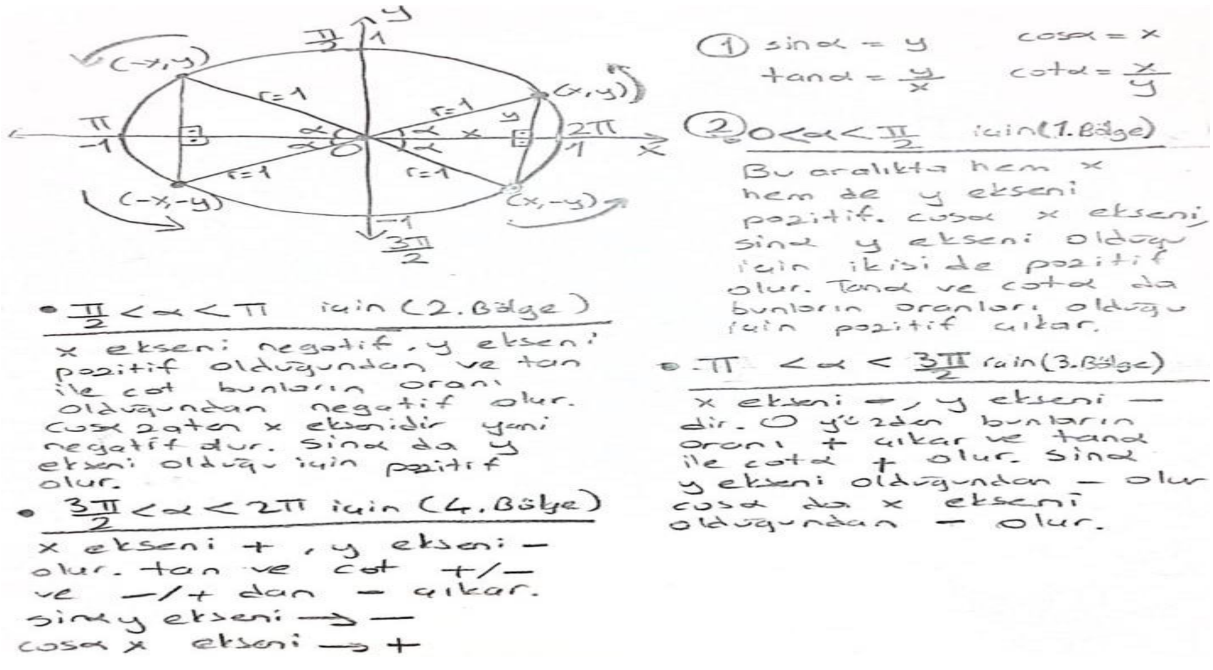


Veriler ZGA çerçevesi bağlamında betimsel analiz yöntemi kullanılarak analiz edilmiştir (Creswell, 2014). Şekil 5'te belirtilen veri analizi süreci kapsamında öncelikle ZGA çerçevesi ve bu çerçeve ile ilgili daha önce yapılmış çalışmalar incelenerek her bir geometrik alışkanlık için bir tematik çerçeve oluşturulmuştur (Driscoll ve ark. 2007, 2008; Yavuzsoy-Köse ve Tanışlı, 2014). Bu tematik çerçevelerde her bir geometrik alışkanlık kapsamında odaklanılan düşünme biçimleri ve gerçekleştirilen eylemler sıralanmıştır. Çalışmada toplanan veri grubunun analizleri sonucunda, her bir geometrik alışkanlık için oluşturulan tematik çerçeveler yeniden düzenlenmiştir. Bu noktada ilişki kurarak muhakeme etme ve geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlıkları bileşenleri, bazı ek düşünme biçimleri ve eylemler eklenerek genişletilmiştir. Bu ek düşünme biçimleri ve eylemler oluşturulan tablolarda kalın yazılarak vurgulanmıştır (bkz. Tablo 2 ve Tablo 3). Örneğin ilişki kurarak muhakeme alışkanlığı için oluşturulan tematik çerçeveye ek olarak "yeniden yapılandırma" şeklinde adlandırılan bir düşünme biçimi ortaya çıkmıştır. Ayrıca yine tematik çerçeveye ek olarak öğrencilerin bu alışkanlığı kullanırken odaklandıkları düşünme biçimleri kapsamında "sayısal verilerden veya örneklerden yararlanarak akıl yürütme" eylemini gerçekleştirdikleri ortaya çıkmıştır. Benzer yaklaşımlar diğer üç geometrik alışkanlık için de geçerlidir (bkz. Tablo 3, Tablo 4 ve Tablo 5).

Analiz sürecini detaylandırmak gerekirse; tematik çerçevenin oluşturulmasının ardından, veriler düzenlenmiş ve sırayla okunup, ayrıntılı olarak incelenmiştir. Bu noktada sorulan sorulara cevap vermeyen ya da cevapları geometrik bir düşünme içermeyen öğrencilerin cevapları değerlendirme dışı bırakılmıştır. İncelenen veriler, oluşturulan tematik çerçeveye göre kodlanmıştır. Kodlama sürecinde araştırmacılar tarafından her bir soru için zihnin dört geometrik alışkanlığı kapsamında odaklanılan düşünme biçimleri ve gerçekleştirilen eylemleri içeren ayrı tablolar oluşturulmuştur. Bu tabloların içlerine, on iki öğrencinin soruları cevaplarken hangi geometrik alışkanlıkları kullandıkları, bu alışkanlıkları kullanırken hangi düşünme biçimlerine odaklandıkları ve gerçekleştirdikleri eylemler yerleştirilmiştir.

Örneğin, ikinci soru için oluşturulan tabloda, Ö-12'nin cevabında (bkz. Şekil 6) ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığı kapsamında tek bir şekil çizmesi ve bu şekil üzerinden düşünmesi "tek bir geometrik şekildeki parçalar arasındaki ilişkilere odaklanma" olarak değerlendirilmiştir. Ayrıca, Ö-12'nin birim çember içerisinde farklı noktalar alarak dik üçgenler oluşturduğu görülmektedir. Bu durum Ö-12'nin "bir geometrik şekilde yapılar oluşturması" şeklinde kodlanmıştır. Ö-12 daha sonra, dik koordinat sistemindeki noktaları, birim çemberin yarıçapının 1 br olmasını ve dik üçgendeki trigonometrik oranların özelliklerini birbiri ile ilişkilendirerek kullanmış ve böylece sinüs, cosinüs, tanjant, cotanjant trigonometrik oranlarını x ve y cinsinden yazmıştır. Bu, Ö-12'nin "geometrik şekillerin özelliklerini kullanması" ve "geometrik şekillerin özellikleri arasındaki ilişkileri belirlemesi" olarak değerlendirilmiştir. Ardından Ö-12, x ve y cinsinden yazdığı trigonometrik oranları, birim çemberin yarıçapının 1 br olmasını ve belirlediği noktaların koordinatlarını ilişkilendirerek sinüs, cosinüs, tanjant, cotanjant trigonometrik oranlarının işaretlerine karar vermiştir. Bu ise Ö-12'nin "bir geometrik şekildeki kuralları ve yapıları tanıması ve ilişkilendirmesi" şeklinde kodlanmıştır.

Şekil 6.
Ö-12'nin İkinci Soruya Verdiği Cevap



Geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığında, Ö-12'nin sorunun çözüm aşamasında trigonometrik oran formüllerini kullanmaya yönelmesi "bilinen durumlardan veya bilinen çözümlerden yararlanarak çözüm araması" olarak değerlendirilmiştir. Formül kullanımı bilindik bir strateji olarak kabul edilmiştir. Öte yandan öğrencinin trigonometrik oranların bölgelere göre işaretlerinin genel durumunu ortaya koymak ve gerekçelendirmek için şekil çizmesi ve şekil üzerinde düşünmesi "varsayılan basitleştirici koşulları kullanarak çözüm araması" şeklinde kodlanmıştır. Ö-12'nin sinüsün 1 ve 2. bölgede pozitif, 3 ve 4. bölgede negatif olması gibi genel bir kural ortaya koyması ise "genel kurallar araması" olarak ele alınmıştır.

Değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığı değerlendirilirken, Ö-12'nin birim çemberin birinci bölgesinde bir açı alıp bu açıyı saatin tersi yönünde döndürerek diğer bölgelerde de açılar oluşturmuş olması ve bu açıların bitim noktalarından x eksenine dikmeler inerek dik üçgenler oluşturması "statik bir durum hakkında dinamik düşünmesi" şeklinde kodlanmıştır. Öte yandan Ö-12'nin oluşturmuş olduğu üçgenlerin tamamında hipotenüs uzunluğunu 1 br alması, onun noktalar farklılaşsa da üçgenlerin hipotenüslerinin 1 br kalacağını düşündüğünü göstermektedir. Bu durum öğrencinin "uygulanan bir dönüşümde değişmeyenleri belirlemesi" şeklinde değerlendirilmiştir. Ö-12'nin oluşturduğu üçgenlerin hipotenüslerinin 1 br olacağını birim çemberin yarıçapı olmasına dayandırması ise "uygulanan dönüşümde değişmeyenlerin neden değişmediğini açıklaması" şeklinde ele alınmıştır. Öğrencinin trigonometrik oranların işaretlerinin ve çember üzerinde aldığı noktaların koordinatlarının birim çemberin bölgelerine göre değiştiğini belirtmesi "uygulanan dönüşümde değişenleri belirlemesi" şeklinde kodlanmıştır. Ö-12'nin bu değişimi noktaların koordinatları ve kuralları kullanarak açıklaması ise "uygulanan dönüşümde değişenlerin neden değiştiğini açıklaması" şeklinde değerlendirilmiştir. Öte yandan, Şekil 6'da verilen cevapta Ö-12 keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığı için hazırlanan tematik çerçevedeki herhangi bir özelliği kullanmamıştır. Bu sebeple bu durum öğrencinin bu alışkanlığı kullanmadığı şeklinde kodlanmıştır.

Her bir soru için kodlamalarının yapılmasının ardından, öğrencilerin tüm sorulara verdikleri cevaplar birlikte ele alınmıştır. Bu noktada, her bir geometrik alışkanlığın kaç öğrenci tarafından kullanıldığını, bu alışkanlıkları kullanan öğrencilerden kaçının hangi düşünme biçimine odaklandıklarını ve hangi eylemleri gerçekleştirdiklerini belirlemek amacıyla, dört geometrik alışkanlık için yeni tablolar yapılmıştır. İlişkilerle muhakeme etme alışkanlığı için yapılan tablo Tablo 1'de gösterilmiştir.

Tablo 1

İlişkilerle Muhakeme Etme Bileşeni İçin Öğrencilerin Tüm Sorulara Cevaplarının Değerlendirilmesi

İlişki Kurarak Muhakeme Etme			
Öğrenciler	**Tek Bir Şekildeki Parçalar Arasındaki İlişkilere Odaklanma**	**Ayrı Şekiller Arasındaki İlişkilere Odaklanma**	**Yeniden Yapılandırma**
Ö-1	Soru 2: a,b / Soru 3: a,b,d	Soru 4: a,b,c,d,e	Soru 1: a,b,f
Ö-2	Soru 1: a,b,e / Soru 2: a,b,d Soru 3: a,b,d,e	Soru 1: a,b,c,d,e,f / Soru 2: a,b,e,f Soru 4: a,b,d,e,f	
Ö-3	Soru 1: a,b,d,e / Soru 2: a,b Soru 3: a,b,e		Soru 1: a,b,c,d,e
Ö-4	Soru 2: a,b,d,e	Soru 1: a,b,c / Soru 2: a / Soru 4: a,b	
Ö-5	Soru 2: a,b,d / Soru 4: a,b,d,e		Soru 1: a,b,c,d,f
Ö-6	Soru 1: a,b		
Ö-7	Soru 1: a,b,d / Soru 2: a,b		
Ö-8	Soru 2: a,b,d,e / Soru 3: a,b,d / Soru 4: a,b,d,e	Soru 1: a,b,c	
Ö-9	Soru 2: a,b,d	Soru 1: a,b,c,d / Soru 2: a,b	
Ö-10		Soru 1: a,b,c,d / Soru 2: a,b,d,e Soru 3: a,b,e / Soru 4: a,b,d,e	
Ö-11	Soru 2: a,b,d,e	Soru 1: a,b,c	
Ö-12	Soru 2: a,b,d,e	Soru 1: a,b,c	
Bileşenleri Kullanan Öğrenci Sayıları	Tek Bir Şekilde Parçalar Arasındaki İlişkilere Odaklanma:11 a:11 / b:11 / c:0 / d:10 / e:7 / f:0	Ayrı Şekiller Arasındaki İlişkilere Odaklanma: 8 a:8 / b:8 / c:8 / d:4 / e:3 / f:1	Yeniden Yapılandırma: 3 a:3 / b:3/ c:2 / d:2 / e:1 / f:2

a: Geometrik şekillerin özelliklerini kullanma, b: Geometrik şekillerin özellikleri arasındaki ilişkileri belirleme, c: Geometrik şekillerin bazı ortak özelliklerinin karşılaştırılması, d: Bir geometrik şekildeki kuralları ve yapıları tanıma ve bütünleştirme, e: Bir geometrik şekilde yapılar oluşturma, f: Sayısal verilerden veya örneklerden yararlanarak akıl yürütme

Tablonun sonundaki "bileşenleri kullanan öğrenci sayıları" satırı toplamda kaç öğrencinin hangi düşünme biçimlerine odaklandıklarını ve bu kapsamda hangi eylemleri gerçekleştirdiklerini göstermektedir. Benzer tablolar diğer geometrik alışkanlıklar için de oluşturulmuş ve oluşturulan tablolardan yararlanılarak sonuçlar çıkartılmıştır. Böylece, matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin trigonometri konusu özelinde kullandıkları geometrik alışkanlıklar tanımlanmıştır.

Geçerlik ve Güvenirlik

Çalışmanın geçerlik ve güvenirliğini arttırmak amacıyla, öğrencilere uygulanan dört soru iki araştırmacı tarafından görüş birliğine varılarak tasarlanmıştır. Ayrıca veri analizi iki araştırmacı tarafından bağımsız olarak yapılmış, daha sonra bir araya gelinmiş ve yapılan analizler karşılaştırılarak uyum yüzdesi belirlenmiştir. Uyum yüzdesi belirlenirken Miles ve Huberman'ın (1994) güvenirlik formülü dikkate alınmıştır. Miles ve Huberman'a göre (1994) uyum yüzdesinin %70 ve üzerinde olması çalışmanın güvenirliği için geçerli bir orandır. Karşılaştırma sonucunda yapılan kodlamalar arasında yaklaşık %90 uyum olduğu saptanmıştır. Karşılaştırma yapılırken her bir öğrencinin kullandığı geometrik alışkanlıklar, bu alışkanlıklar kapsamında odaklandıkları düşünme biçimleri ve gerçekleştirdikleri eylemler tartışılmıştır. Farklı kodlamaların olduğu birkaç durumda, iki araştırmacı birlikte ilgili soru için öğrenci cevaplarını tematik çerçeveyi dikkate alarak tekrar incelemiş ve tartışarak kodlamalar üzerinde fikir birliğine varmışlardır. İlk analizin bitiminden yaklaşık bir ay sonra araştırmacılar tekrar bir araya gelerek yapılan analizin üstünden geçmişlerdir. Bu çerçevede araştırmacılar her bir soru için öğrenci cevaplarını ve bu cevaplara yönelik kodlamaları eş zamanlı olarak tekrar incelemişler, yapılan kodlamaları tematik çerçeve kapsamında gözden geçirmişlerdir. Bu aşamada yapılan analizde tüm kodlamalar üzerinde fikir birliğine varılmış ve nihai bulgular tanımlanmıştır.

Bulgular

Bulgular bölümünde, öğrencilerin trigonometri konusu özelinde kullandıkları geometrik alışkanlıklar, bu alışkanlıkları kullanırken odaklandıkları düşünme biçimleri ve bu düşünme biçimleri kapsamında gerçekleştirdikleri eylemler anlatılacaktır.

İlişki Kurarak Muhakeme Etme

Öğrencilerin ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığını kullanırken odaklandıkları düşünme biçimleri ve gerçekleştirdikleri eylemler Tablo 2'de verilmiştir. Çalışma kapsamında tüm öğrencilerin bu alışkanlığı kullandığı dikkat çekmiştir.

Tablo 2

Öğrencilerin Trigonometri Konusu Özelinde İlişki Kurarak Muhakeme Etme Alışkanlığını Kullanımları

Kullanılan Geometrik Alışkanlık	Odaklanılan Düşünme Biçimleri	Gerçekleştirilen Eylemler
İlişki Kurarak Muhakeme Etme (Tüm Öğrenciler)	Tek Bir Şekildeki Parçalar Arasındaki İlişkilere Odaklanma (Ö-10 hariç hepsi)	▪ Geometrik şekillerin özelliklerini kullanma (Ö-10 hariç hepsi) ▪ Geometrik şekillerin özellikleri arasındaki ilişkileri belirleme (Ö-10 hariç hepsi) ▪ Bir geometrik şekildeki kuralları ve yapıları tanıma ve bütünleştirme (Ö-6 ve Ö-10 hariç hepsi) ▪ Bir geometrik şekilde yapılar oluşturma (Ö-2, Ö-3, Ö-4, Ö-5, Ö-8, Ö-11, Ö-12)
	Ayrı Şekiller Arasındaki İlişkilere Odaklanma (Ö-1, Ö-2, Ö-4, Ö-8, Ö-9, Ö-10, Ö-11, Ö-12)	▪ Geometrik şekillerin özelliklerini kullanma (Ö-1, Ö-2, Ö-4, Ö-8, Ö-9, Ö-10, Ö-11, Ö-12) ▪ Geometrik şekillerin özellikleri arasındaki ilişkileri belirleme (Ö-1, Ö-2, Ö-4, Ö-8, Ö-9, Ö-10, Ö-11, Ö-12) ▪ Geometrik şekillerin bazı ortak özelliklerinin karşılaştırılması (Ö-1, Ö-2, Ö-4, Ö-8, Ö-9, Ö-10, Ö-11, Ö-12) ▪ Bir geometrik şekildeki kuralları ve yapıları tanıma ve bütünleştirme (Ö-1, Ö-2, Ö-9, Ö-10) ▪ Bir geometrik şekilde yapılar oluşturma (Ö-1, Ö-2, Ö-10) ▪ **Sayısal verilerden veya örneklerden yararlanarak akıl yürütme (Ö-2)**
	Yeniden Yapılandırma (Ö-1, Ö-3, Ö-5)	▪ **Geometrik şekillerin özelliklerini kullanma (Ö-1, Ö-3, Ö-5)** ▪ **Geometrik şekillerin özellikleri arasındaki ilişkileri belirleme (Ö-1, Ö-3, Ö-5)** ▪ **Geometrik şekillerin bazı ortak özelliklerinin karşılaştırılması (Ö-3, Ö-5)** ▪ **Sayısal verilerden veya örneklerden yararlanarak akıl yürütme (Ö-1, Ö-5)** ▪ **Bir geometrik şekildeki kuralları ve yapıları tanıma ve bütünleştirme (Ö-3, Ö-5)** ▪ **Bir geometrik şekilde yapılar oluşturma (Ö-3)**

Tablo 2'de görüldüğü gibi, öğrenciler bu alışkanlık kapsamında, tek bir şekildeki parçalar arasındaki ilişkilere ve ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklanmanın yanı sıra bu çalışma özelinde şekli yeniden yapılandırarak geometrik ilişkilere odaklanmışlardır. Ö-10 haricindeki on bir öğrencinin tek bir şekildeki parçalar arasındaki ilişkilere odaklandıkları, sekiz öğrencinin ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklandıkları ve üç öğrencinin de şekli yeniden yapılandırdıkları ortaya çıkmıştır. Buradan hareketle öğrencilerin daha çok tek bir şekildeki parçalar arasındaki ilişkilere odaklandıkları, en az da şekilleri yeniden yapılandırdıkları belirlenmiştir. Ö-1, Ö-3 ve Ö-5 olmak üzere üç öğrencinin sadece ilk soruyu çözerken şekli yeniden yapılandırdıkları dikkat çekmiştir. Bu öğrencilerin uygulanan dönüşüm sonucunda oluşacak yeni şekli, ilk şekil üzerinde oluşturdukları ve bu iki şekil arasındaki ilişkilere odaklandıkları görülmüştür. Geometrik şekilleri yeniden yapılandıran öğrencilerin ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklanan öğrenciler ile aynı eylemleri gerçekleştirdikleri göze çarpmıştır. Bu kapsamda üç öğrenciden tümünün geometrik şekillerin özelliklerini kullandıkları ve özellikler arasındaki ilişkileri belirledikleri ortaya çıkmıştır. Ö-3 ve Ö-5 olmak üzere iki öğrencinin geometrik şekillerin bazı ortak özelliklerini karşılaştırdıkları ve geometrik şekillerdeki kuralları ve yapıları tanıyarak bütünleştirdikleri görülmüştür. Ayrıca sadece Ö-3'ün geometrik şekilde yapılar oluşturduğu dikkat çekmiştir. İki öğrencinin (Ö-1, Ö-5) ise sayısal verilerden veya örneklerden yararlandığı göze çarpmıştır. Sayısal verilerden veya örneklerden yararlanma eylemi bu çalışma özelinde ortaya çıkmış bir eylemdir. Şekli yeniden yapılandıran öğrencilerin gerçekleştirdikleri eylemlere genel olarak bakıldığında; daha çok geometrik şekillerin özelliklerini kullanma ve birbiri ile ilişkilendirme eğiliminde oldukları en az ise şekilde yapılar oluşturmaya yönlendikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Şekli yeniden yapılandıran öğrencilerin gerçekleştirdikleri eylemlere örnek olarak Ö-5'in birinci soruya vermiş olduğu cevap Şekil 7'de verilmiştir. Öğrencinin yeniden yapılandırma kapsamında bir dik üçgenin herhangi bir dar açısının arttırılması sonucunda oluşacak olan yeni şekli, şeklin ilk hali üzerinde bazı değişiklikler yaparak yeniden oluşturduğu ve böylece sabit kalan ve değişen durumları bütünleştirerek gösterdiği görülmektedir. Bu düşünme biçimi, tek bir dik üçgen çizip bu üçgendeki ilişkilere odaklanarak oluşacak yeni şekli çizmeden tahmin etmeyi içeren "tek bir şekildeki parçalar arasındaki ilişkilere odaklanma" düşünme biçiminden ve dar açıları farklı olan iki ayrı dik üçgen çizip bu üçgenler arasındaki ilişkilere odaklanarak değişen veya sabit kalan durumları kıyaslayarak belirlemeyi içeren "ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklanma" düşünme biçiminden ayrılmaktadır. Öğrenci dik üçgeni bir dar açısını arttırmak amacıyla yeniden yapılandırırken, açı-kenar özelliklerini birbiriyle ilişkilendirerek oluşacak yeni üçgeni belirlemiş ve bu iki durumu tek bir şekilde bütünleştirmiştir. Böylece söz konusu iki durum arasındaki benzer/farklı noktalara odaklanarak dik üçgenin bir dar açısının arttırılması ile kenarlarda, açılarda ve trigonometrik oranlarda meydana gelecek değişimleri açıklamıştır. Yeniden yapılandırma yaparken Ö-5'in dik üçgenin bir dar açısını arttırırken, diğer dar açısını azalttığı ve bu esnada dik açıyı değiştirmediği göze çarpmaktadır. Öğrencinin, arttırdığı açının karşısındaki kenarın uzunluğunu da arttırdığı, azalttığı açının karşısındaki kenarın uzunluğunu da azalttığı ve hipotenüs uzunluğunu değiştirmediği görülmektedir. Ek olarak öğrenci hipotenüs uzunluğunun dik kenarlara bağlı olması sebebiyle değişmeyeceğini ifade etmiştir. Öğrencinin bu açıklamaları yaparken açılar ve kenarlardaki değişimleri ve bunların ilişkisini birbiri ile orantısal olarak düşünüp yorumladığı göze çarpmaktadır.

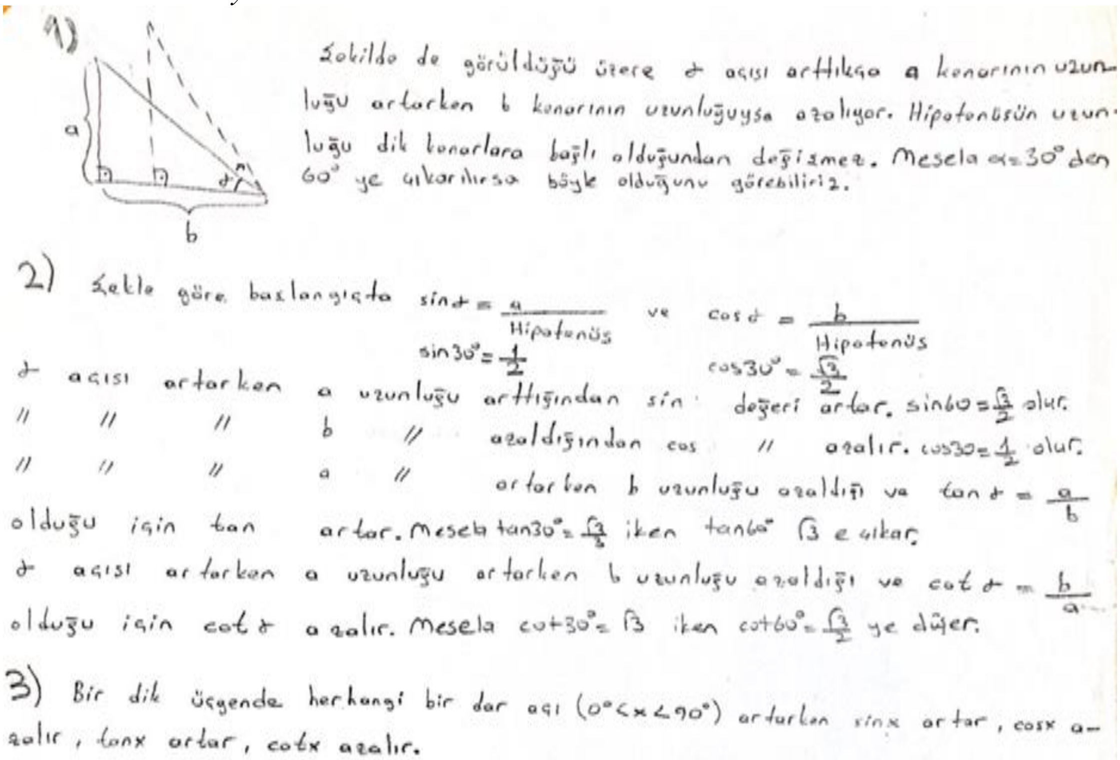
Ö-5, açının arttırılmasıyla trigonometrik oranlarda meydana gelecek değişimleri belirlerken iki farklı strateji kullanarak cevabını desteklemiştir. Bu kapsamda hem çeşitli kuralları ve özellikleri ilişkilendirerek genelleme yapmış, hem de sayısal verilerden veya örnekler üzerinden akıl yürütmüştür. Sayısal verilerden veya örneklerden yararlanarak akıl yürütme, bu çalışma özelinde ortaya çıkmış bir eylemdir. Ö-5 cevabında, açı/kenar bilgisine sahip olduğu ve özel bir üçgen olan 30˚-60˚-90˚ üçgenini kullanmıştır. Öğrenci, açı 30˚ den 60˚ye çıkarıldığında açı ve kenarlardaki değişimlerin doğrudan görülebileceğini ifade etmiştir. Ayrıca sinüs, cosinüs, tanjant, cotanjant trigonometrik oranlarının 30˚ ve 60˚ için değerlerini yazmış ve bu değerleri kıyaslayarak trigonometrik oranların nasıl değiştiğini bu açılar özelindeki örneklerle destekleyerek açıklamıştır.

Öğrenci izlediği diğer stratejide ise sinüs, cosinüs, tanjant ve cotanjant trigonometrik oranlarını dik üçgenin kenar uzunlukları kullanarak yazmıştır. Bu oranlar ile dik üçgenin kenarlarındaki değişimler ve bölme işleminin özelliklerini ilişkilendirmiştir. Burada Ö-5'in farklı kuralları tanıyıp bütünleştirerek, bir dik üçgenin dar açılarından biri arttırıldığında trigonometrik oranlarının nasıl değişeceği konusunda genelleme yaptığı görülmektedir. Bu durum öğrencinin genelleme yaparken ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığını da kullandığını göstermektedir. Öte yandan öğrenci, dik üçgenin bir dar açısının arttırılması sonucunda açılarda, kenarlarda ve trigonometrik oranlarda meydana gelecek değişimler hakkında tüm bu çıkarımları yaparken, çizmiş olduğu ilk dik üçgen ile

MSKU Eğitim Fakültesi Dergisi MSKU Journal of Education
ISSN 2148-6999 Cilt- Volume 9, Sayı- Number 2, (2022) Kasım-November

yapılandırılmış hali arasındaki açı-kenar ve trigonometrik oran özellikleri gibi bazı ortak özellikleri de karşılaştırmıştır.

Şekil 7
Ö-5'in Birinci Soruya Cevabı

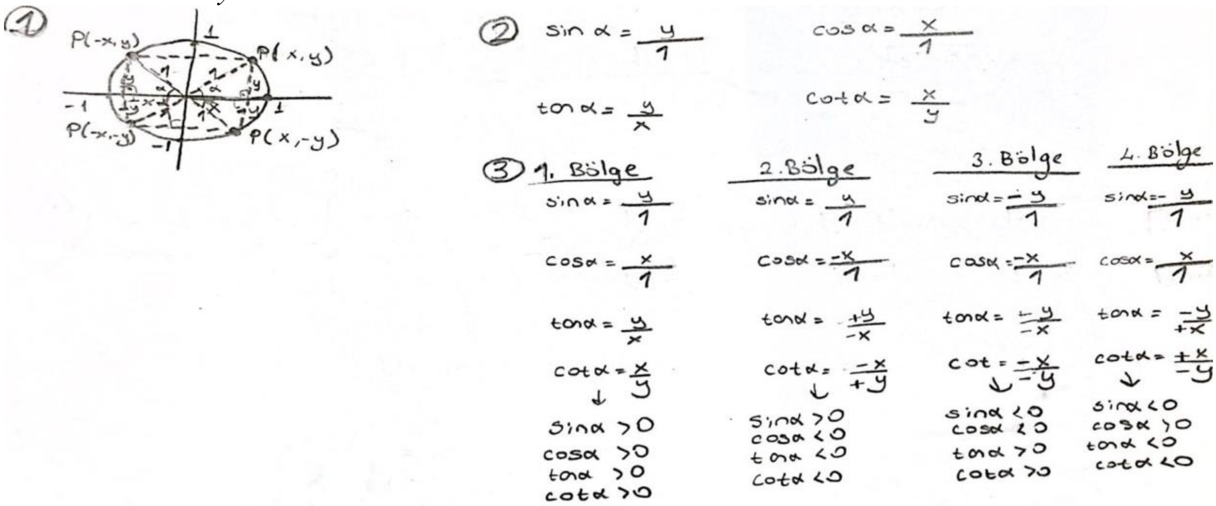


Çalışma kapsamında Ö-10 haricindeki on bir öğrencinin tek bir şekildeki parçalar arasındaki ilişkilere odaklandıkları görülmüştür. Bu öğrencilerden tümü geometrik şekillerin özelliklerini kullanmış ve birbiri ile ilişkilendirmiştir. On öğrencinin (Ö-6 ve Ö-10 hariç) geometrik şekildeki kuralları ve yapıları kullanıp bütünleştirdiği dikkat çekmiştir. Yedi öğrencinin ise geometrik şekilde yapılar oluşturduğu ortaya çıkmıştır (bkz. Tablo 2).

Tek bir şekildeki parçalar arasındaki ilişkilere odaklanan öğrencilerin gerçekleştirdikleri eylemlere örnek olarak Ö-8'in, ikinci soruya verdiği cevap Şekil 8'de yer almaktadır.) Öğrencinin cevabında, trigonometrik oranları ve bunların birim çemberin bölgelerine göre işaretlerini belirlerken tek bir birim çember üzerinde düşündüğü görülmektedir. Bu kapsamda öğrenci, birim çemberin her bölgesinde oluşturduğu α˚lik açıların bitim noktalarından eksenlere dikmeler inerek dik üçgenler ele almıştır. Böylece öğrenci birim çember içerisinde dik üçgen yapıları oluşturmuştur. Oluşturduğu dik üçgenlerin kenarlarını, dik koordinat düzleminin ve birim çemberin özelliklerini kullanarak belirlemiştir. Ö-8, oluşan dik üçgenlerde sinüs, cosinüs tanjant ve cotanjant trigonometrik oranlarını bu dik üçgenin kenarlarını kullanarak yazmıştır. Burada öğrencinin, trigonometrik oranların herhangi bir dik üçgenin kenarları kullanılarak nasıl yazıldığı ile ilgili özellikleri, oluşturduğu dik üçgende uyguladığı söylenebilir. Bunu yaparken, aynı zamanda dik koordinat düzlemindeki herhangi bir noktanın özelliklerini ve birim çemberin yarıçapının 1 br olmasını da kullanarak üç özelliği ilişkilendirmiştir. Ardından, dik üçgenlerin kenarlarını kullanarak yazmış olduğu trigonometrik oranları ve bölme işleminin, birim çemberin ve dik koordinat sisteminin özelliklerini birlikte düşünerek, trigonometrik oranların birim çemberin bölgelerine göre işaretlerini belirlemiştir. Yani pek çok farklı kuralın varlığını tanımış ve bunları bütünleştirerek kullanmıştır.

Şekil 8

Ö-8'in İkinci Soruya Cevabı



Çalışma çerçevesinde sekiz öğrencinin ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığını kullanırken ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklandıkları belirlenmiştir (bkz. Tablo 2). Ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklanan öğrencilerin tek bir şekildeki parçalar arasındaki ilişkilere odaklanan öğrenciler ile bazı ortak eylemler gerçekleştirdikleri dikkat çekmiştir. Bu ortak eylemler geometrik şekillerin özelliklerini kullanma ve birbiri ile ilişkilendirme, geometrik şekildeki kuralları ve yapıları tanıyarak bütünleştirme ve geometrik şekilde yapılar oluşturmadır. Ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklanan öğrencilerin tamamı geometrik şekillerin özelliklerini kullanmış, bunları birbiri ile ilişkilendirmiş ve geometrik şekillerin bazı ortak özelliklerini karşılaştırmışlardır. Ö-1, Ö-2, Ö-9 ve Ö-10 olmak üzere yarısı geometrik şekildeki kuralları ve yapıları tanıyarak bütünleştirmişlerdir. Üç öğrenci ise (Ö-1, Ö-2 ve Ö-10) geometrik şekilde yapılar oluşturmuşlardır. Sadece bir öğrenci de (Ö-2) sayısal verilerden veya örneklerden yararlanmıştır. Ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklanan öğrencilerin en az gerçekleştirdikleri eylemin bu eylem olduğu dikkat çekmiştir.

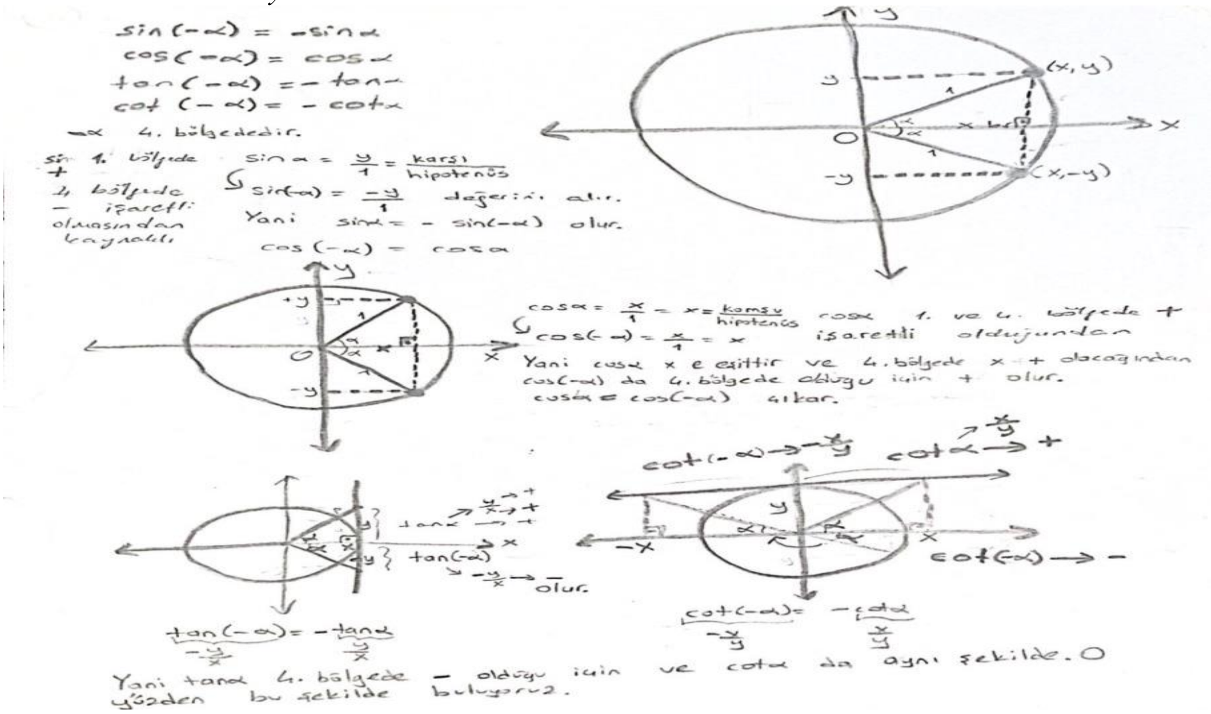
Ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklanan öğrencilerin gerçekleştirdikleri eylemlere örnek olarak Ö-1'in dördüncü soruya verdiği cevap Şekil 9'da verilmiştir. Ö-1'in cevabında biri pozitif diğeri negatif yönde olan aynı açı ölçüsüne sahip iki açının trigonometrik oranları arasındaki ilişkiyi gerekçelendirmek amacıyla her bir trigonometrik oran için ayrı birim çemberler çizdiği görülmektedir. Bu durum ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığı çerçevesinde öğrencinin ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklandığını göstermiştir.

Öğrenci, çizmiş olduğu birim çemberler üzerinde pozitif ve negatif yönde aynı açı ölçüsüne sahip iki açı ele almış ve bu açıların bitim noktalarının koordinatlarını belirlemiştir. Bu noktalardan eksenlere dikmeler inerek farklı dik üçgenler oluşturmuştur. Burada öğrencinin birim çember içerisinde yapılar oluşturduğu ve bu yapılar üzerinden çıkarımlarda bulunduğu görülmektedir. Öğrenci oluşturduğu dik üçgenlerin kenarlarını, dik koordinat düzlemindeki bir noktanın özelliklerini ve birim çemberin yarıçapının 1 br olması gibi özellikleri kullanarak belirlemiştir. Daha sonra bu özellikleri birbiri ile ilişkilendirerek söz konusu trigonometrik oranları dik üçgenin kenarlarını kullanarak yazmıştır. Öte yandan öğrenci, trigonometrik oranları yazarken, oluşturduğu dik üçgenler için bu ortak özellikleri kıyaslayarak kullanmıştır. Ardından bulduğu trigonometrik oranları da karşılaştırarak aynı açı ölçüsüne sahip zıt yönlü iki açının trigonometrik oranları arasındaki ilişkiye ulaşmıştır. Ayrıca öğrenci ulaşmış olduğu bu ilişkiyi, trigonometrik oranlarının birim çemberin bölgelerine göre işaretleri ile birlikte düşünerek de açıklamıştır. Tüm bunlar dikkate alındığında, öğrencinin soruyu çözerken trigonometrik oran, birim çember, dik koordinat düzlemi ile ilgili pek çok kuralı tanıyıp bütünleştirerek kullandığı göze çarpmaktadır.

İlişkilerle muhakeme etme alışkanlığının kullanımına genel olarak bakıldığında, öğrencilerin bu alışkanlığı kullanırken odaklandıkları bu üç farklı düşünme biçimi çerçevesinde benzer eylemleri gerçekleştirdikleri sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca, yapılan çalışmada öğrencilerin en çok gerçekleştirdikleri ortak eylemlerin geometrik şekillerin özelliklerini kullanma ve bu özellikler arasındaki ilişkileri belirleme olduğu görülmüştür.

Şekil 9

Ö-1'in Dördüncü Soruya Cevabı



Geometrik Fikirlerin Genelleştirilmesi

Öğrencilerin geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığını kullanırken odaklandıkları düşünme biçimleri ve gerçekleştirdikleri eylemler Tablo 3'te verilmiştir. Tablo 3'de görüldüğü gibi, çalışma sonucunda Ö-3 ve Ö-6 haricindeki on öğrencinin "Geometrik Fikirlerin Genelleştirilmesi" alışkanlığını kullandığı ortaya çıkmıştır. Buradan hareketle, öğrencilerin geometrik problemleri çözerken bu alışkanlığa sıklıkla başvurdukları söylenebilir.

Tablo 3

Öğrencilerin Trigonometri Konusu Özelinde Geometrik Fikirlerin Genelleştirilmesi Alışkanlığını Kullanımları

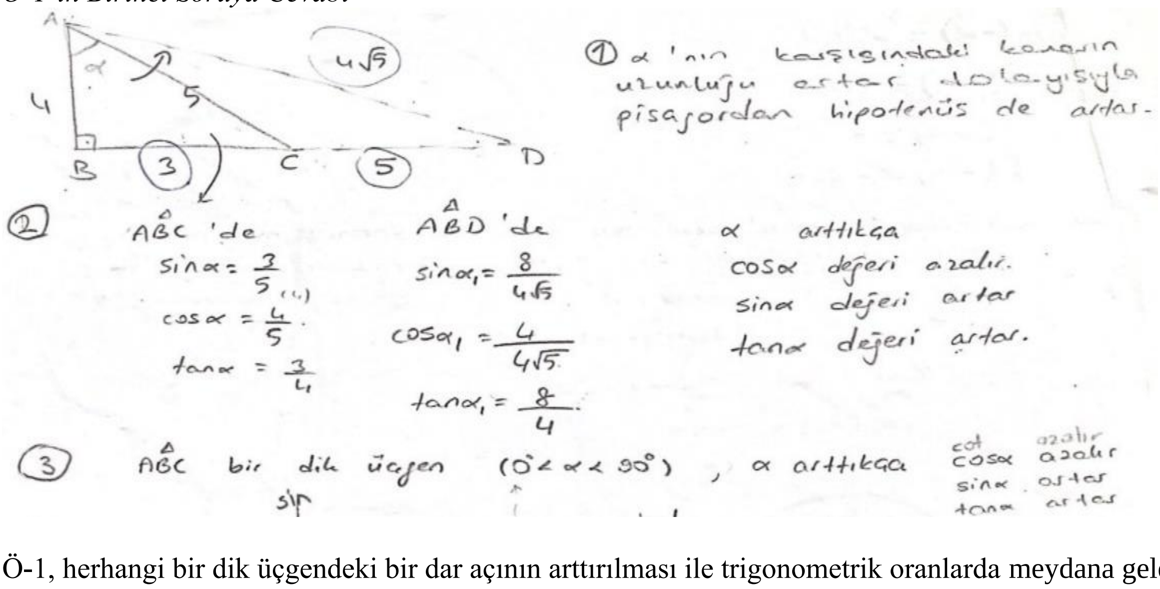
Kullanılan Geometrik Alışkanlık	Odaklanılan Düşünme Biçimleri	Gerçekleştirilen Eylemler
Geometrik Fikirlerin Genelleştirilmesi (Ö-3 ve Ö-6 hariç hepsi)	Verilen bir nesne kümesinin ele alınmasından, verileni içeren daha büyük bir kümenin ele alınmasına geçme (Ö-2)	Geometrik bir şeklin bir özelliğinin her zaman veya şeklin ait olduğu kümenin tamamında geçerli olup olmadığını anlama (Ö-2)
	Varsayılan basitleştirici koşulları kullanarak çözüm arama (Ö-3 ve Ö-6 hariç hepsi)	▪ **Verilen problemi şekil çizerek görselleştirme ve şekil üzerinde düşünme (Ö-3 ve Ö-6 hariç hepsi)** ▪ **Sayısal verilerden veya örneklerden yararlanarak akıl yürütme (Ö-1 ve Ö-2)**
	Bilinen durumlardan veya bilinen çözümlerden yararlanarak çözüm arama (Ö-3, Ö-6 ve Ö-7 hariç hepsi)	▪ Problem durumunu açıklamak için özel durumları veya kuralları/formülleri kullanarak genelleme yapmaya çalışma (Ö-3, Ö-6 ve Ö-7 hariç hepsi)
	Genel kurallar arama (Ö-3 ve Ö-6 hariç hepsi)	▪ Geometrik bir şekil sınıfı için evrensel bir kural koyma (Ö-3 ve Ö-6 hariç hepsi) ▪ Tüm çözüm kümelerini görme ve neden olduğunu veya olmadığını açıklama (Ö-2) ▪ Problemdeki verilere dayanarak tüm olası durumları düşünme (Ö-2)

Öğrencilerin bu alışkanlığı kullanırken dört düşünme biçimine odaklandıkları görülmüştür. Bu kapsamda bu alışkanlığı kullanan on öğrencinin tamamı varsayılan basitleştirici koşulları kullanmaya ve genel kurallar aramaya yoğunlaşmışlardır. On öğrenciden Ö-7 haricindeki dokuzu bilinen durumlardan veya bilinen çözümlerden yararlanmaya odaklanmışlardır. Sadece Ö-2 ise verilen bir nesne kümesinden hareketle verileni içeren daha büyük bir kümeyi ele almıştır. Bu noktada öğrencilerin geometrik fikirlerini genelleştirirken daha çok varsayılan basitleştirici koşulları kullanma ve genel kurallar arama eğiliminde oldukları dikkat çekmiştir. Varsayılan basitleştirici koşulları kullanan öğrencilerin tamamı problemi şekil çizerek görselleştirmiş ve bu şekil üzerinde düşünmüşlerdir. Bunlara ek olarak, sadece Ö-1 ve Ö-2 sayısal veriler veya örneklerden yararlanmışlardır. Söz konusu iki eylem bu çalışma özelinde öğrencilerin geometrik fikirlerini genelleştirme sürecinde gerçekleştirdikleri eylemlerdir. Bilinen durumlardan veya bilinen çözümlerden yararlanarak çözüm arayan öğrencilerin tümü özel üçgenler gibi özel durumları veya kuralları/formülleri kullanarak genelleme yapmaya çalışmışlardır. Genel kurallar arayan öğrencilerin tamamı geometrik bir şekil sınıfı için evrensel bir kural ortaya koymaya çalışmışlardır. Bu öğrencilerden Ö-2 bu eyleme ek olarak tüm olası durumları düşünmüş, tüm çözüm kümelerini görmüş ve neden olup olmadığını açıklamıştır. Ayrıca geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığını kullanırken sadece Ö-2 geometrik bir şeklin bir özelliğinin her zaman veya şeklin ait olduğu kümenin tamamında geçerli olup olmadığını anlamaya çalışmıştır.

Çalışma kapsamında geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığını kullanan tüm öğrenciler genellemeye varma sürecinde, geometrik şeklin özellikleri veya çeşitli kural ve yapıları ilişkilendirmiş ve değişen-değişmeyen unsurları belirlemişlerdir. Bu alışkanlığı kullanan öğrencilerin dokuzunun tüm çözüm kümeleri ile olası durumlara ve neden olduğu veya olmadığına değinmeden genel kural ortaya koydukları dikkat çekmiştir. Bu öğrencilerin bilinen durumlar, kurallar, özellikler hakkındaki ön bilgilerinden yararlanarak bir kural yazdıkları ama bu kurala ulaşma sürecini veya bu kuralın neden istenilen durumda her zaman geçerli olacağını açıklamadıkları görülmüştür. Bu dokuz öğrenciden biri olan Ö-1'in birinci soruya verdiği cevap Şekil 10'da gösterilmektedir. Bu öğrencinin cevabında hem varsayılan basitleştirici koşulları kullanma, hem bilinen durumlardan veya bilinen çözümlerden yararlanma hem de genel kurallar ortaya koyma olmak üzere üç düşünme biçimine de örnekler sunduğu göze çarpmıştır.

Şekil 10

Ö-1'in Birinci Soruya Cevabı

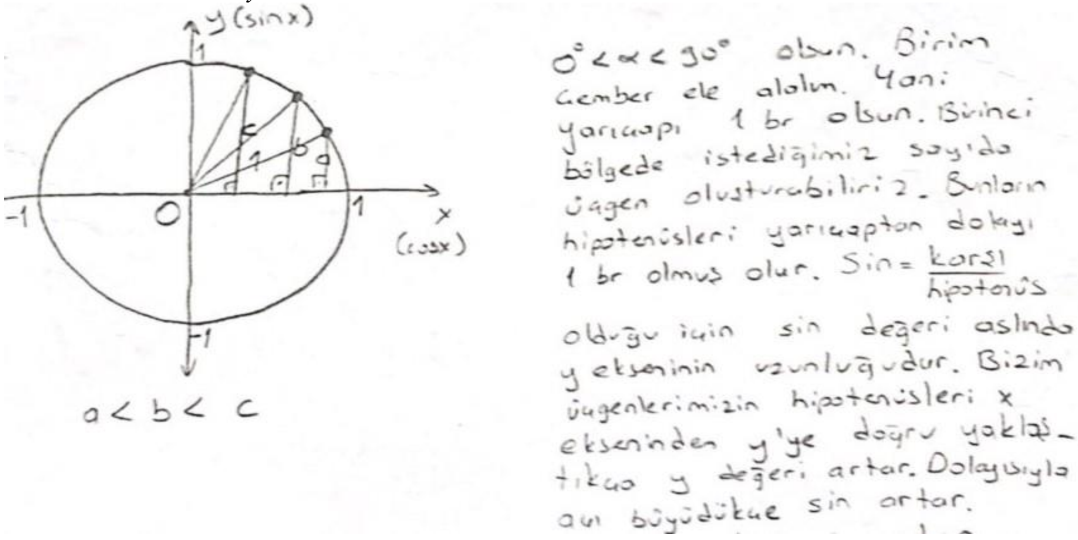


Ö-1, herhangi bir dik üçgendeki bir dar açının arttırılması ile trigonometrik oranlarda meydana gelecek değişimler ile ilgili fikirlerini genelleştirmek için öncelikle değişen ve değişmeyen açı ve kenarları göz önünde bulundurarak yeniden yapılandırılmış bir şekil oluşturmuştur. Öğrencinin oluşturmuş olduğu şekli, fikirlerini genelleştirmek amacıyla bir araç olarak kullandığı düşünülmektedir. Bu noktada öğrencinin soruyu şekil çizerek görselleştirdiği ve bu şekil üzerinde düşünerek trigonometrik oranların değişimi ile ilgili genellemelere vardığı söylenebilir. Bu kapsamda öğrenci oluşturduğu dik üçgenlerin kenarlarına örnek sayısal değerler vermiş ve bu sayısal değerleri sinüs, cosinüs ve tanjant trigonometrik oranlarını yazarken kullanmıştır. Burada öğrencinin bu çalışma özelinde, bir şekli yeniden yapılandırarak bu şekil üzerinde düşünme ve örnek sayısal verilerden yararlanma gibi

MSKU Eğitim Fakültesi Dergisi MSKU Journal of Education
ISSN 2148-6999 Cilt- Volume 9, Sayı- Number 2, (2022) Kasım-November

basitleştirici koşullara odaklandığı görülmektedir. Ayrıca öğrencinin oluşturduğu dik üçgenlerin kenarlarına sayısal değerler verirken 3-4-5 özel üçgenini kullandığı yani bilindik durumları ele aldığı da göze çarpmaktadır.
Öğrenci iki farklı açı ölçüsü alıp, dik üçgenlerin kenarlarına vermiş olduğu sayısal değerleri kullanarak bu açı ölçülerine karşılık gelen trigonometrik oranları karşılaştırmıştır. Böylece herhangi bir dik üçgendeki bir dar açının arttırılması sonucunda trigonometrik oranlarda meydana gelecek değişimler ile ilgili genel bir kural ortaya koymuştur. Bu süreçte iki farklı açıya karşılık gelen trigonometrik oranlar arasında ilişki kurmuş ve yeniden yapılandırdığı şekilde değişen ve değişmeyenleri göz önünde bulundurmuştur. Ayrıca, özellik veya kuralları kullanma gibi bilindik stratejileri de kullanmıştır. Buradan hareketle, öğrencinin fikirlerini genelleştirirken ilişki kurarak muhakeme etme ve değişmeyenlerin incelenmesi geometrik alışkanlıklarından da yararlandığı dikkat çekmektedir.
Ö-1'in birinci soruya vermiş olduğu cevap incelendiğinde, sadece tek bir sayısal değer verme işleminden sonra genel bir kural ortaya koyduğu, oluşabilecek tüm durumları ve dolayısıyla kuralın her zaman geçerli olup olmayacağını incelemediği görülmektedir. Öte yandan öğrencinin diğer sorularda da benzer bir yaklaşım izlediği ortaya çıkmıştır. Bu ise Ö-1'in bu çalışmada yer alan sorular özelinde geometrik fikirlerini genelleştirme alışkanlığını yeterli düzeyde kullanamadığını göstermektedir. Çalışma kapsamında bu durumun Ö-2 haricindeki diğer öğrenciler için de geçerli olduğu belirlenmiştir.
Yukarıda belirtildiği gibi, çalışma kapsamında sadece Ö-2 birinci soruya cevabında (bkz. Şekil 11), bir nesne kümesinden hareketle daha büyük bir nesne kümesini ele almaya odaklanmıştır. Bu öğrenci diğer düşünme biçimlerine ek olarak birden fazla durumu eş zamanlı düşünerek genelleme yapmıştır. Bu noktada Ö-2, birim çemberin birinci bölgesinde bir dik üçgen oluşturmuş ve bu üçgenin bir dar açısını arttırarak pek çok farklı dik üçgen oluşturulabileceğini ifade etmiştir. Sinüs trigonometrik oranının, dik koordinat düzleminin ve birim çemberin özelliklerini ilişkilendirerek sinüs oranının, birim çember üzerindeki noktanın y koordinatı olduğuna değinen öğrenci, oluşturduğu dik üçgenlerin hipotenüslerinin y eksenine yaklaşması durumunda noktanın y koordinatının değerinin büyümesinden dolayı sinüs oranının artacağını ifade etmiştir. Yani, öğrenci dik üçgendeki bir dar açının arttırılmasıyla sinüs oranının nasıl değişeceğini, oluşabilecek tüm dik üçgen durumlarını düşünerek genellemiş ve böylece ulaşmış olduğu genellemenin tüm dik üçgenlerde geçerli olacağı fikrini desteklemiştir. Burada Ö-2'nin, diğer öğrencilerden farklı olarak genel kuralın neden her zaman geçerli olacağını açıkladığı dikkat çekmektedir. Ek olarak, Ö-2'nin de tüm öğrenciler gibi, fikirlerini genelleştirme sürecinde ilişki kurarak muhakeme etme ve değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlıklarını kullandığı göze çarpmaktadır. Bu kapsamda Ö-2 genellemeye varmak için, sinüs oranı ve birim çember ile ilgili özellikleri kullanıp ilişkilendirmiş ve şeklin içinde farklı dik üçgen yapıları oluşturmuştur Ayrıca, birim çemberin birinci bölgesinde bir dar açının sürekli olarak arttırılması sonucunda meydana gelecek değişimleri veya oluşturduğu üçgenlerin hipotenüslerinin hep 1 br kalması gibi sabit kalan özellikleri göz önünde bulundurmuştur.

Şekil 11
Ö-2'nin Birinci Soruya Cevabının Bir Bölümü



Geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığına genel olarak bakıldığında, bu alışkanlığı kullanan Ö-2 haricindeki dokuz öğrencinin sorulan sorular kapsamında gelişmiş bir genelleme yapamadıkları, sadece Ö-2'nin gelişmiş düzeyde genelleme yapabildiğine dair kanıtlar sunduğu dikkat çekmiştir. Ayrıca geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığını kullanan tüm öğrencilerin genelleme sürecinde ilişki kurarak muhakeme etme ve değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlıklarından da yararlandıkları göze çarpmıştır.

Değişmeyenlerin İncelenmesi

Öğrencilerin değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını kullanırken odaklandıkları düşünme biçimleri ve gerçekleştirdikleri eylemler Tablo 4'te verilmiştir. Tablo 4'te görüldüğü gibi, değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığının, ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığı gibi tüm öğrenciler tarafından kullanıldığı görülmüştür.

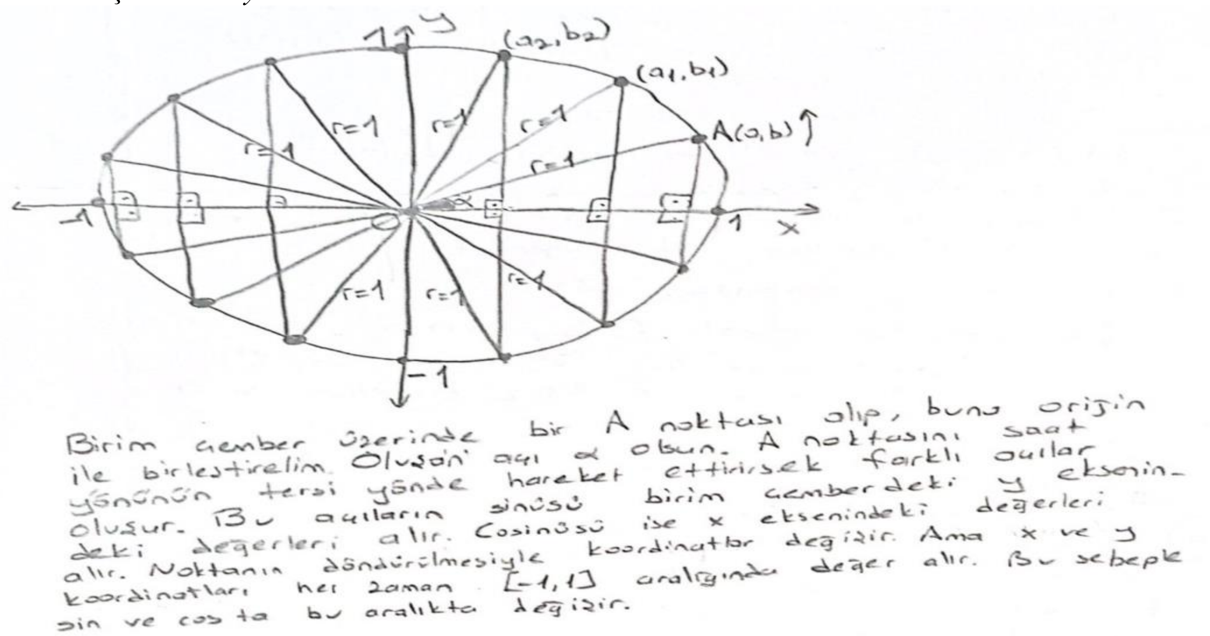
Tablo 4

Öğrencilerin Trigonometri Konusu Özelinde Değişmeyenlerin İncelenmesi Alışkanlığını Kullanımları

Kullanılan Geometrik Alışkanlık	Odaklanılan Düşünme Biçimleri	Gerçekleştirilen Eylemler
Değişmeyenlerin İncelenmesi (Tüm öğrenciler)	Dinamik Düşünme (Tüm öğrenciler)	▪ Bir noktanın veya şeklin sürekli hareketinin etkilerini düşünme ve bir nokta ile diğeri arasındaki yeni oluşumu tahmin etme (Tüm öğrenciler) ▪ Geometrik bir şekil veya nokta herhangi bir dönüşüme tabi tutulduğunda veya şekil belirli bir oranda büyütüldüğünde/küçültüldüğünde, şeklin hangi özelliklerinin sabit kaldığını, hangi özelliklerinin değiştiğini belirleme (Ö-6 hariç hepsi) ▪ Statik bir durum hakkında dinamik düşünme (Ö-1, Ö-2, Ö-4, Ö-5, Ö-8, Ö-10, Ö-11, Ö-12)
	Etkilerin Kanıtlarını Kontrol Etme (Tüm öğrenciler)	▪ Uygulanan bir dönüşümde değişenleri belirleme (Tüm öğrenciler) ▪ Uygulanan bir dönüşümde değişmeyenleri belirleme (Ö-6 hariç hepsi) ▪ Uygulanan bir dönüşümde değişenlerin neden değiştiğini açıklama (Ö-6 hariç hepsi) ▪ Uygulanan bir dönüşümde değişmeyenlerin neden değişmediğini açıklama (Ö-6 ve Ö-7 hariç hepsi)

Bu alışkanlığı kullanırken öğrencilerin tamamı dinamik düşünme ve etkilerin kanıtlarını kontrol etme olmak üzere iki düşünme biçimine odaklanmışlar ve bu kapsamda farklı eylemler gerçekleştirmişlerdir. Tüm öğrencilerin bu alışkanlığı kullanırken dinamik düşünmeye ve etkilerin kanıtlarını kontrol etmeye odaklandıkları görülmüştür. Dinamik düşünen öğrencilerin tamamı bir noktanın veya şeklin sürekli hareketinin etkilerini düşünüp yeni oluşumu tahmin ederken; Ö-6 haricindeki on bir öğrenci, geometrik bir şekil herhangi bir dönüşüme uğradığında veya belirli bir oranda büyütüldüğünde/küçültüldüğünde değişenleri ve değişmeyenleri belirlemiştir. Öğrencilerin çoğu (sekiz öğrenci) ise statik durumlar üzerinde dinamik düşünmüşlerdir. Burada, öğrencilerin daha çok sürekli hareketin etkilerine yani bu hareketin şekilde neleri değiştirip değiştirmeyeceğine ve bu hareket sonucunda oluşacak yeni şekli hayal etmeye yoğunlaştıkları görülmüştür. Etkilerin kanıtlarını kontrol etme çerçevesinde ise on iki öğrencinin tamamının değişenleri belirlediği ortaya çıkmıştır. Ö-6 haricindeki on bir öğrencinin değişmeyenleri belirlediği ve değişenlerin neden değiştiğini açıkladığı dikkat çekmiştir. Ö-6 ve Ö-7 haricindeki on öğrencinin ise değişmeyenlerin neden değişmediğini açıkladığı göze çarpmıştır. Ayrıca bu alışkanlığı kullanan tüm öğrencilerin aynı zamanda ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığından da yararlandığı ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığına yönelik kullanımlarına örnek olarak bir noktanın veya şeklin sürekli hareketini düşünen öğrencilerden biri olan Ö-3'ün üçüncü soruya vermiş olduğu cevap Şekil 12'de verilmiştir.

Şekil 12
Ö-3'ün Üçüncü Soruya Cevabı



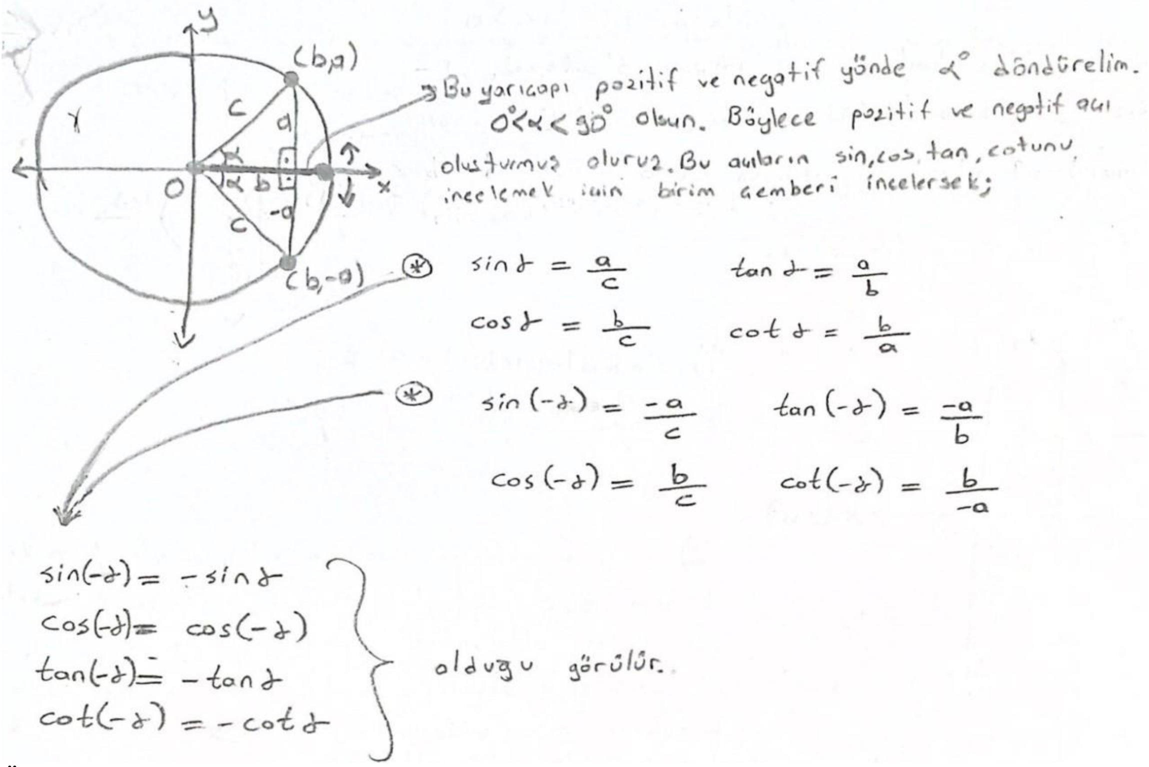
Şekil 12'de Ö-3'ün herhangi bir açının sinüs ve cosinüs trigonometrik oranlarının [-1, 1] aralığında değerler almasını gerekçelendirirken, birim çember üzerinde aldığı bir noktanın saat yönünün tersi yönde sürekli hareketini göz önünde bulundurduğu görülmektedir. Öğrenci bu noktayı orijinle birleştirerek elde ettiği yarıçap ile x ekseni arasındaki dar açıyı α olarak isimlendirmiş ve noktanın sürekli hareketi sonucunda farklı açılar oluşacağını ifade etmiştir. Ayrıca bu noktalardan x eksenine dikmeler inerek farklı dik üçgenler elde etmiştir. Burada öğrencinin noktanın sürekli hareketinin etkilerini belirlediği görülmektedir.

Öğrencinin birim çember üzerindeki noktayı hareket ettirerek farklı dik üçgenler oluştursa da bu üçgenlerin hipotenüs uzunluklarını her zaman 1 br aldığı dikkat çekmektedir. Burada öğrencinin etkilerin kanıtlarını kontrol etme kapsamında değişmeyenleri belirlediği ve neden değişmediğini açıkladığı göze çarpmaktadır. Öğrenci oluşturduğu şekilde birim çember üzerinde almış olduğu noktanın hareketi ile oluşan noktaların koordinatlarının ve açıların değiştiğini göstermiştir. Ayrıca sinüs ve cosinüs oranının birim çember üzerindeki noktanın sırasıyla y ve x koordinatı olduğuna değinen öğrenci, noktanın hareketi sonucunda koordinatlarının değiştiğini ve dolayısıyla sinüs ve cosinüs oranlarının değerlerinin de bu koordinatlara bağlı olarak değişeceğini belirtmiştir. Burada öğrencinin etkilerin kanıtlarını kontrol ederken değişen durumları belirlediği ve neden değiştiğini açıkladığı görülmektedir. Sinüs ve cosinüs trigonometrik oranlarını, noktaların x ve y koordinatları ile ilişkilendiren Ö-3, birim çember üzerindeki bu koordinatların [-1,1] aralığında değerler aldığını ve bu sebeple de sinüs ve cosinüs oranlarının değerlerinin de bu aralıkta değişeceğini ifade etmiştir. Öğrencinin çözümü dikkate alındığında, değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını kullanırken ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığını da kullandığı göze çarpmaktadır. Bu kapsamda öğrenci değişen ve değişmeyenleri incelerken birim çember içerisinde farklı dik üçgen yapıları oluşturmuş, birim çemberin ve sinüs ve cosinüs trigonometrik oranlarının özelliklerini kullanmış, bu oranları noktaların koordinatları ile ilişkilendirmiştir. Çalışma kapsamında diğer tüm öğrencilerin de benzer şekilde değişmeyenleri incelerken ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığından yararlandıkları ortaya çıkmıştır.

Ö-5 ise dinamik düşünme kapsamında, hem statik bir durum hakkında dinamik düşünmüş hem de geometrik bir şekil veya nokta herhangi bir dönüşüme tabi tutulduğunda değişenleri ve değişmeyenleri belirlemiştir. Ö-5'in aynı açı ölçüsüne sahip pozitif ve negatif yönlü açıların trigonometrik oranlarının incelenmesinin istendiği dördüncü soruya verdiği cevap ise Şekil 13'te verilmiştir.

Şekil 13

Ö-5'in Dördüncü Soruya Cevabı



Öğrencinin cevabında birim çemberin başlangıç noktası (0,0) ve bitim noktası (1,0) olan yarıçapının orijin etrafında saat yönü ve saat yönünün tersi yönde α˚ döndürülmesi ile aynı açı ölçüsüne sahip pozitif ve negatif yönlü açılar oluşturduğu görülmektedir. Öğrenci bu açıların bitim noktalarının koordinatlarını belirlemiş ve bu noktalardan eksenlere dikmeler inerek iki dik üçgen oluşturmuştur. Burada öğrencinin eşit ölçüdeki zıt yönlü açıların trigonometrik oranlarının yorumlanması gibi statik bir durumu dinamik olarak görebildiği dikkat çekmektedir. Öğrenci belirttiği yarıçapın sürekli hareketine ve bunun etkilerine odaklanmak yerine, yarıçapı zıt yönlü iki açı oluşturmak amacıyla orijin etrafında pozitif ve negatif yöne α˚ kadar sadece iki defa döndürmüştür. Ayrıca öğrenci çizmiş olduğu şekilde, yarıçapı döndürerek oluşturduğu açıların bitim noktalarının koordinatlarındaki değişimi ve bu noktalar ile orijin arasındaki uzaklığın sabit kaldığını belirtmiştir. Yani yarıçapa uyguladığı dönme dönüşümü sonucunda değişen ve değişmeyen durumları saptamıştır.
Etkilerin kanıtlarını kontrol etme çerçevesinde ise öğrencinin çözümünde oluşturduğu dik üçgenlerin hipotenüs uzunluklarını c br aldığı fakat bunun nedenine değinmediği görülmektedir. Bu durum öğrencinin değişmeyenleri göz önünde bulundurduğunu fakat neden değişmediğini açıklamadığını göstermektedir. Öte yandan Ö-5 çizdiği şekilde, başlangıç noktası (0,0) ve bitim noktası (1,0) olan yarıçapı α˚ döndürerek oluşturduğu açıların bitim noktalarının koordinatlarındaki değişimi ifade etmiştir. Oluşturduğu dik üçgenlerin kenarlarını, bu koordinatlar ile ilişkilendirerek belirlemiş ve iki açıya ait trigonometrik oranları bu kenarları kullanarak yazmıştır. Yazdığı bu trigonometrik oranları karşılaştırarak aynı açı ölçüsüne sahip zıt yönlü iki açının trigonometrik oranları arasındaki ilişkiye ulaşmıştır. Burada öğrencinin söz konusu iki açının trigonometrik oranları arasındaki değişimleri ortaya koyduğu ve bu değişimleri ilişki kurarak gerekçelendirdiği dikkat çekmektedir.

Keşfetme ve Yansıtma Dengesi Kurma

Çalışma sonucunda sadece bir öğrencinin (Ö-2) ilk soruyu cevaplarken keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığını kullandığı görülmektedir.
Ö-2'nin birinci soruya vermiş olduğu cevap Şekil 14'te verilmiş olup, bu öğrencinin keşfetme ve yansıtma dengesi kurarken "Ya eğer…" ile "Bunu denersem ne olur?" düşünceleri arasında denge kurma, keşifleri ön plana koyma ve nihai hedefleri ön plana koyma olmak üzere üç farklı düşünme biçimine odaklandığı göze çarpmıştır (bkz. Tablo 5).

Tablo 5

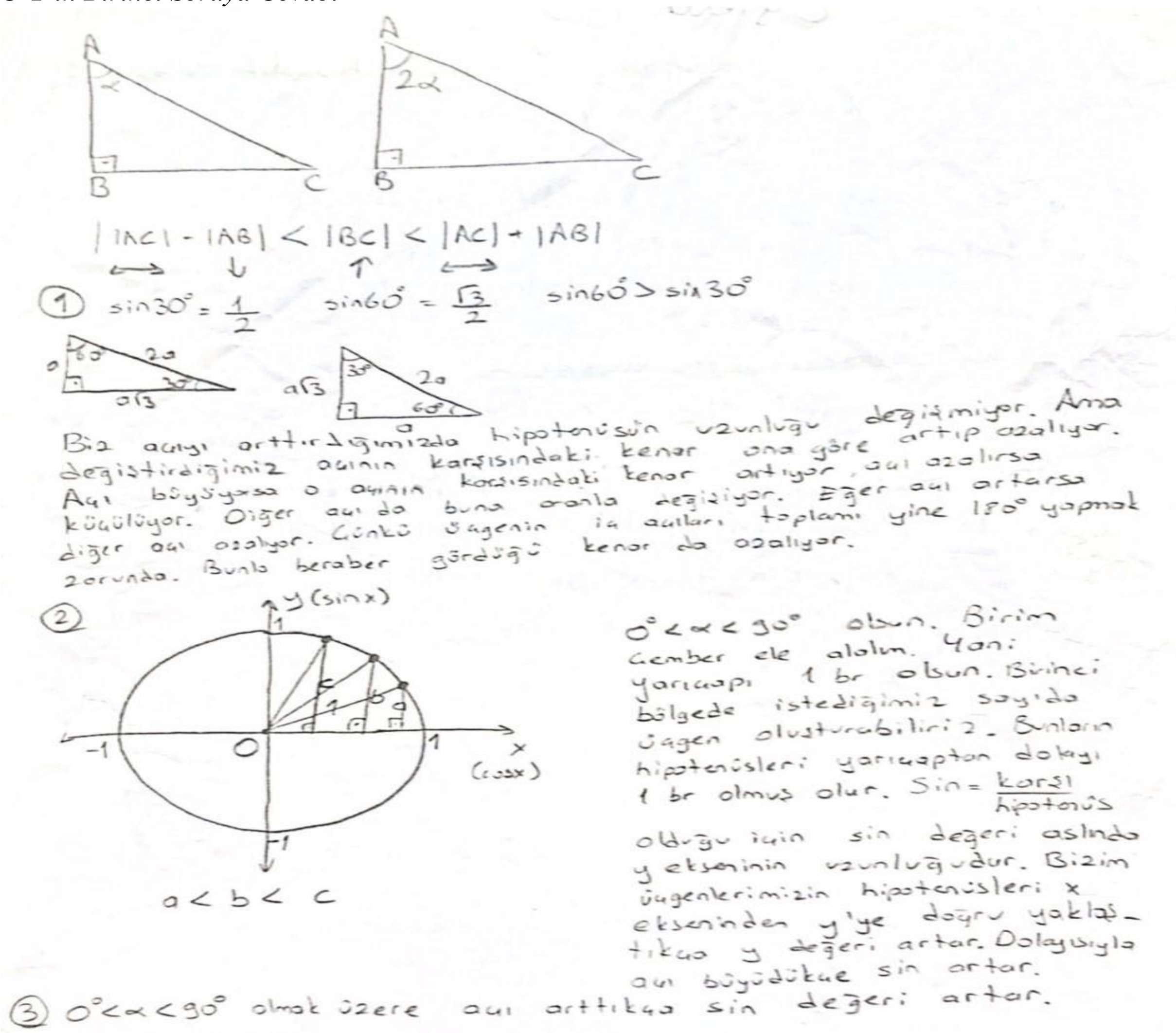
Öğrencilerin Trigonometri Konusu Özelinde Keşfetme ve Yansıtma Dengesi Kurma Alışkanlığını Kullanımları

Kullanılan Geometrik Alışkanlık	Odaklanılan Düşünme Biçimleri	Gerçekleştirilen Eylemler
Keşfetme ile Yansıtma Dengesi Kurma (Ö-2)	"Ya eğer…" ile "Bunu denersem ne olur?" düşünceleri arasında denge kurma (Ö-2)	"Bir şekil çizerek veya işlemleri tersten izleyerek ya da başka bir şey yapıldığında ne olur" düşüncesi ile hareket etme (Ö-2)
	Keşifleri ön plana koyma (Ö-2)	▪ Sezgilerle veya tahminler yoluyla şekil çizmek, şekille oynamak ve keşfetmek (Ö-2) ▪ Bilinen stratejilerle araştırma (Önceki deneyimleri mevcut çözüm yaklaşımlarına aktarma) (Ö-2) ▪ Problemi çözmek için ek şekil çizme (Ö-2) ▪ Problemi çözmek için farklı stratejiler geliştirme (Ö-2)
	Nihai hedefleri ön plana koyma (Ö-2)	▪ Düzenli olarak ilerlemenin bir kaldırım taşı olarak büyük resme dönme (Ö-2) ▪ Son durumun neye benzediğini tanımlama (Ö-2)

Şekil 14'te Ö-2'nin cevabında herhangi bir dik üçgenin bir dar açısı arttırıldığında kenarlardaki ve sinüs oranındaki değişimi göstermek amacıyla farklı stratejiler kullandığı görülmektedir.

Şekil 14

Ö-2'in Birinci Soruya Cevabı



Bu stratejilerden biri kapsamında öğrenci birim çemberin birinci bölgesi üzerinde bir açı ele almış ve bu açının bitim noktasından x eksenine dikme inerek bir dik üçgen oluşturmuştur. Öğrenci yine birinci bölgede kalmak şartıyla oluşturduğu dik üçgenin açısının arttırılmasıyla yeni dik üçgenler oluşacağını belirtmiş ve oluşan üçgenlerin hipotenüsleri y eksenine doğru yaklaştıkça kenarlarda ve sinüs oranında meydana gelecek değişimleri yorumlamıştır. Burada Ö-2'nin açının arttırılması ile oluşacak dik üçgenlerin hipotenüslerini y eksenine yaklaştırırsa bunun nasıl sonuçlar doğuracağına odaklandığı dikkat çekmektedir. Ayrıca burada, öğrencinin keşifleri ön plana koyma çerçevesinde tahminlerine dayalı olarak oluşturduğu şekil üzerinde üçgenleri bir dar açısını arttıracak şekilde değiştirdiği ve bunun kenarlar ve bu açıya karşılık gelen sinüs oranı üzerindeki etkilerini keşfetmeye çalıştığı göze çarpmaktadır. Diğer bir strateji kapsamında Ö-2, iki tane 30˚-60˚-90˚ özel üçgeni ele almıştır. Bu üçgenlerden yararlanarak dik üçgenin bir dar açısı arttırıldığında kenarların nasıl değişeceğini veya sabit kalacağını göstermiştir. Ayrıca 30˚ ve 60˚ye ait sinüs oranını yazarak karşılaştırmış ve böylece açı arttırıldığında sinüs oranının değişimini yorumlamıştır. Ö-2, başka bir strateji kapsamında ise iki ayrı dik üçgen çizmiş ve üçgendeki açı-kenar özelliklerini kullanarak dik üçgenin bir dar açısının arttırılması ile kenarların ve diğer açıların değişimini ifade etmiştir.

Öğrencinin bu üç stratejiyi kullanırken geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlığında olduğu gibi ilişki kurarak muhakeme etme ve değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlıklarından da yararlandığı dikkat çekmektedir. Ek olarak öğrencinin keşfetme ve yansıtma dengesi kurarken aynı zamanda geometrik fikirlerini genelleştirdiği de görülmüştür. Tüm bu stratejiler göz önünde bulundurulduğunda, Ö-2'nin problemi çözmek için keşifleri ön plana koyarken farklı stratejileri bir arada kullanabildiği ve çözümünü bu şekilde desteklediği ortaya çıkmaktadır. Ayrıca öğrencinin sahip olduğu bilgi ve deneyimleri mevcut çözüm yaklaşımına aktardığı dikkat çekmiştir. Bu kapsamda öğrenci kenarlardaki ve sinüs oranındaki değişimi belirlemek için birim çember, özel üçgenler ve üçgende açı-kenar ilişkileri ile ilgili bilgilerini kullanmıştır. Ek olarak öğrencinin keşifleri ön plana koyarken problemi birim çembere taşıyarak birim çember üzerinde farklı dik üçgenler oluşturma, iki tane 30˚-60˚-90˚ üçgeni oluşturma gibi ek şekiller çizdiği de söylenebilir.

Ö-2 nihai hedefleri ön plana koyma kapsamında ise, ele aldığı dik üçgenin hipotenüsünün y eksenine yaklaştırılması ile oluşacak her bir yeni üçgenden yararlanarak büyük resme odaklanmış ve açının artması ile açıya ait sinüs oranında meydana gelecek değişim ile ilgili nihai durumu tanımlamıştır.

Çalışmadan elde edilen bulgulara genel olarak bakıldığında, sadece bir öğrencinin geometrik fikirlerini genelleştirirken oluşabilecek tüm durumları dikkate alarak ortaya koyduğu kuralın neden her zaman geçerli olacağını açıkladığı ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığını kullandığı sonucuna ulaşılmıştır. Sadece bir öğrencinin gelişmiş düzeyde genelleme yapabilmesi ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığını kullanabilmesi, öğrencilerin geometrik alışkanlıkları kullanma konusunda yeterli düzeyde olmadıklarına işaret etmektedir. Çalışma kapsamında dikkat çeken bir diğer husus da, öğrencilerin tümünün diğer geometrik alışkanlıkları kullanırken ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığından yararlanmaları olmuştur. Ayrıca, geometrik fikirlerin genelleştirilmesi ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlıklarını kullanan tüm öğrencilerin bu alışkanlıkları kullanırken ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığına ek olarak değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığından da yararlandıkları belirlenmiştir. İlaveten, keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığını kullanan tek öğrenci ise bu alışkanlığı kullandığı esnada geometrik fikirlerini de genelleştirmiştir. Buradan hareketle öğrencilerin geometrik problemleri çözerken birden fazla geometrik alışkanlığı birlikte kullanabildikleri ve bu alışkanlıkları birbiriyle ilişkilendirebildikleri görülmüştür.

Tartışma

Bu çalışma Driscoll ve arkadaşlarının (2007) perspektifinden, matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin trigonometrik oran ve birim çember ile ilgili trigonometri sorularını çözme süreçlerinde kullandıkları geometrik alışkanlıkları açıklamaktadır. Çalışma kapsamında öğrencilerin ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığını kullanırken literatüre ek olarak "yeniden yapılandırma" olmak üzere yeni bir düşünme biçimine odaklandıkları saptanmıştır. Ayrıca öğrencilerin ilişki kurarak muhakeme etme ve geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlıklarını kullanırken odaklandıkları bazı düşünme biçimleri çerçevesinde "sayısal verilerden ve örneklerden yararlanarak akıl yürütme" olmak üzere literatüre ek yeni bir eylem gerçekleştirdikleri ortaya çıkmıştır. Belirlenen bu ek düşünme biçimleri ve eylemler sebebiyle çalışmanın ilgili alanyazın için değerli olduğu düşünülmektedir.

Çalışmada ulaşılan bir başka sonuç da, öğrencilerin trigonometri konusunda en sık kullandıkları zihinsel alışkanlıkların "ilişki kurarak muhakeme etme" ve "değişmeyenlerin incelenmesi" alışkanlıkları olduğudur. Bu sonuç, geometrik alışkanlıklar ile ilgili yapılan diğer çalışmalarla paralellik göstermektedir (Bülbül ve Güven, 2020; Driscoll ve ark., 2007). Öğrencilerin neredeyse tamamı trigonometrik oran ve birim çember ile ilgili soruları çözerken açı, dik üçgen, dik koordinat düzlemi, birim çember ve dik üçgendeki trigonometrik oranlar kavramlarını birbiri ile ilişkilendirmiş ve yapmış oldukları ilişkilendirmelere dayanarak değişen ve değişmeyen durumları belirlemişlerdir. Buradan hareketle öğrencilerin trigonometri konusu ile ilgili farklı matematiksel kavramları, özellikleri ve kuralları birbirinden bağımsız olarak algılamadıkları sonucuna varılabilir. Bu sonuç çalışmayı trigonometri konusu ile ilgili daha önce yapılan çalışmalardan ayırmaktadır. Önceki çalışmalar, öğrencilerin trigonometri konusu ile ilgili kavramlar arasında yeterli ilişki kuramadıklarını ve bu sebeple de trigonometri konusunda zorlandıklarını ortaya koymuştur (Brown, 2005; Fi, 2003; Kendal ve Stacey, 1998; Weber, 2005, Yiğit, 2014a, 2014b). Ayrıca bu bulgu Bülbül ve Güven'in (2020) ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin geometrik problemlerde kullandıkları alışkanlıkları incelediği çalışmanın sonuçlarından da farklılık göstermektedir. Bülbül ve Güven (2020), dördüncü sınıf lisans öğrencilerinin ilişki kurarken zorlanmadıklarını fakat değişmeyenleri belirlerken zorlandıklarını saptamışlardır.

Öğrencilerin ilişki kurarken odaklandıkları düşünme biçimleri farklı olsa da bu düşünme biçimleri çerçevesinde gerçekleştirdikleri eylemlerin benzer olduğu göze çarpmıştır. Bu noktada öğrencilerin daha çok dik üçgen, birim çember, dik koordinat düzlemi ve trigonometrik oranlar ile ilgili özellikleri ve kuralları birbiri ile ilişkilendirdikleri ve bütünleştirdikleri dikkat çekmiştir. Buna karşın, az sayıda öğrencinin ilişki kurarken geometrik şekilde uygun yapılar oluşturduğu ve sayısal verilerden veya örneklerden yararlandığı belirlenmiştir. Öğrencilerin ilişki kurarken simetri ve orantısal akıl yürütme gibi özel muhakeme becerilerini kullanmadıkları ortaya çıkmıştır. Benzer şekilde Uygan (2016) da 7. sınıf öğrencileri ile gerçekleştirdiği çalışmasında öğrencilerin başlangıçta simetri ve orantısal akıl yürütme gibi özel muhakeme becerilerini kullanmada yeterli düzeyde olmadıklarını; fakat dinamik geometri yazılımları tabanlı bir öğretim ile öğrencilerin bu becerilerinin geliştiği sonucuna varmıştır. Çalışmada ayrı şekiller arasındaki ilişkilere odaklanan öğrencilerin şekilleri birbirinden bağımsız olarak algılamadıkları ve şekillerin ortak ve farklı özelliklerine yoğunlaşarak karşılaştırmalar yaptıkları ortaya çıkmıştır. Bülbül ve Güven (2020) ise ilköğretim matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin birinci sınıftayken şekilleri bağımsız olarak algıladıklarını ve birbiri ile ilişkilendirmekte zorlandıklarını fakat dördüncü sınıfa geldiklerinde şekilleri birbirinden bağımsız olarak görmediklerini ve birbiri ile ilişkilendirebildiklerini belirlemişlerdir.

Değişmeyenleri araştırırken öğrencilerin yaklaşık tamamının geometrik bir şekil herhangi bir dönüşüme tabi tutulduğunda veya belirli bir oranda büyütüldüğünde/küçültüldüğünde, şeklin hangi özelliklerinin sabit kaldığını, hangi özelliklerinin değiştiğini belirleyebildikleri dikkat çekmiştir. Bu öğrencilerin bir şeklin veya noktanın sürekli hareketinin etkilerini göz önünde bulundurabildikleri yani dinamik düşünebildikleri görülmüştür. Bu sonuç Tolga ve Cantürk-Günhan (2019) ve Uygan'ın (2016) çalışmaları ile paralellik göstermektedir.Çalışmada öğrencilerin çoğunun bir dik üçgenin bir dar açısının arttırılması ile ilgili olan ilk soruda uygun dönüşümler yapabildikleri görülmüştür. Benzer sonuç Bülbül ve Güven (2020) ve Seago, Jacobs, Heck, Nelson ve Malzahn (2014) ve Uygan'ın (2016) çalışmalarında da mevcuttur. Govender ve Govender'in (2020) çalışmalarında da görüldüğü üzere öğrencilerin verilen probleme uygun dönüşümleri yapabilme ve dinamik düşünebilme becerilerinin geliştirilmesi konusunda teknolojik araçların kullanımı faydalı olabilir. Teknolojik araç kullanımının öğrencilerin geometrik şekiller üzerinde etkileşimli incelemeler yapabilmelerine, şekilleri manipüle etmelerine ve görselleştirmelerine yardımcı olma vasıtasıyla bu konuda etkili olabileceği düşünülmektedir (Dikovic, 2009; Hartatiana, Darhim ve Nurlaelah, 2018; Lin, Chen ve Chang, 2015; Tomaschko ve Hohenwarter, 2019).

Çalışma sonucunda trigonometri konusunda "geometrik fikirlerin genelleştirilmesi" alışkanlığının da çoğu öğrenci tarafından kullanıldığı fakat bu kullanımın niteliğinin yeterli düzeyde olmadığı sonucuna varılmıştır. Bu alışkanlığı kullanan öğrencilerden biri haricindeki tümünün az gelişmiş düzeyde genelleme yapabildikleri belirlenmiştir. Sadece bir öğrencinin istenilen düzeyde genelleme yapabildiği, yani genelleme yaparken olası tüm durumlara odaklanarak bütün ile ilişkilendirme yapabildiği dikkat çekmiştir. Diğer öğrencilerin ise genelleme yaparken tüm durumları düşünmek yerine özel durumları düşünmeye ve sayısal değerler vermeye yöneldikleri görülmüştür. Benzer şekilde Bülbül ve Güven (2020), Driscoll ve ark. (2007) ve Uygan'ın (2016) çalışmalarında da öğrencilerin gelişmiş düzeyde genelleme yapamadıkları ortaya çıkmıştır. Ayrıca çalışma kapsamında dikkat çeken bir diğer husus da sadece bu öğrencinin "keşfetme ve yansıtma dengesi kurma" alışkanlığını kullandığıdır. Böylece keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığının trigonometri konusunda öğrenciler tarafından en az kullanılan alışkanlık olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Driscoll ve ark. (2007), Koç ve Bozkurt (2012) ve Tolga ve Cantürk-Günhan'ın (2019) çalışmalarında da benzer bulgulara rastlanmaktadır. Elde edilen bu bulgular öğrencilerin geometrik fikirlerini genelleştirmede ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurmada yeterince iyi olmadıklarını ve bu alışkanlıkları kullanma konusunda teşvik edilmeleri gerektiğini göstermektedir. Bunun sebeplerinden biri Bülbül (2016), Özen (2015) ve Eraslan-Yalçın ve Özgeldi'nin (2019) de vurguladığı gibi, matematik müfredatlarında daha çok ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığının vurgulanması ve bu alışkanlığın kullanımına yönelik örnekler verilmesi olabilir. Öğrencilerin söz konusu alışkanlıkları etkili bir şekilde kullanabilmelerini sağlamak amacıyla ilköğretim, ortaöğretim ve lisans düzeylerinde yürütülen matematik öğretimi faaliyetlerinin gözden geçirilmesi ve tekrar yapılandırılması faydalı olabilir.

Çalışmadan elde edilen diğer bir sonuç ise öğrencilerin değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını kullanırken ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığını; geometrik fikirlerin genelleştirilmesi ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlıklarını kullanırken ise ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığına ek olarak değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını da kullandıklarıdır. Ayrıca keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığını kullanan tek öğrencinin bu esnada geometrik fikirlerini genelleştirme alışkanlığından da yararlandığı görülmüştür. Bu bulgudan hareketle öğrencilerin verilen geometrik problemleri çözerken tek bir geometrik alışkanlığa odaklanmadıkları, birden fazla geometrik alışkanlığı birlikte kullanabildikleri ve bu alışkanlıkları birbiriyle ilişkilendirebildikleri sonucuna ulaşılmıştır. Yapılan bazı çalışmalarda da katılımcıların geometrik alışkanlıkları bir arada kullandıkları belirlenmiştir (Özen, 2015; Tolga ve Cantürk-Günhan, 2019). Driscoll ve arkadaşları (2007) da, dört geometrik alışkanlığının birbirinden bağımsız olmadığını ve bireylerin bir problemi çözerken birden fazla geometrik alışkanlığını kullanabildiklerini ifade etmişlerdir. Benzer şekilde Bülbül ve Güven (2020), öğrencilerin karşılaştığı geometri problemleri çözebilmeleri için geometrik düşünme alışkanlıklarını birlikte kullanabilmeleri gerektiğini belirtmiştir.

Çalışmadan elde edilen sonuçlar özetlendiğinde; öğrencilerin daha çok ilişki kurarak muhakeme etme ve değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlıklarını kullanma eğiliminde olduğu; özellikle geometrik fikirlerin genelleştirilmesi ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlıklarını kullanmada yeterli düzeyde olmadıkları görülmüştür. Öğrencilerin ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığından diğer üç alışkanlığı kullanırken de faydalandığı dikkat çekmiştir. Öğrencilerin geometrik fikirlerin genelleştirilmesi ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlığını kullanırken ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığına ek olarak değişmeyenlerin incelenmesi alışkanlığını da kullandıkları ortaya çıkmıştır. Ayrıca öğrencilerin ilişki kurarak muhakeme etme alışkanlığı kapsamında farklı düşünme biçimlerine odaklansalar da benzer eylemler gerçekleştirdikleri sonucuna ulaşılmıştır.

Öğrencilerin trigonometri konusunda geometrik alışkanlıklarını nasıl kullandıklarının derinlemesine incelenmesi, onların trigonometri konusundaki öğrenmelerini geliştirmek adına ve etkili öğrenme-öğretme ortamlarının oluşturulması adına önemlidir. Bu bağlamda, bu çalışmanın bulgularının, öğrencilerin trigonometri konusunu nasıl öğrendikleri konusunda fikir vermesi noktasında faydalı olacağı düşünülmektedir. Böylece çalışma ile birlikte, öğrencilerin ihtiyaçlarına cevap verebilecek bir öğrenme-öğretme ortamı için plan hazırlama ve bu plan doğrultusunda gerekli argümanları belirleme ile bunları sağlama ve ölçme-değerlendirme konularında yardımcı fikirlere ulaşılması sağlanabilir.

Bu çalışmada matematik öğretmenliği lisans öğrencilerinin trigonometri konusu özelinde kullandıkları geometrik alışkanlıklar incelenmiş ve bu inceleme neticesinde öğrencilerin geometrik alışkanlıklarının geliştirilmesi gerektiği sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin geometrik fikirlerin genelleştirilmesi ve keşfetme ve yansıtma dengesi kurma alışkanlıklarını kullanmada yeterli düzeyde olmadıklarının ortaya çıkmasından hareketle özellikle bu alışkanlıkları kullanmaya teşvik edilmelerine ihtiyaç olduğu sonucuna varılabilir. Bu sebeple sonraki çalışmalarda öğrencilerin trigonometri konusunda kullandıkları geometrik alışkanlıklarının geliştirilmesine odaklanılabilir. Bu çerçevede, öğrencileri tüm geometrik alışkanlıkları birlikte kullanmaya yönlendiren, farklı problem durumları içeren, çok boyutlu ve dinamik düşünmeyi, farklı çözüm yolları üretmeyi, şekilleri değiştirmeyi, tahminlerde bulunmayı, ek çizimler yapmayı, çözüm adımları hakkında düşünerek bütün ile ilişki kurmayı ve fikirleri genellemeyi odağına alan öğretimler tasarlanabilir. Böylece öğrencilerin keşfetme ve yansıtma dengesi ve geometrik fikirlerin genelleştirilmesi alışkanlıklarını etkili bir şekilde kullanabilmeleri sağlanabilir. Söz konusu öğretimlerin öğrencilere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar değerlendirilerek trigonometri konusunun öğretimi ile ilgili önerilerde bulunulabilir. Böylece yapılan öneriler doğrultusunda müfredatlarda gerekli iyileştirmeler yapılarak ortaöğretim ve lisans öğrencilerinin trigonometri konusunu etkili öğrenmelerine katkı sağlanabilir. Goldenberg (1996) ve Cuoco (2008) da ancak zihin alışkanlıkları temel alınarak geçerli bir müfredat oluşturabileceğini ifade etmişlerdir.

Son olarak, bu çalışma on iki matematik öğretmenliği birinci sınıf lisans öğrencisi ile gerçekleştirilmiş olup, öğrencilerin trigonometri konusunda kullandıkları geometrik alışkanlıklar birim çember ve trigonometrik oran başlıkları ile sınırlandırılmıştır. Ek olarak öğrencilerin kullandıkları geometrik alışkanlıkları belirlemek adına kullanılan sorular dört soru ile sınırlı tutulmuştur. Dolayısıyla sonraki çalışmalar farklı sınıf seviyelerindeki öğrenci grupları ile yapılarak çalışma genişletilebilir.

Kaynakça

Brown, S. A. (2005). *The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine.* (Dissertation). Illinois State University. Illinois.

Bülbül, B. Ö. (2016). *Matematik öğretmeni adaylarının geometrik düşünme alışkanlıklarını geliştirmeye yönelik tasarlanan öğrenme ortamının değerlendirilmesi.* (Yayımlanmamış doktora tezi). Karadeniz Teknik Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Trabzon.

Bülbül, B. Ö., & Güven, B. (2020). Öğretmen adaylarının geometrik düşünme alışkanlıklarının değişimi. *Pamukkale Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 48*, 431-453. Doi:10.9779/pauefd.513220

Costa, A. L., & Kallick, B. (2000). *Discovering ang exploring habits of mind.* Alexandria, Virginia: Association for Supervision & Curriculum Development.

Creswell J. W. (2014). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches.* (4. baskı). Los Angeles, CA: Sage Publications.

Cuoco, A. (2008). *Mathematical habits of mind: An organizing principle for curriculum design*. A Project Next Session on Helping Students Develop Mathematical Habits on Mind, Joint Mathematics Meetings. San Diego January. The United States of America. http://www2.edc.org/CME /showcase.html.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of minds: An organizing principle for mathematics curricula. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 375-402.

Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (2010). Contemporary curriculum issues: Organizing a curriculum around mathematical habits of mind. *Mathematics Teacher*, *103*(9), 682-688.

Dikovic, L. (2009). Applications GeoGebra into teaching some topics of mathematics at the college level. *Computer Science and Information Systems*, *6*(2), 191-203.

Driscoll, M., DiMatteo, R. W., Nikula, J., & Egan, M. (2007). *Fostering geometric thinking. A guide for teachers, grades 5-10*. Portsmouth: Heinemann.

Driscoll, M. J., DiMatteo, R. W., Nikula, J., Egan, M., Mark, J., & Kelemanik, G. (2008). *The fostering geometric thinking toolkit: A guide for staff development.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Eraslan-Yalçın, E., & Özgeldi, M. (2019). 1924-2018 ortaokul matematik öğretim programlarının geometrik düşünme alışkanlıkları bakımından incelenmesi. *Mersin Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, 15*(1), 131-146. DOI: 10.17860/mersinefd.479753

Erşen, Z. B., Ezentaş, R., & Altun, M. (2018). Evaluation of the teaching environment for improve the geometric habits of mind of tenth grade students. *European Journal of Education Studies, 4*(6), 47-65. doi: 10.5281/zenodo.1239849

Fi, C. (2003). *Preservice secondary school mathematics teachers' knowledge of trigonometry: Subjectmatter content knowledge, pedagogical content knowledge and envisioned pedagogy*. (Dissertation). University of Iowa. Iowa City.

Goldenberg, E. P. (1996). "Habits of Mind" as an organizer for the curriculum. *Journal of Education, 178*(1), 13-34.

Goldenberg, E. P., Shteingold, N., & Feurzeig, N. (2003). Mathematical habits of mind for young children. In F. K. Lester & R. I. Charles (Eds.), *Teaching mathematics through problem* *solving: Prekindergarten-Grade 6* (pp. 15-29). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Govender, R. G., & Govender, D. W. (2020). Learning geometry online: A creative individual learning experience. *International Journal of eBusiness and eGovernment Studies*, *12*(2), 151-165. Doi: 10.34111/ijebeg.202012205Gürbüz, M. Ç., Ağsu, M., & Güler, H. K. (2018). Investigating geometric habits of mind by using paper folding. *Acta Didactica Napocensia*, *11*(3-4), 157-174, DOI: 10.24193/adn.11.3-4.12.

Harel, G., & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking & Learning*, *7*(1), 27–50.

Hartatiana, H., Darhim, D., & Nurlaelah, E. (2018). Improving junior high school students' spatial reasoning ability through model eliciting activities with Cabri 3D. *International Education Studies*, *11*(1), 148-154.

Kendal, M, & Stacey, K. (1998). Teaching trigonometry. *Aust Math Teach*, *54*(1), 34–39.

Koç, Y., & Bozkurt, A. (2012). Investigating prospective mathematics teachers' knowledge of volume of cylinders. *Energy Education Science and Technology Part B: Social and Educational Studies* [Special Issue I], *4*, 148-153.

Lai, Y., & Donsing, A. (2018). Using geometric habits of mind to connect geometry from a transformation perspective to graph transformations and abstract algebra. In: Wasserman N. (Ed.), *Connecting Abstract Algebra to Secondary Mathematics, for Secondary Mathematics Teachers. Research in Mathematics Education* (pp. 263-289). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-99214-3_13

Leikin, R. (2007). Habits of mind associated with advanced mathematical thinking and solution spaces of mathematical tasks. In *Proceedings of the Fifh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2330-2339). Larnaca, Cyprus.

Levasseur, K., & Cuoco, A. (2009). Mathematical *habits of mind.* National Council of Teachers of Mathematics.

Lin, H. C. K., Chen, M. C., & Chang, C. K. (2015). Assessing the effectiveness of learning solid geometry by using an augmented reality-assisted learning system. *Interactive Learning Environments*, *23*(6), 1-12. Doi: 10.1080/10494820.2013.817435

Lim, K. H., & Selden, A. (2009). Mathematical habits of mind. In S. L. Swars, D. W. Stinson & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Atlanta, GA: Georgia State University.

Mark, J., Cuoco, A., Goldenberg, E. P., & Sword, (2009). *Developing mathematical habits of mind in the middle grades*. http://www2.edc.org/cme/hom/hom-middle-grades.pdf

Matsuura, R., Sword, S., Piecham, M. B., Stevens, G., & Cuoco, A. (2013). Mathematical habits of mind for teaching: Using language in algebra classrooms. *The Mathematics Enthusiast*, *10*(3), 735-776.

Mıles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded sourcebook* (2. Edition). California: SAGE Publications.

Moore, K. C. (2013). Making sense by measuring arcs: A teaching experiment in angle measure. *Educational Studies in Mathematics*, *83*(2), 225–245.

Moore, K. C. (2014). Quantitative reasoning and the sine function: The case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45*(1), 102–138.

National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston (VA): NCTM.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston (VA): NCTM.

Özen, D. (2015). *Ortaokul matematik öğretmenlerinin geometrik düşünmelerinin geliştirilmesi: Bir ders imecesi.* (Yayımlanmamış doktora tezi). Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Eskişehir.

Özen-Ünal, D., & Köse, N. (2019). A lesson study to develop teacher's geometric habits of mind. (2019). *Croatian Journal of Education*, *21*(4), 1133-1179. https://doi.org/10.15516/cje.v21i4.3205

Rolle, Y. A. (2008). *Habits of practice: A qualitative case study of a middle-school mathematics teacher*. (Unpublished doctoral dissertation). The Faculty of the Graduate Collage, University of Nebraska. Lincoln, Nebraska, USA

Seago, N. M., Jacobs, J. K., Heck, D. J., Nelson, C. L., & Malzahn, K. A. (2014). Impacting teachers' understanding of geometric similarity: Results from field testing of the learning and teaching geometry Professional development materials. *Professional Development in Education, 40*(4), 627-653.

Thompson, P. W. (2008). Conceptual analysis of mathematical ideas: Some spadework at the foundations of mathematics education. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojana & A. Sepulveda (Eds.), *Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Proceedings*, *1*, 45–64. Morelia: PME.

Thompson, P. W., Carlson, M. P., & Silverman, J. (2007). The design of tasks in support of teachers' development of coherent mathematical meanings. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4–6), 415–432.

Tolga, A., & Cantürk-Günhan, B. (2019). Ortaokul matematik öğretmenlerinin zihnin geometrik alışkanlıklarının belirlenmesi. *Batı Anadolu Eğitim Bilimleri Dergisi, 10*(1), 37-56.

Tomaschko, M., & Hohenwarter, M. (2019). Augmented reality in mathematics education: The case of GeoGebra AR. In Theodosia Prodromou (Ed.), *Augmented Reality İn Educational Settings* (pp. 325-346). The Netherlands: Brill Sense. doi: 10.1163/978900 4408845_014

Uygan, C. (2016). *Ortaokul öğrencilerinin zihnin geometrik alışkanlıklarının kazanımına yönelik dinamik geometri yazılımındaki öğrenme süreçleri.* (Yayımlanmamış doktora tezi). Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Eskişehir.

Weber, K. (2005). Students' understanding of trigonometric functions. *Mathematics Education Research, 17*(3), 91–112.

Weber, K., Knott, L., & Evitts, T. (2008). Teaching trigonometric functions: Lessons learned from research. *Mathematics Teacher, 102*(2), 144–150.

Wiles, P. S. (2013). Folding corners of the habits of mind. *Mathematics Teaching in the Middle School, 19*(4), 208-213.

Yavuzsoy-Köse N., & Tanışlı, D. (2014). Primary school teacher candidates' geometric habits of mind. Educational Sciences: *Theory & Practice, 14*(3), 1220-1229. http://dx.doi.org/1229.10. 12738/estp.2014.3.1864

Yıldız, N. (2018). *Ortaokul sınıflarında geometrik düşünmenin geliştirilmesine yönelik bir mesleki gelişim modelinin öğrencilerin Van Hiele geometrik düşünme düzeylerine etkisi.* (Yayımlanmamış doktora tezi). Gaziantep Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü. Gaziantep.

Yigit, M. (2014a). *Learning of trigonometry: An examination of pre-service secondary mathematics teachers' trigonometric ratios schema*. (Dissertation). Purdue University. West Lafayette.

Yigit, M. (2014b). Pre-service secondary mathematics teachers' conceptions on angles. *The Math Enthusiast, 11*(3), 707–736.

Yiğit-Koyunkaya, M. (2016). Mathematics education graduate students' understanding of trigonometric ratios. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(7), 1028-1047. DOI: 10.1080/0020739X.2016.1155774

Yin, R. (2018). *Case study research: Design and methods.* (6th edition). London: Sage.

Extended Abstract

Introduction

The main purpose of this study is to examine geometric habits of undergraduate students, who were enrolled in secondary mathematics education, related to the concepts of unit circle and trigonometric ratios. The framework of "Geometric Habits of the Mind" was identified as the theoretical background of the study. Driscoll et al. (2007) introduced four geometric habits: reasoning with relationship, generalizing geometric ideas, investigating invariants, and balancing exploration with reflection.This framework contributes to geometry learning and teaching by providing a detailed perspective on geometric thinking and its development (Drisscoll et al., 2007).

Method

This study was designed in the light of the case study method and the participants were twelve first grade students studying in a secondary mathematics education undergraduate program in the West coast of Turkey. The students were determined based on a purposive sampling method..The data group of the study consists of four questions about the concepts of unit circle and trigonometric ratios. The students were asked to solve the questions on the paper. The questions were designed by the researchers to measure all components of the GHOM framework. The data were analyzed with the descriptive analysis method (Creswell, 2014).

Findings

As a result of the findings, the students' most frequently used reasoning with relationships and investigating invariants and the least used balancing exploration with reflection. It was revealed that the students reconstructed the shape in this study as well as focusing on the relationships between the parts of a single shape and the relationships between separate shapes while establishing relationships. The students performed similar actions within the framework of these three different ways of thinking. It has been revealed that students often generalized geometric ideas while solving geometric problems. Almost all of the students who use this habit focused on using simplifying conditions, looking for solutions by using known situations or known solutions, and putting forward general rules. These students put forward a general rule without mentioning all solution sets and why or not. Only one student, while generalizing his ideas, made a relationship with the whole and took into account all possible situations. Students focused on thinking dynamically and checking the evidence of effects while using the habit of examining invariants. It has been observed that all of the students mostly focused on the effects of continuous movement and imagined the new shape that will be formed as a result of this movement. In the framework of checking the evidence of effects, it was observed that most of the students identified both the variables and the invariable ones and they were able to explain the reasons. As a result of the study, it was determined that only one student used the habit of establishing a balance between exploration and reflection. This student considered all solution sets, thought in a dynamic way and used different solution strategies. In addition, it was concluded that the only student who used the habit of balancing exploration with reflection also benefited from the habit of generalizing for her geometric ideas. The findings of the study showed that almost all of the students were not at a sufficient level in using geometric habits.

Discussion

The findings of the study showed that students' geometric habits should be developed. It was determined that the students were not at a sufficient level especially in using the habits of generalizing geometric ideas and establishing a balance between exploration and reflection. From this point of view, future studies could focus on the development of geometric habits that students use in trigonometry. By using this framework, a teaching method could be designed that encourages students to use geometric habits together, includes different problem situations, focuses on multidimensional and dynamic thinking, producing different solutions and generalizing.

*Bu çalışmaya yazarlar eşit oranda katkı sağlamışlardır.